

ANALYSE

Exercices d'analyse — suites, séries, fonctions

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit (x_n) une suite de nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

- 1 On suppose que (x_n) converge vers un nombre complexe ℓ ; démontrer que y_n converge vers ℓ .
- 2 On suppose que les x_n sont réels et que $x_n \rightarrow +\infty$; démontrer que $y_n \rightarrow +\infty$.
- 3 Donner un exemple où la suite (y_n) converge mais où la suite (x_n) ne converge pas.
- 4 (Variante) On pose $z_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$. Si la suite (x_n) converge vers ℓ , démontrer qu'il en est de même de la suite (z_n) .

EXERCICE 2

Soit (x_n) une suite telle que $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ pour $n \geq 0$.

- 1 Démontrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ possède un unique point fixe, a , dans \mathbf{R}_+ . Calculer a .
- 2 Démontrer que la suite (x_n) est monotone et converge vers a .
- 3 On suppose $x_0 \neq a$; démontrer que $\frac{x_{n+1}-a}{x_n-a}$ converge vers $1/2\sqrt{1+a}$. En déduire que la suite de terme général $-\frac{1}{n} \log |x_n - a|$ converge vers $\log(2\sqrt{1+a})$.

EXERCICE 3

Soit a un nombre réel strictement positif ; on définit une suite (x_n) par récurrence en posant $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ pour $n \geq 0$.

- 1 Quelles sont les éventuelles limites de la suite (x_n) ?
- 2 Démontrer que la suite de terme général $|x_n - \sqrt{a}|$ décroît strictement décroissante.
- 3 Démontrer que les suites de terme général x_{2n} et x_{2n+1} respectivement sont adjacentes.
- 4 On pose $y_n = -\log |x_n - \sqrt{a}|$. Démontrer que la suite de terme général $y_{n+1} - 2y_n$ converge. En déduire que la suite de terme général $y_n/2^n$ converge.

EXERCICE 4

- 1 Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ pour tout couple (m, n) . On pose $\ell = \inf_{n \geq 1} (x_n/n)$. Démontrer que la suite (x_n/n) converge vers ℓ .
- 2 Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme continu de E . On note $\|\cdot\|$ la norme sur E et la norme d'opérateur sur $\text{End}(E)$. Démontrer que la suite $(\|u^n\|^{1/n})$ converge. Lorsque E est de dimension finie, calculer sa limite en fonction des valeurs propres de u .

EXERCICE 5

Soit (x_n) une suite de nombre réels telle que $x_{n+1} - x_n \rightarrow 0$.

- 1 Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment non vide de $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- 2 Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. On suppose que $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite (x_n) converge.

EXERCICE 6

Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_{n+1} = \sin(x_n)$ pour tout entier n et $0 < x_0 < \pi$.

- 1 Démontrer que $0 < \sin(x) < x$ pour tout $x \in]0, \pi[$.
- 2 Démontrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et tend vers 0.
- 3 Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

- 4 Démontrer que la suite (nu_n^2) a une limite strictement positive.

EXERCICE 7

Soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n / (1 + x_n^2)$.

- 1 Démontrer que $x_n > 0$ pour tout n .
- 2 Démontrer que la suite (x_n) est strictement décroissante et converge vers 0.
- 3 Démontrer qu'il existe un unique nombre réel a tel que $x_{n+1}^a - x_n^a$ ait une limite finie non nulle lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 4 En déduire un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 8

Soit (x_n) une suite de nombres complexes ; pour tout n , on pose $y_n = x_n + 2x_{n+1}$.

- 1 Pour tout n , calculer x_n en fonction des termes de la suite (y_n) et de x_0 .
- 2 On suppose que la suite (y_n) converge ; démontrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite.

EXERCICE 9

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n-1} sur $[a; b]$ et \mathcal{D}^n sur $]a, b[$.

- 1 On suppose que f possède $n + 1$ zéros dans $[a, b]$. Démontrer que $f^{(n)}$ s'annule.
- 2 Soit (a_1, \dots, a_n) des nombres réels distincts appartenant à $[a, b]$ tels que $f(a_i) = 0$ pour tout i . Soit $t \in [a, b]$ un nombre réel distinct des a_i et soit $A = f(t) / \prod_{i=1}^n (t - a_i)$. En considérant la fonction g donnée par $g(x) = f(x) - A \prod_{i=1}^n (x - a_i)$, démontrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(t) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (t - a_i).$$

- 3 Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange pour f aux points a_i ; démontrer que $\|P - f\|_\infty \leq (b - a)^n M_n / n!$, où $M_n = \sup_{t \in]a, b[} |f^{(n)}(t)|$.

EXERCICE 10

Soit p un entier et soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dont la restriction de f à \mathbf{R}^* est de classe \mathcal{C}^p . On suppose que $f^{(p)}(x)$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow 0$ (en restant $\neq 0$).

- 1 On suppose d'abord que $p = 1$. Démontrer que f est continue en 0, puis que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} .
- 2 Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^p .
Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$.
- 3 Démontrer que la restriction de f à \mathbf{R}^* est de classe \mathcal{C}^∞ . Démontrer qu'il existe pour tout entier n un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x}/x^{2n}$ pour tout $x > 0$.

4 Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

EXERCICE 11

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^p telle que $f(0) = 0$, où $p \geq 1$. On pose $g(x) = f(x)/x$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

1 Démontrer que g est continue sur \mathbf{R} .

2 Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^p sur \mathbf{R}^* et que l'on a la formule, pour $x \neq 0$ et $m \leq p$,

$$g^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!} (-1)^{m-p} \frac{f^{(p)}(x)}{x^{m-p+1}}.$$

3 En appliquant la formule de Taylor entre x et 0, démontrer que $g^{(m)}(x) \rightarrow \frac{1}{m+1} (-1)^m f^{(m+1)}(0)$ quand $x \rightarrow 0$.

4 En déduire qu'il existe une fonction de classe \mathcal{C}^{p-1} sur \mathbf{R} qui prolonge la fonction g .

5 Démontrer que $g(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. En déduire une autre démonstration de la question précédente.

EXERCICE 12

Soit f la fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} donnée par $f(t) = e^{-t^2}$.

1 Démontrer qu'il existe, pour tout entier n , un unique polynôme P_n tel que $f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-t^2}$.

2 Démontrer que $\deg(P_n) = n$. Prouver aussi que P_n est de la même parité que n .

3 En dérivant de deux façons la relation $f' = -2tf$, démontrer que $P_{n+1} + 2tP_n + 2nP_{n-1} = 0$ et $P_n'' - 2tP_n' + 2nP_n = 0$.

4 Démontrer que P_n est scindé sur \mathbf{R} .

EXERCICE 13

1 Soit $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(t) = e^{-t}/t$.

2 Démontrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ . et qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes telle que $f^{(n)}(t) = P_n(t)e^{-t}/t^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}^*$.

3 Démontrer que

$$P_{n+1}(t) + (t+n+1)P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.$$

4 Démontrer que P_n est scindé sur \mathbf{R} et que ses racines sont toutes strictement négatives.

EXERCICE 14

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^2 .

1 On suppose que f et f'' sont bornées. Démontrer que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

2 On suppose de plus que f est positive; déduire de la question précédente que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

EXERCICE 15

Soit F une fonction continue de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R} telle que l'intégrale impropre $\int_0^\infty F(x) dx$ converge.

1 Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \geq x$ tel que $|F(y)| \leq \varepsilon$. Donner un exemple où $F(x)$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

2 On suppose de plus que F est de classe \mathcal{C}^1 . Démontrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \geq x$ tel que $|F'(y)| \leq \varepsilon$.

- 3 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On suppose que $f \in L^2(\mathbf{R})$ et $f'' \in L^2(\mathbf{R})$. Démontrer que $f' \in L^2(\mathbf{R})$ et que $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|f''\|_2$.

EXERCICE 16

Pour toute application continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, on définit une application $T_n f$ de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} par

$$T_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right).$$

- 1 Démontrer que $\|T_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
- 2 Démontrer que la suite $(T_n f(x))$ converge vers $\int_0^1 f(t) dt$. (La convergence est même uniforme en x .)
- 3 Démontrer qu'il existe une application continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que pour $x \in]0, 1[$, on ait $f(x) = \cot(\pi x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$.
- 4 Démontrer que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, on a

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

EXERCICE 17

Soit $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une application monotone; on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour tout $x \geq 0$. On pose aussi

$$S_n = \sum_{p=1}^n f(p).$$

- 1 On suppose que $F(x)$ a une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$. Démontrer que la suite (S_n) converge.
- 2 On suppose que $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$; démontrer que $S_n \sim F(n)$.
- 3 Pour $x \geq 0$, on pose Expliquer comment l'introduction de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \int_x^{x+1} f(t) dt$ peut améliorer l'équivalent précédent.
- 4 En appliquant la méthode précédente à la fonction donnée par $x \mapsto \log(x)$, démontrer que la suite de terme général $\log(n!) - (n + \frac{1}{2}) \log(n) + n$ converge.
- 5 En déduire qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$ (formule de Stirling). (L'exercice 18 sur les intégrales de Wallis, $\int_0^\pi \sin(x)^n dx$, permet de démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.)

EXERCICE 18

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n dx$ (intégrales de Wallis).

- 1 Démontrer que l'on a $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
- 2 En déduire que

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- 3 En observant que $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$, démontrer que $4n I_{2n} I_{2n-1} \rightarrow \pi$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 4 On rappelle (exercice 17) qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$. Démontrer que $C = \sqrt{2\pi}$.