Préparation à l'agrégation *Année 2015/2016*

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Algèbre linéaire — formes quadratiques et hermitiennes

A. CHAMBERT-LOIR

EXERCICE 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$.

1 Démontrer que l'application $u \mapsto \operatorname{Tr}(u^2)$ est une forme quadratique sur $\operatorname{End}(E)$. Quelle est la forme bilinéaire associée ?

2 Calculer son rang. Lorsque $K = \mathbf{R}$, quelle est sa signature ?

EXERCICE 2

1 Soit E un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) et soit $p \in \operatorname{End}(E)$ un projecteur. Démontrer que $p^* = p$ si et seulement si $\Im(p) = \operatorname{Ker}(p)^\perp$.

2 Soit E et F des espaces vectoriels euclidiens (resp. hermitiens) et soit $u \colon E \to F$ un homomorphisme. Démontrer qu'il existe un unique homomorphisme $v \colon F \to E$ vérifiant les conditions suivantes : $uvu = u$, $vuv = v$, $uv = (uv)^*$ et $vu = (vu)^*$. On le note $u^\sharp$ (*pseudo-inverse de Moore-Penrose* de u).

3 Démontrer que pour tout $y \in F$, on a

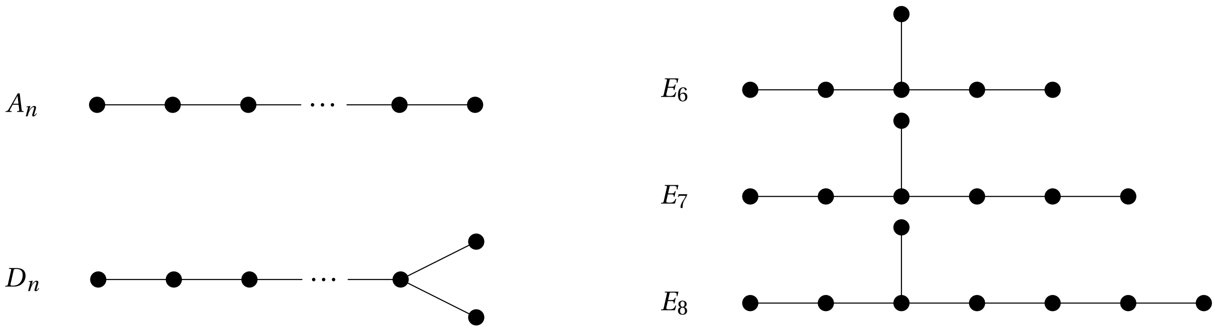
$$\left\| u(u^\sharp(y)) - y \right\| = \inf_{x\in E} \left\| u(x) - y \right\|.$$

EXERCICE 3. — Graphes de Coxeter

Soit G un graphe fini connexe. Soit S l'ensemble de ses sommets et, pour $s, s' \in S$, soit $a_{s,s'}$ le nombre d'arêtes joignant les sommets s et s'. On définit une forme quadratique q_G sur $\mathbf{R}^S$ par

$$q_G((x_s)) = \sum_{s\in S} x_s^2 - \frac{1}{2} \sum_{s,s'} a_{s,s'} x_s x_{s'}.$$

1 On suppose que G est l'un des graphes suivants



Démontrer que q_G est définie positive.

Dans la suite de l'exercice, on suppose inversement que q_G est définie positive.

2 Démontrer que G n'a pas de cycle. (En particulier, il y a au plus une arête entre deux sommets de G et aucune d'un sommet vers lui-même.)

3 On suppose que G n'a pas de sommet de valence $\geqslant 3$; démontrer que G est le graphe A_n (où n est le cardinal de S).

4 On suppose que G a au moins un sommet de valence $\geqslant 3$. Démontrer qu'alors ce sommet est unique, de valence 3.

5 On note p, q, r les longueurs des branches issues du sommet de valence 3, où $p \geqslant q \geqslant r$. Démontrer que $r = 1$ et $q < 3$.

6 Si $q = 1$, démontrer que G est le graphe D_n. Si $q = 2$, démontrer que G est l'un des graphes E_6, E_7, E_8.

EXERCICE 4. — Inégalité d'Hadamard

1 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Déduire de l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique que $0 \leqslant \det(A) \leqslant (\mathrm{Tr}(A)/n)^n$, avec égalité si et seulement si A est scalaire.

2 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$, de colonnes $A_1, \dots, A_n$. Démontrer que $|\det(A)| \leqslant \|A_1\| \dots \|A_n\|$, avec égalité si et seulement si les A_j sont deux à deux orthogonaux. (Supposer d'abord que les colonnes A_j sont unitaires et appliquer la question précédente ; traiter ensuite le cas général.) Interprétation géométrique.

3 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ et soit $M = \sup\limits_{i,j}(|a_{i,j}|)$. Démontrer que $|\det(A)| \leqslant M^n n^{n/2}$.

4 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. En appliquant l'inégalité de Hadamard à une matrice B telle que $A = {}^{\mathrm{t}}BB$, démontrer que $|\det(A)| \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

EXERCICE 5

Soit E un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) et soit q une forme quadratique (resp. une forme hermitienne) sur E.

1 Démontrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est orthonormée, et orthogonale pour q, ainsi qu'une suite croissante $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de nombres réels tels que $q(e_i) = \lambda_i$ pour tout i.

2 Pour tout entier m tel que $0 \leqslant m \leqslant n$, on pose $F_m = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_m)$ et $F^m = \mathrm{vect}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ (de sorte que $F_0 = F^n = 0$ et $F^0 = F_n = E$). Démontrer que $q(x) \leqslant \lambda_m \|x\|^2$ pour tout $x \in F_m$, et que $q(x) \geqslant \lambda_{m+1} \|x\|^2$ pour tout $x \in F^m$.

3 Soit $m \in \{1, \dots, n\}$ et soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension m. En remarquant que $V \cap F^{m-1} \neq 0$, démontrer qu'il existe $x \in V$ tel que $\|x\| = 1$ et $q(x) \geqslant \lambda_m$. En déduire que

$$\lambda_m = \inf_{\substack{V \subset E \\ \dim(V) = m}} \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leqslant 1}} q(x).$$

4 Par la même méthode, ou en considérant la forme $-q$, démontrer que

$$\lambda_m = \sup_{\substack{V \subset E \\ \mathrm{codim}(V) = m-1}} \inf_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leqslant 1}} q(x).$$

Pour tout endomorphisme auto-adjoint u de V, on note $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$ la suite croissante de ses valeurs propres de u.

5 Soit u et v des endomorphismes auto-adjoints de E tels que $v - u$ soit positif. Démontrer que $\lambda_m(u) \leqslant \lambda_m(v)$ pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. En particulier, $\mathrm{Tr}(u) \leqslant \mathrm{Tr}(v)$ et, si u est positif, $\det(u) \leqslant \det(v)$.

6 Soit u et v des endomorphismes auto-adjoints de V. Démontrer que pour tous $m, p \geqslant 0$, on a $\lambda_{m+p}(u + v) \geqslant \lambda_m(u) + \lambda_{p+1}(v)$.

EXERCICE 6

1 Vérifier que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \log(1+e^x)$ sont convexes.
Soit E un espace vectoriel euclidien (ou hermitien) ; on pose $n = \dim(E)$. Soit u et v des endomorphismes de E, autoadjoints et définis positifs.

2 Démontrer que pour tout $s, t \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\det(su + tv) \leqslant \det(u)^s \det(v)^t.$$

3 Démontrer que l'on a

$$\det(u)^{1/n} + \det(v)^{1/n} \leqslant \det(u+v)^{1/n}.$$

EXERCICE 7. — Procédé de Gram-Schmidt et décomposition d'Iwasawa

1 Soit E un espace euclidien ou un espace hermitien. Soit $(v_1, \dots, v_m)$ une suite linéairement indépendante de vecteurs de E. Démontrer qu'il existe une unique suite *orthonormale* $(e_1, \dots, e_m)$ de vecteurs de E vérifiant la condition suivante : pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a $e_i \in \operatorname{vect}(v_1, \dots, v_i)$ et $\langle v_i, e_i \rangle \in \mathbf{R}_+^\times$. (Raisonner par récurrence sur m.)

2 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (Q, A, N) tel que $M = QAN$, où $Q \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$, A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et N est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

3 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (Q, A, N) tel que $M = QAN$, où $Q \in \mathrm{U}(n, \mathbf{R})$, A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et N est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

4 On note D l'espace des matrices diagonales à coefficients réels strictement positifs et T l'espace des matrices triangulaires supérieures (à coefficients réels ou complexes, respectivement) dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 Démontrer que l'application $(Q, A, N) \mapsto QAN$ définit un homéomorphisme de $\mathrm{O}(n, \mathbf{R}) \times D \times T$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, respectivement un homéomorphisme de $\mathrm{U}(n, \mathbf{R}) \times D \times T$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

EXERCICE 8. — Racine carrée d'une matrice symétrique

1 Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice symétrique positive S telle que $M = S^2$. (Commencer par démontrer l'unicité ; pour cela, observer qu'une telle matrice S commute à M puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle M et S sont simultanément diagonalisables. Démontrer alors l'existence.)

2 Soit $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne positive. Démontrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive S telle que $M = S^2$.

3 Démontrer que l'ensemble Ω des matrices symétriques (resp. hermitiennes) définies positives est un ouvert de l'espace V des matrices symétriques (resp. hermitiennes). Démontrer que l'application $S \mapsto S^2$ est un difféomorphisme de Ω sur lui-même. (Prouver qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, vérifier que sa différentielle est inversible en tout point, puis que c'est un homéomorphisme.)

EXERCICE 9. — Décomposition polaire, décomposition de Cartan

1 Soit $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple (Q, S) tel que $M = QS$, où $Q \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ et S est une matrice symétrique définie positive (*décomposition polaire.*)

2 Soit $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ l'espace des matrices symétriques définies positives ; c'est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices symétriques. Démontrer que l'application $(Q, S) \mapsto QS$ réalise un homéomorphisme de $O(n,\mathbf{R})\times P$ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$. (Justifier qu'elle est continue ; pour démontrer que sa réciproque est continue, utiliser le fait que $O(n,\mathbf{R})$ est compact.)

3 Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un triplet (Q,A,Q') tel que $M=QAQ'$, où $Q,Q'\in\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$ et A est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs.

4 Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un unique couple (Q,S) tel que $M=QS$, où $Q\in\mathrm{U}(n,\mathbf{C})$ et S est une matrice hermitienne définie positive (*décomposition polaire*).

5 Interpréter le résultat de la question précédente lorsque $n=1$ et justifier la terminologie de décomposition polaire.

6 Soit $P\subset\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ l'espace des matrices hermitiennes définies positives ; c'est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices hermitiennes. Démontrer que l'application $(Q,S)\mapsto QS$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{U}(n,\mathbf{R})\times P$ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$.

7 Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$. Démontrer qu'il existe un triplet (Q,A,Q') tel que $M=QAQ'$, où $Q,Q'\in\mathrm{U}(n,\mathbf{C})$ et A est une matrice diagonale à coefficients réels strictement positifs (*décomposition de Cartan*).

8 On rappelle que $M\mapsto\mathrm{Tr}(M^*M)^{1/2}$ est une norme hermitienne sur $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$. Soit $M\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ et soit $M=QS$ sa décomposition polaire. Démontrer que $\|M-Q\|$ est la distance de M à $\mathrm{U}(n,\mathbf{C})$. (Traiter d'abord le cas où S est diagonale ; pour en déduire le cas général, utiliser que la norme indiquée est invariante par l'action de $\mathrm{U}(n,\mathbf{C})$.)

EXERCICE 10

Soit k un corps fini (de caractéristique $\neq 2$).

1 Soit $a,b\in k^\times$. Démontrer que l'équation $ax^2+by^2=1$ possède une solution.

2 En déduire que pour toute forme quadratique q sur k^n, il existe $r\in\{1,\dots,n\}$ et $a\in k^\times$ tels que q soit équivalente à la forme donnée par $q(x)=ax_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2$.

3 Soit n un entier naturel. Démontrer que deux formes quadratiques non dégénérées sur k^n sont équivalentes si et seulement si leurs discriminants sont égaux dans $k^\times/k^{\times 2}$.