Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique
(J.-B. Bost, F. Loeser, M. Raynaud, éd.), p. 233–248
Progress in Mathematics, Vol. 187,

15

LA CONJECTURE D'ABHYANKAR I : CONSTRUCTION DE REVÊTEMENTS EN GÉOMÉTRIE RIGIDE

Antoine Chambert-Loir

Introduction

En 1957, S. Abhyankar (cf. [**1**]) a émis la conjecture suivante, qui est maintenant un théorème :

***Théorème* 1 (Conjecture d'Abhyankar).** — *Soit p un nombre premier et soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soit G un groupe fini. Notons $p(G)$ le sous-groupe de G engendré par les p-sous-groupes de Sylow de G, de sorte que $G/p(G)$ est le plus grand quotient de G d'ordre premier à p.*

Soit X^* une courbe algébrique projective lisse connexe de genre g sur k et $X \subset X^*$ la courbe affine complémentaire de r points, avec $r \geqslant 1$. Alors, il existe un revêtement étale connexe galoisien de X de groupe G si et seulement si $G/p(G)$ est engendré par $2g + r - 1$ éléments.

La nécessité de cette condition a été établie par Grothendieck dans SGA 1 [**3**] : s'il existe un revêtement étale connexe de groupe G, il en existe a fortiori un de groupe $G/p(G)$. Comme il a été expliqué à cette conférence [**5**], Grothendieck démontre dans *loc. cit.* que le plus grand quotient d'ordre premier à p du groupe fondamental de X est le même que pour une surface de Riemann de genre g privée de r points, surface dont le groupe fondamental est le groupe libre à $2g + r - 1$ générateurs.

La conjecture d'Abhyankar a été démontrée par Raynaud dans le cas de la droite affine [**7**] et par Harbater dans le cas général [**4**]. Il démontre même un résultat plus précis : *il existe un revêtement étale connexe de X, galoisien de groupe G, qui est modérément ramifié en tous les points de $X^* \setminus X$ sauf un.*

Lorsque X est la droite affine, $g = 0$, $r = 1$ et dire que $G/p(G)$ est engendré par $2g + r - 1 = 0$ éléments équivaut à dire que G est engendré par ses p-sous-groupes de Sylow. Un tel groupe sera qualifié de *quasi-p*. Le premier but de cet exposé est de démontrer le théorème suivant, dû à M. Raynaud [**7**] et qui constitue un « tiers » de sa résolution de la conjecture d'Abhyankar pour la droite affine.

***Théorème* 2 (Raynaud [7], théorème 2.2.3).** — *Soit G un groupe fini, Q un p-sous-groupe de G, $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G, Q_i un sous-groupe de $G_i \cap Q$. On suppose*

– *que G est engendré par Q et les G_i ;*

– *que pour tout $i \in I$, il existe un revêtement étale connexe galoisien de groupe G_i de $\mathbf{A}^1$ tel que Q_i est l'un des groupes d'inertie au-dessus de ∞.*

Alors, il existe un revêtement étale connexe galoisien de groupe G de $\mathbf{A}^1$ tel que Q est l'un des groupes d'inertie au-dessus de ∞.

La démonstration du théorème 2 utilise la géométrie rigide sur le corps local $k((\pi))$ de caractéristique p : on construit le revêtement par *recollement* de revêtements d'ouverts rigides de la droite projective.

Expliquons maintenant comment ce théorème s'insère dans la preuve de la conjecture d'Abhyankar pour la droite affine. Soit donc G un quasi-p-groupe dont on va prouver qu'il est groupe de Galois d'un revêtement étale connexe de la droite affine. Fixons un p-sous-groupe de Sylow S de G et notons $G(S)$ le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes stricts et quasi-p de G dont un p-Sylow est contenu dans S. Par récurrence, tous ces sous-groupes sont groupes de Galois d'un revêtement étale connexe de la droite affine.

– Si $G(S) = G$, le théorème 2 fournit le revêtement cherché.

– Si G contient un p-sous-groupe distingué non trivial, un théorème de Serre (voir [**9**], mais nous démontrerons au § 4 le cas particulier — proposition 4.6 — dont nous avons besoin) nous permet de conclure par récurrence.

– Enfin, si $G(S) \neq G$ et si G n'a pas de p-sous-groupe distingué non trivial, Raynaud utilise une approche totalement différente pour construire le revêtement voulu, fondée sur une étude fine de la ramification des revêtements de courbes semi-stables. Ceci fait l'objet de l'exposé de M. Saidi [**8**] à cette conférence.

Les paragraphes 2, 3 et 4 sont consacrés à la preuve du théorème de Raynaud. Nous exposons enfin au § 5 la démonstration que donne F. Pop de la conjecture d'Abhyankar dans [**6**].

Notations. — Fixons k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On note $R = k[[\pi]]$ et $K = k((\pi))$. La droite affine est notée D ou bien $\mathbf{A}^1$ et ∞ (l'infini) désigne le point qui lui manque dans la droite projective $\mathbf{P}^1$.

Nous noterons les schémas par des lettres italiques X, D, les schémas formels par des lettres sans empattements X, D et les espaces rigides par des lettres scriptes $\mathscr{X}$, $\mathscr{D}$.

Un disque fermé $\mathscr{D}$ de centre x d'un K-espace rigide $\mathscr{U}$ est une partie de $\mathscr{U}$ de la forme $v(T) \geqslant 0$ où T est une uniformisante locale en x. C'est un espace affinoïde dont l'anneau est isomorphe à l'anneau $K\{T\}$ des séries convergentes, fibre générique du schéma formel Spf $R\{T\}$. Son bord est la couronne $\partial\mathscr{D}$ définie par l'équation $v(T) = 0$; c'est un affinoïde d'anneau $K\{T, T^{-1}\}$, fibre générique du schéma formel Spf $R\{T, T^{-1}\}$.

1. Induction

Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, l'induction est le procédé standard pour obtenir un objet muni d'une action de G à partir d'un objet analogue sur lequel H agit.

Dans le cas qui nous intéresse, soit $Y \to X$ un morphisme de schémas. Si H agit sur Y par X-automorphismes, on va construire un X-schéma $\mathrm{Ind}_H^G Y$ sur lequel G agit par X-automorphismes et un X-morphisme H-équivariant $Y \to \mathrm{Ind}_H^G Y$, universel pour ces propriétés. (Autrement dit, on construit un foncteur Ind_H^G des H-X-schémas vers les G-X-schémas adjoint à gauche au foncteur d'oubli des G-X-schémas vers les H-X-schémas.)

Posons $\mathrm{Ind}_H^G Y = (G/H) \times Y$ et définissons $Y \to \mathrm{Ind}_H^G Y$ comme l'identification de Y à la copie $\{1\} \times Y$. L'action de G sur $\mathrm{Ind}_H^G Y$ est définit comme suit. Fixons des représentants $g_i \in G$ (pour $i \in G/H$) de G/H. Si $g \in G$ et $i \in G/H$, il existe $j \in G/H$ et $h \in H$ tels que $gg_i = g_j h$. On fait alors agir g sur $(G/H) \times Y$ par $g \cdot (g_i H, y) = (g_j H, h \cdot y)$. On vérifie que l'on obtient bien une action de G sur Ind_H^G par X-morphismes et que le morphisme $Y \to \mathrm{Ind}_H^G Y$ est H-équivariant. De plus, ce morphisme $Y \to \mathrm{Ind}_H^G Y$ vérifie la propriété universelle.

Il résulte de la propriété universelle que l'induction est transitive : si $H \subset H' \subset G$,

$$\mathrm{Ind}_{H'}^G \mathrm{Ind}_H^{H'} = \mathrm{Ind}_H^G$$

et qu'elle commute au changement de base $X' \to X$. De même, il est clair que si $Y \to X$ est étale, $\operatorname{Ind}_H^G Y$ est étale. On définit de la même manière l'induction d'un morphisme de schémas formels, d'espaces rigides ; les foncteurs (fibre spéciale, fibre générique, algébrisation etc.) entre ces catégories commutent à l'induction.

2. Recollement

Dans ce paragraphe, on explique la démonstration du théorème 2, quitte à repousser les deux points techniques majeurs aux paragraphes ultérieurs.

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 2. Soit donc G un groupe fini, Q un p-sous-groupe de G. Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G — que l'on peut supposer finie — et pour tout i, un sous-groupe Q_i de $Q\cap G_i$ tels que $G = \langle (G_i)_{i\in I}, Q\rangle$. On suppose qu'il existe pour tout i un revêtement étale connexe de la droite affine de groupe G_i et tel que Q_i soit un groupe d'inertie au-dessus de l'infini.

Soit $\mathscr{P}$ la droite projective rigide. On fixe des points $x_i \in \mathscr{P}(K)$ et des coordonnées locales t_i en les x_i de sorte que les disques $\mathscr{D}_i$ définis par $v(t_i) \geqslant -1$ soient disjoints. Soit $\mathscr{D}_i^{(0)}$ le disque rigide défini par $v(t_i) \geqslant 0$. On se donne aussi un point ∞ en-dehors des disques $\mathscr{D}_i$.

Soit pour tout i un k-revêtement $X_i \to D$ étale connexe de groupe G_i, Q_i étant un groupe d'inertie au-dessus de ∞. En vertu de la propriété de relèvement des morphismes étales, il existe un unique revêtement étale $\mathsf{X}_i \to \mathsf{D}$ du disque formel dont la réduction est $X_i \to D$. Par passage à la fibre générique, on obtient un revêtement étale $\mathscr{X}_i^{(0)} \to \mathscr{D}_i^{(0)}$ du disque rigide, connexe de groupe G_i.

***Proposition* 2.1.** — *Si $n \gg 0$, ce revêtement se prolonge en un revêtement étale connexe galoisien de groupe G_i, $\mathscr{X}_i \to \mathscr{D}_i$, du disque $\mathscr{D}_i$ donné par $v(t_i) \geqslant -1/n$.*

Si $\mathscr{C}_i$ désigne la couronne d'équation $v(t_i) = -1/n$, les composantes connexes de $\mathscr{X}_i|\mathscr{C}_i$ sont en bijection naturelle avec les points à l'infini de X_i. En particulier, l'une de ses composantes est un revêtement étale connexe $\mathscr{U}_i$ de $\mathscr{C}_i$ de groupe Q_i.

Cette proposition sera prouvée au paragraphe 3.

Par définition de l'induction, on a alors un isomorphisme

$$\mathscr{X}_i|\mathscr{C}_i = \operatorname{Ind}_{Q_i}^{G_i} \mathscr{U}_i|\mathscr{C}_i. \tag{$*$}$$

***Proposition* 2.2.** — *Il existe un K-revêtement étale connexe $Y \to P$ de groupe Q qui n'est ramifié qu'en les x_i et ∞, dont Q est un des groupes d'inertie au-dessus de ∞ et tel que pour tout i, $Y|\mathscr{C}_i \simeq \mathscr{U}_i|\mathscr{C}_i$.*

Nous prouverons ce résultat au paragraphe 4.

Soit $\mathscr{W} \subset \mathscr{P}$ l'ouvert rigide quasi-compact, complémentaire de la réunion des disques ouverts $v(t_i) > -1/n$ et $\mathscr{Y} = Y|\mathscr{W}$ la restriction de Y à $\mathscr{W}$. Comme Q est un des groupes d'inertie à l'infini dans le revêtement $Y \to P$, Y n'a qu'un point au-dessus de $\infty \in P$ et cela implique que $\mathscr{Y}$ est connexe.

Soit

$$\mathscr{Z}_\infty = \mathrm{Ind}_Q^G\, \mathscr{Y}|\mathscr{W}$$

le revêtement obtenu à partir de $\mathscr{Y}$ par induction de Q à G. Lorsqu'on restreint $\mathscr{Z}_\infty$ à la couronne $\mathscr{C}_i$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}|\mathscr{C}_i &= \mathrm{Ind}_Q^G\, \mathscr{Y}|\mathscr{C}_i \\
&= \mathrm{Ind}_Q^G\, \mathscr{X}_i|\mathscr{C}_i && \text{par construction de } Y \\
&= \mathrm{Ind}_Q^G\, \mathrm{Ind}_{Q_i}^Q\, \mathscr{U}_i|\mathscr{C}_i \\
&= \mathrm{Ind}_{Q_i}^G\, \mathscr{U}_i|\mathscr{C}_i && \text{par transitivité de l'induction} \\
&= \mathrm{Ind}_{G_i}^G\, \mathrm{Ind}_{Q_i}^{G_i}\, \mathscr{U}_i|\mathscr{C}_i \\
&= \mathrm{Ind}_{G_i}^G\, \mathscr{X}_i|\mathscr{C}_i && \text{d'après } (*).
\end{aligned}$$

Autrement dit, si

$$\mathscr{Z}_i = \mathrm{Ind}_{G_i}^G\, \mathscr{X}_i|\mathscr{D}_i,$$

les G-revêtements étales $\mathscr{Z}_i|\mathscr{C}_i$ et $\mathscr{Z}_\infty|\mathscr{C}_i$ coïncident. Comme $(\mathscr{W}, (\mathscr{D}_i)_i)$ est un recouvrement admissible de $\mathscr{P}$ pour la géométrie rigide, on peut définir un G-revêtement étale $\mathscr{Z} \to \mathscr{P}$ en prenant $\mathscr{Z}_\infty$ au-dessus de $\mathscr{W}$ et $\mathscr{Z}_i$ au-dessus des $\mathscr{D}_i$. Ce revêtement n'est ramifié qu'au-dessus de ∞, Q étant l'un des groupes d'inertie.

Comme les $\mathscr{X}_i$ et $\mathscr{Z}_\infty$ sont connexes et comme G est engendré par les G_i et Q, $\mathscr{Z}$ est connexe.

En appliquant le théorème *GAGA rigide* de Kiehl (cf. l'exposé **[2]**), on en déduit un G-revêtement $Z \to P$ de la droite projective sur K qui est connexe et ramifié uniquement au-dessus de ∞. De plus, Q est un des groupes d'inertie au-dessus de l'infini. L'existence de points k-rationnels dans X_i implique que $\mathscr{X}_i^{(0)}$ possède un point K-rationnel. Par suite, $\mathscr{Z}$ et donc Z possèdent un point K-rationnel si bien que Z est géométriquement connexe.

Un tel revêtement $Z \to P$ est un morphisme de présentation finie ; de même, l'action du groupe fini G se traduit par un nombre fini de morphismes de schémas assujettis à quelques conditions de compatibilité. Par suite, il existe une k-algèbre de type fini $\Lambda \subset K = k((\pi))$, une Λ-courbe projective lisse à fibres géométriquement connexes $\mathscr{Z}$ et un G-revêtement fini et plat $\mathscr{Z} \to \mathbf{P}^1_\Lambda$ redonnant $Z \to P$ après extension des scalaires à K.

Quitte à localiser Λ, on peut supposer que Λ est lisse sur k et que le lieu de branchement du revêtement $\mathscr{Z} \to \mathbf{P}^1_\Lambda$ est la section « infini » $\operatorname{Spec}\Lambda \to \mathbf{P}^1_\Lambda$. On peut aussi supposer, quitte à effectuer une extension finie de Λ et éventuellement une localisation supplémentaire, que le lieu de ramification dans $\mathscr{Z}$ est la réunion de sections $\operatorname{Spec}\Lambda \to \mathscr{Z}$ d'images disjointes et que le groupe d'inertie est égal à un conjugué convenable de Q le long de ces composantes.

Comme k est algébriquement clos, on peut enfin choisir un homomorphisme de k-algèbres $\lambda : \Lambda \to k$ et le revêtement $\mathscr{Z}_\lambda \to \mathbf{P}^1$ obtenu par changement de base (spécialisation) est alors étale hors du point à l'infini, connexe et galoisien de groupe G. De plus, Q est un groupe d'inertie au-dessus du point à l'infini.

3. Extension

***Proposition* 3.1.** — *Considérons un revêtement étale connexe $X \to D$ de la droite affine sur k, galoisien de groupe G ; soit Q un groupe d'inertie au-dessus de l'infini. Notons $\mathscr{X} \to \mathscr{D}$ le revêtement étale connexe du disque rigide qui en résulte.*

Pour n assez grand, ce revêtement se prolonge en un revêtement étale connexe galoisien de groupe G, $\mathscr{X}' \to \mathscr{D}'$, du disque $\mathscr{D}'$ donné par $v(t) \geqslant -1/n$.

De plus, toujours pour n assez grand, les composantes connexes de la restriction de $\mathscr{X}'$ à la couronne $\mathscr{C}'$ d'équation $v(t) = -1/n$ sont en bijection naturelle avec les points à l'infini de X. En particulier, si $\mathscr{U}'$ est une telle composante, c'est un revêtement étale connexe de $\mathscr{C}'$ galoisien de groupe Q.

Le revêtement $X \to D$ se prolonge en un revêtement $X^* \to \mathbf{P}^1$ de courbes algébriques lisses sur k. Comme k est infini et parfait, le revêtement $X^* \to \mathbf{P}^1$ est localement monogène. Soit $\Delta = \mathbf{P}^1 \setminus \{0\} \simeq \operatorname{Spec} k[x]$. Il existe ainsi une équation

$$\Phi = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

à coefficients dans $k[x]$ qui décrit le revêtement $X^* \to \mathbf{P}^1$ au voisinage de ∞, c'est-à-dire au-dessus de $\Delta \setminus \Sigma$, pour un ensemble fini de points $\Sigma \subset \Delta$.

Le disque rigide $\mathscr{D}_n$ d'équation $v(t) \geqslant -1/n$ est le recollement du disque standard $\mathscr{D}$ et de la couronne $0 \geqslant v(t) \geqslant -1/n$. On en déduit un modèle formel D_n par recollement du disque formel $\mathsf{D} = \operatorname{Spf} R\{1/x\}$ et de la couronne

$\mathsf{C}_n = \operatorname{Spf} R\{x,y\}/(x^n y - \pi)$. La fibre spéciale de ce schéma formel est constituée d'une droite projective et d'une droite affine de multiplicité n qui se coupent au point ∞ de la droite projective.

Le schéma formel $\operatorname{Spf}(R\{x,y\}/(x^n y-\pi))[z]/\Phi$ est alors fini localement libre sur C_n. Sa restriction au-dessus de $\mathsf{D} \setminus (\{0\} \cup \Sigma)$ est un relèvement formel de X, d'où un isomorphisme canonique avec la restriction de $\mathsf{X} \to \mathsf{D}$. Il en résulte par recollement un schéma formel X_n fini et plat sur D_n.

La fibre générique de ce revêtement formel est un revêtement fini $\mathscr{X}_n \to \mathscr{D}_n$ qui prolonge $\mathscr{X}$. Il est ramifié en un nombre fini de points contenus dans la couronne $v(t) < 0$. Par suite, on obtient un revêtement fini étale de la couronne $v(t) \geqslant -1/n$ pour n assez grand, ce qu'on supposera désormais.

Par construction, l'action de G sur $\mathscr{X}$ s'étend à $\mathscr{X}'$ si bien que le revêtement $\mathscr{X}' \to \mathscr{D}'$ est connexe et galoisien de groupe G.

Il reste à prouver que les composantes connexes de la restriction de $\mathscr{X}_n$ à la couronne $\mathscr{C}_n$ sont en bijection par réduction modulo (π) avec les points à l'infini de X^*. On renvoie pour cela à l'article de Raynaud [**7**], 3.4.10 et 3.4.11, p. 440.

4. Algébrisation

Soit X une K-courbe algébrique projective, lisse et géométriquement connexe. Rappelons qu'un *couple de Runge* sur X est un couple $(U, \mathscr{U})$ formé d'un ouvert U de X et d'un ouvert affinoïde $\mathscr{U}$ de U tel que $X \setminus U$ contienne un point dans chaque composante connexe de $\mathscr{X} \setminus \mathscr{U}$.

***Proposition* 4.1.** — *Soit $(U, \mathscr{U})$ un couple de Runge sur X et*

$$1 \to Q \to G' \xrightarrow{\varpi} G \to 1$$

une suite exacte de groupes finis, Q étant un p-groupe. Soit

– un revêtement étale galoisien $V \to U$ de groupe G, irréductible. Notons $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$ sa restriction à $\mathscr{U}$;

– un revêtement étale galoisien $\mathscr{V}' \to \mathscr{U}$ de groupe G' qui, après passage au quotient par Q, fournit un revêtement isomorphe à $\mathscr{V} \to \mathscr{U}$.

Alors, il existe un revêtement étale irréductible $V' \to U$, galoisien de groupe G' qui redonne $V \to U$ après passage au quotient par Q et isomorphe à $\mathscr{V}'$ au-dessus de $\mathscr{U}$.

Si de plus G' est un p-groupe ou si Q est cyclique, on peut choisir le revêtement de sorte que Q contienne un groupe d'inertie aux points de $X \setminus U$.

On va retraduire cet énoncé en termes de groupes fondamentaux.

Choisissons des points bases $a \in U$ et $a_i \in \mathscr{U}_i$ pour chaque composante connexe de $\mathscr{U}$. Notons Π et Π_i les groupes fondamentaux de U et $\mathscr{U}_i$ relatifs à ces points bases. Une fois choisi un « chemin joignant a_i et a », le morphisme canonique $\mathscr{U}_i \to U$ nous fournit un morphisme continu $\rho_i : \Pi_i \to \Pi$, défini à conjugaison près par un élément de Π.

Si $S = X \setminus U$ et $s \in S$, notons $I_s \subset \Pi$ le sous-groupe d'inertie en s (défini à conjugaison près).

***Proposition* 4.2**. — *Soit $h : \Pi \to G$ un morphisme continu surjectif et pour tout i un morphisme $h'_i : \Pi_i \to G'$ tel que pour tout i, $\varpi \circ h'_i = h \circ \rho_i$. Alors, il existe un morphisme surjectif $h' : \Pi \to G$ et des éléments $q_i \in Q$ tels que pour tout i, $h' \circ \rho_i = \mathrm{Int}(q_i) \circ h'_i$.*

Si de plus G' est un p-groupe ou si Q est cyclique, on peut supposer que pour tout $s \in S$, $h'(I_s)$ contient Q.

On démontre le résultat par dévissage sur Q : on peut supposer que Q est un groupe abélien annulé par p, puis que la représentation de G par automorphismes intérieurs sur Q est irréductible. Le morphisme $h : \Pi \to G$ induit ainsi une action de Π sur Q, d'où un faisceau fini étale M en $\mathbf{F}_p$-vectoriels sur U et la suite spectrale de Cartan–Leray entraîne (voir [**9**], prop. 1, p. 342) que

$$H^1(\Pi, Q) \simeq H^1_{\text{ét}}(U, M).$$

De même, notant toujours M la restriction de M à $\mathscr{U}_i$,

$$H^1(\Pi_i, Q) \simeq H^1_{\text{ét}}(\mathscr{U}_i, M).$$

Admettons provisoirement la proposition suivante.

***Proposition* 4.3**. — *L'homomorphisme canonique*

$$H^1(\Pi, Q) \longrightarrow \bigoplus_i H^1(\Pi_i, Q)$$

est surjectif. Si $Q \neq 0$, son noyau est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Le groupe fondamental d'une courbe affine est de dimension cohomologique $\leqslant 1$ (voir [**9**], prop. 1) et vérifie à ce titre la propriété de relèvement. Il existe ainsi un homomorphisme $\varphi : \Pi \to G'$ tel que $\varpi \circ \varphi = h$ et un autre tel homomorphisme est de la forme $f\varphi$ où $f : \Pi \to Q$ est un 1-cocycle continu de Π dans Q :

$$f(gg')\varphi(gg') = f(g)\varphi(g)f(g')\varphi(g') = f(g)\varphi(g)f(g')\varphi(g)^{-1}\varphi(gg')$$

soit

$$f(gg') = f(g)(g \cdot f(g')).$$

Si f est le cobord $g \mapsto g \cdot q - q$, on a ainsi

$$f(g)\varphi(g) = q^{-1}(g \cdot q)\varphi(g) = q^{-1}\varphi(g)q\varphi(g)^{-1}\varphi(g) = q^{-1}\varphi(g)q = \operatorname{Int}(q^{-1}) \circ \varphi.$$

Pour tout i, $\varphi \circ \rho_i$ et h'_i sont deux relèvements de h_i, d'où un cocycle $f_i : \Pi_i \to Q$. D'après la proposition 4.3, on peut modifier φ de sorte que pour tout i, la classe de f_i dans $H^1(\Pi_i, Q)$ soit nulle, ce qui signifie qu'il existe $q_i \in Q$ tel que $\varphi \circ \rho_i = \operatorname{Int}(q_i)h'_i$.

Si φ n'est pas surjectif, son image est un sous-groupe de G' qui, puisque l'action de G sur Q est irréductible, se projette isomorphiquement sur G. Par suite, $G' \simeq Q \rtimes G$; en particulier, on identifie G à un sous-groupe de G' et φ à la composition de h de de l'injection $G \hookrightarrow G'$.

Soit f un cocycle $\Pi \to Q$. Si $\tilde{\varphi} = f\varphi$ est un relèvement qui n'est pas surjectif, son image est pour la même raison un sous-groupe $H \subset Q \rtimes G$ qui se projette isomorphiquement sur G. Autrement dit, il existe une section $\theta : G \to G'$ de la projection $G' \to G$ tel que $f(g)h(g) = \tilde{\varphi}(g) = \theta(h(g))$. Cela implique que $f(g) = \theta(h(g))h(g)^{-1}$ et la classe de f dans $H^1(\Pi, Q)$ appartient à l'image de $H^1(G, Q)$.

Comme $H^1(G, Q)$ est un groupe fini, la proposition 4.3 nous permet de choisir un cocycle f qui n'appartient pas à l'image de $H^1(G, Q)$, tout en conservant le fait que les classes des f_i sont nulles.

On a ainsi obtenu un relèvement surjectif $h' : \Pi \to G'$ de h tels que pour tout i, $h' \circ \rho_i$ est de la forme $\operatorname{Int}(q_i)h'_i$ pour un élément $q_i \in Q$.

Donnons des indications sur la preuve de la proposition 4.3.

On considère la suite exacte d'Artin–Schreier sur U :

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{G}_a \xrightarrow{\wp} \mathbf{G}_a \to 0$$

où $\wp(x) = x - x^p$. Tensorisons cette suite exacte par M : on obtient une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale

$$0 \to M \to V \xrightarrow{\wp} V \to 0$$

où V est un fibré vectoriel localement libre de rang fini sur u et $\wp$ une application additive étale. Il en résulte que pour tout schéma affine $\operatorname{Spec} A$ au-dessus de U,

$$H^1_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, M) = V(A)/\wp(V(A)) \quad \text{et} \quad H^i_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, M) = 0 \quad \text{si } i > 1.$$

Le morphisme canonique $H^1_{\text{ét}}(U, M) \to H^1_{\text{ét}}(\mathscr{U}, M)$ s'interprète donc comme l'homomorphisme

$$V(U)/\wp(V(U)) \longrightarrow V(\mathscr{U})/\wp(V(\mathscr{U})).$$

Le fait que $(U, \mathscr{U})$ soit un couple de Runge a pour conséquence (analogue du théorème de Runge en géométrie rigide, cf. [**7**], théorème 3.5.2 ainsi que l'exposé [**2**]) que $V(U)$ est dense dans $V(\mathscr{U})$. Or, le théorème des fonctions implicite implique que tout élément « assez petit » de $V(\mathscr{U})$ est l'image par $\wp$ d'un unique élément de $V(\mathscr{U})$. La surjectivité cherchée en résulte.

Soit donc $S = X \setminus U$ et pour $s \in S$, notons $\mathscr{O}_s$ l'anneau local complété du hensélisé strict de X en s et K_s son corps des fractions. On a ainsi une application naturelle

$$H^1_{\text{ét}}(U, M) \to H^1(K_s, M).$$

On se donne un prolongement de V en un fibré vectoriel V^* sur X, ce qui permet de parler de l'ordre du zéro ou du pôle d'une section de V sur U en un point de s. La proposition est visiblement une conséquence du lemme suivant.

***Lemme* 4.4.** — *Pour tout $s \in S$, il existe une section non nulle α de V telle que, notant $\theta_s : k \to H^1_{\acute{e}t}(U, M)$, l'homomorphisme qui associe à $u \in k$ la classe $[u\alpha] \in V(U)/\wp(V(U))$, on ait les propriétés :*

– *l'image de θ_s est contenue dans le noyau de $H^1_{\acute{e}t}(U, M)) \to H^1_{\acute{e}t}(\mathscr{U}, M)$;*

– *si $s' \neq s$, l'image de θ_s dans $H^1(K_{s'}, M)$ est nulle ;*

– *l'image de θ_s dans $H^1(K_s, M)$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.*

Les deux premiers points résultent du théorème des fonctions implicites (pour la topologie π-adique et la topologie définie par la valuation en s respectivement), à condition de choisir une section α assez divisible par π qui a un zéro d'ordre assez grand en tout $s' \neq s$.

Soit K'_s une extension séparable de K_s qui trivialise M. Sur $\mathscr{O}'_s$, on peut alors prolonger V en le fibré vectoriel trivial de rang $\dim V$. Ce prolongement n'est pas forcément compatible avec celui fourni par V^*. Néanmoins, on peut choisir la section α de sorte qu'elle ait un pôle dans cette nouvelle structure entière. Pour prouver le lemme, on peut bien sûr composer θ_s avec l'application canonique $H^1(K_s, M) \to H^1(K'_s, M)$, l'avantage étant que $H^1(K'_s, M) = H^1(K'_s, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\dim M}$ se décrit explicitement à l'aide de la suite exacte d'Artin–Schreier.

***Lemme* 4.5.** — *Soit A un anneau de valuation discrète contenant k, de corps résiduel κ algébriquement clos, F son corps des fractions et $\alpha \in A$ un élément* *de valuation* < 0. *L'image de l'application additive* $k \to F/\wp F$ *donnée par* $u \mapsto [u\alpha]$ *est un* $\mathbf{F}_p$*-espace vectoriel de dimension infinie.*

Notons κ est le corps résiduel de A, de sorte que $A \simeq \kappa[[T]]$ et $F = \kappa((T))$.

On calcule modulo l'image de $\wp$ ce qui permet de supposer que α est égal à sa partie polaire

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j T^{-j}, \quad a_n \neq 0$$

et

$$u\alpha = \sum_{j=1}^{n} u a_j T^{-j}.$$

Si $n = pm$ est multiple de p, on peut remplacer ua_nT^{-n} par $u^{1/p}a_n^{1/p}T^{-m}$. De proche en proche, la classe de $u\alpha$ est la classe d'un élément de la forme

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j T^{-j} + \left(\sum_{i=0}^{r} u^{1/p^i} c_i \right) T^{-n}$$

pour des éléments b_j et $c_i \in F$, les c_i n'étant pas tous nuls et l'entier n premier à p. Il est clair que le « coefficient dominant » $\sum u^{1/p^i} c_i$ détermine $[u\alpha]$. Or, l'application qui associe à u ce coefficient dominant est additive de noyau fini. Son image est ainsi un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension infinie.

Établissons maintenant le complément concernant le sous-groupe d'inertie aux points à l'infini.

Si G' est un p-groupe, comme toute action d'un p-groupe sur un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel non nul admet un vecteur propre, on suppose par dévissage que $Q \simeq \mathbf{F}_p$. De même si Q est cyclique. On raisonne alors par récurrence sur le nombre de points à l'infini. Soit donc $S' \subset S$ et h' un relèvement tel que pour tout $s \in S'$, $Q \subset h'(I_s)$.

Soit maintenant $s \in S \setminus S'$. Si $h'(I_s)$ ne contient pas Q, le fait que $Q \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ implique que $h'(I_s)$ est un relèvement de son image $h(I_s)$ dans G. Le groupe $H^1(h(I_s), M)$ est fini, par exemple parce que M est trivialisé après passage à une extension finie de K_s. D'après le lemme 4.4, il existe donc un cocycle f dont la classe est dans le noyau de l'homomorphisme

$$H^1_{\text{ét}}(U, M) \to H^1_{\text{ét}}(\mathscr{U}, M) \oplus \bigoplus_{s' \in S'} H^1(K_{s'}, M)$$

et dont l'image dans $H^1(K_s, M)$ n'est pas contenue dans le groupe $H^1(h(I_s), M)$. Alors, remplacer h' par fh' préserve toutes les propriétés que l'on voulait pour h' et assure en outre que $h'(I_s)$ contient Q.

Si, dans l'énoncé de la proposition 4.1, on oublie les affinoïdes, la démonstration fournit le résultat suivant, dû à Serre [**9**] lorsque U est la droite affine.

***Proposition* 4.6**. — *Soit $1 \to Q \to G' \xrightarrow{\pi} G \to 1$ une suite exacte de groupes finis, Q étant un p-groupe. Si $V \to U$ est un revêtement étale connexe galoisien de groupe G, il existe un revêtement étale connexe galoisien $V' \to U$ de groupe G' qui redonne $V \to U$ après passage au quotient par Q.*

Si de plus G' est un p-groupe, ou si Q est cyclique, on peut choisir le revêtement de sorte que Q contient un groupe d'inertie aux points de $X \setminus U$.

5. Pop !

Dans ce paragraphe, nous expliquons l'approche de F. Pop pour déduire la conjecture d'Abhyankar (i.e. le théorème d'Harbater) du théorème de Raynaud (i.e. de la conjecture d'Abhyankar pour la droite affine).

On démontre le théorème suivant.

***Théorème* 5.1 (Pop [6], théorème B)**. — *Soit X une courbe affine lisse connexe sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit Q, G', G trois groupes finis et considérons un diagramme*

$$\begin{tikzcd} & & \pi_1(X) \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\ Q \arrow[r, hook] & G' \arrow[r, two heads, "\alpha"] & G \end{tikzcd}$$

d'où un revêtement étale galoisien connexe $X_G \to X$ de groupe G. On suppose que Q est un quotient de $\pi_1(\mathbf{A}^1)$ et que α possède une section, c'est-à-dire un morphisme de groupe s tel que $\alpha \circ s = \mathrm{id}$. Alors, il existe un homomorphisme surjectif $\beta : \pi_1(X) \to G'$ tel que $\gamma = \beta \circ \alpha$, d'où en particulier un revêtement étale galoisien connexe $X_{G'} \to X_G \to X$ de groupe G'.

On déduit de ce théorème la conjecture 1 de la façon suivante. Soit X^* la compactification lisse de X, g le genre de X^*, r le cardinal de $X^* \setminus X$. Soit G un groupe fini dont le plus grand quotient d'ordre premier à p, $G/p(G)$, est engendré par $2g + r - 1$ éléments. D'après Grothendieck [**3**], XIII, 2.2, $G/p(G)$ est groupe de Galois d'un revêtement étale connexe galoisien de X, d'où un homomorphisme surjectif $\gamma : \pi_1(X) \to G/p(G)$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_1(X) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\
p(G) \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads, "\alpha"] & G/p(G)
\end{tikzcd}$$

Comme $\pi_1(X)$ est de dimension cohomologique $\leqslant 1$, il existe un homomorphisme $\beta : \pi_1(X) \to G$ tel que $\gamma = \alpha\beta$, mais β n'est pas forcément surjective. Posons alors

$$G' = G \times_{G/p(G)} \beta(\pi_1(X)) = \big\{(g_1, g_2) \in G \times \operatorname{im}\beta\,;\ \alpha(g_1) = \alpha(g_2)\big\}$$

et soit $\alpha' : G' \to \operatorname{im}\beta$ la seconde projection. L'homomorphisme α' a une section $g_2 \mapsto (g_2, g_2)$ et son noyau, formé des couples $(g_1, 0)$ tels que $\alpha(g_1) = 0$, s'identifie à $p(G)$. D'après le théorème de Raynaud, $p(G)$ est un quotient de $\pi_1(\mathbf{A}^1)$, d'où, par le théorème 5.1, un homomorphisme surjectif $\gamma' : \pi_1(X) \to G'$. Comme la restriction de α à $\operatorname{im}\beta$ est surjective, l'homomorphisme canonique $G' \to G$ est surjective, d'où finalement un homomorphisme surjectif $\gamma : \pi_1(X) \to G$.

Il nous reste à démontrer le théorème de Pop.

***Lemme* 5.2.** — *Il suffit de démontrer le théorème 5.1 sous l'hypothèse que $G' = Q \rtimes G$, G normalisant un p-sous-groupe de Sylow de Q.*

Démonstration. — Soit S un p-sous-groupe de Sylow de Q et N le normalisateur de S dans G'. Si g est un élement de G', $g^{-1}Sg$ est inclus dans Q, donc dans un p-Sylow de Q. Comme ceux-ci sont conjugués, il existe $q \in Q$ tel que $g^{-1}Sg = q^{-1}Sq$, autrement dit, $gq^{-1} \in N$. Par suite, l'homomorphisme $\alpha|_N : N \to G$ est surjectif.

Comme $\pi_1(X)$ est de dimension cohomologique 1, il existe $\gamma' : \pi_1(X) \to N$ tel que $\gamma = \alpha\gamma'$. Soit $N' \subset N$ l'image de $\pi_1(X)$. On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X) \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\
N' \times_G G' \arrow[r, two heads, shift left, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & N' \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[d, two heads] \\
G' \arrow[r, "\alpha"] & G
\end{tikzcd}$$

On remarque que $\ker\beta' = Q \times \{1\}$, $\ker\alpha' = \{1\} \times Q$ et $S' = 1 \times S$ est un p-Sylow de $\ker\alpha'$ normalisé par $\sigma(N')$.

S'il existe une flèche pointillée surjective $\pi_1(X) \to N' \times_G G'$, la composition avec β' nous fournit un homomorphisme surjectif $\pi_1(X) \to G'$ convenable. $\square$

Dans la suite, on suppose ainsi que $G' = Q \rtimes G$, G normalisant un p-Sylow S de Q. On note aussi $H = S \rtimes G$. Comme dans la démonstration du théorème de Raynaud, on se place désormais en géométrie rigide sur le corps $k((\pi))$.

Première étape. — Soit $f : X'^* \to X^*$ un revêtement connexe galoisien de groupe G, étale sur X correspondant à l'homomorphisme surjectif $\pi_1(X) \to G$. Soit $\Sigma = X^* \setminus X$ et $\Sigma' = f^{-1}(\Sigma)$. Pour $x \in \Sigma$, soit $\mathscr{D}_x$ un disque ouvert centré en x dans X^* de sorte que les $\mathscr{D}_x$ soient disjoints. Quitte à diminuer les $\mathscr{D}_x$, on peut supposer que pour tout $x \in \Sigma$, $f^{-1}(\mathscr{D}_x)$ est réunion disjointe de disques centrés en $x' \in f^{-1}(x)$ et que pour tout $g \in G$ tel que $gx' \neq x'$, $g\mathscr{D}_{x'} \cap \mathscr{D}_{x'} = \varnothing$.

Posons alors $\mathscr{U} = \mathscr{X}^* \setminus \bigcup_{x\in\Sigma} \mathscr{D}_x$ si bien que $\mathscr{U}' = f^{-1}(\mathscr{U}) \to \mathscr{U}$ est un revêtement étale connexe d'espaces rigides.

Fixons dans toute la suite un point $\xi \in \Sigma$. On peut choisir un disque assez petit $\mathscr{W}$ centré en un point $\tilde{x}$ de $\mathscr{D}_\xi$ qui est totalement décomposé dans $f^{-1}(\mathscr{W})$ de façon à assurer les propriétés suivantes :

- $\mathscr{W}$ ne rencontre ni ξ ni la couronne $\partial\mathscr{D}_\xi$ qui borde $\mathscr{D}_\xi$;
- on a un isomorphisme $\mathscr{W}' = f^{-1}(\mathscr{W}) \simeq \operatorname{Ind}_1^G \mathscr{W}$.

On pose $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{\tilde{x}\}$, $X_0 = X^* \setminus \tilde{\Sigma} = X \setminus \{\tilde{x}\}$ et $\mathscr{X}_0 = \mathscr{U} \cup \partial\mathscr{W}$. Soit enfin $X_0' = f^{-1}(X_0)$, $\mathscr{X}_0' = f^{-1}(\mathscr{X}_0')$. Les couples $(X_0, \mathscr{X}_0)$ et $(X_0', \mathscr{X}_0')$ sont ainsi des *couples de Runge* sur X^* et X'^*.

Deuxième étape. — Par hypothèse, il existe un revêtement connexe $g : Y^* \to \mathbf{P}^1$, galoisien de groupe Q et ramifié uniquement à l'infini, un groupe de décomposition étant S, quitte à éliminer la ramification modérée supplémentaire à l'aide du lemme d'Abhyankar. (C'est en fait un corollaire du théorème 2.)

Soit $\mathscr{B}_\infty$ un disque ouvert autour de ∞ assez petit afin qu'il existe un point $y \in g^{-1}(\infty)$ et un disque $\mathscr{B}_y$ centré en y tel que :

- le revêtement $\mathscr{B}_y \to \mathscr{B}_\infty$ est connexe galoisien de groupe S dans Q ;
- on a un isomorphisme $g^{-1}(\mathscr{B}_\infty) \simeq \operatorname{Ind}_S^Q \mathscr{B}_y$.

Le complémentaire de $\mathscr{B}_\infty$ est un disque fermé $\mathscr{B}$. On obtient alors un revêtement étale connexe $\mathscr{Y} \to \mathscr{B}$ de groupe Q et un isomorphisme

$$\mathscr{Y}|\partial\mathscr{B} \simeq \operatorname{Ind}_S^Q \partial\mathscr{B}_y|\partial\mathscr{B}.$$

Troisième étape. — Remarquons que $\mathscr{W}$ est isomorphe à $\mathscr{B}$. On peut ainsi définir un revêtement de $\mathscr{X}_0$, étale galoisien de groupe $H = S \rtimes G$, en posant

$$\mathscr{X}_0'' = \operatorname{Ind}_G^H \mathscr{U}' \coprod \operatorname{Ind}_S^H \partial\mathscr{B}_y \longrightarrow \mathscr{U} \coprod \partial\mathscr{W} = \mathscr{X}_0.$$

Si l'on quotiente par l'action de S, on trouve $\mathscr{U}'$ au-dessus de $\mathscr{U}$. Comme G normalise S, on obtient au-dessus de $\partial\mathscr{W}$ le revêtement trivial $\mathrm{Ind}_1^G\,\partial\mathscr{W}$. Autrement dit, le quotient de $\mathscr{X}_0''$ par S est isomorphe au revêtement étale $\mathscr{X}_0' \to \mathscr{X}_0$ induit par le revêtement algébrique $X_0' \to X_0$.

D'après la proposition 4.1 appliquée à l'extension $1 \to S \to H \to G \to 1$, il existe un revêtement étale connexe $X_0'' \to X_0' \to X_0$, galoisien de groupe H isomorphe à $\mathscr{X}_0''$ au-dessus de $\mathscr{X}_0$. De plus, il existe un isomorphisme H-*équivariant* entre la restriction de X_0'' à $\partial\mathscr{W}$ et $\mathscr{X}_0''|\partial\mathscr{W}$. En effet, comme $\partial\mathscr{B}_y$ est connexe, $X_0''|\partial\mathscr{W}$ et $X_0'|\partial\mathscr{W}$ ont le même nombre $[H:S] = \#G$ de composantes connexes et la projection $X_0'' \to X_0'$ induit une bijection entre celles-ci. Comme S agit sur X_0'' au-dessus de X_0', chacune des composantes connexes de $X_0''|\partial\mathscr{W}$ est stable par l'action de S. Il existe ainsi une immersion ouverte et fermée S-équivariante $\partial\mathscr{B}_y \to X_0''|\partial\mathscr{W}$ d'image la composante connexe de $\mathscr{X}_0''|\partial\mathscr{W}$ qui se projette sur la composante connexe $\{1\} \times \partial\mathscr{W}$ de $X_0'|\partial\mathscr{W} = \mathrm{Ind}_1^G\,\partial\mathscr{W}$. Par définition de l'induction, cette immersion se prolonge en un isomorphisme H-équivariant

$$\mathrm{Ind}_S^H\,\partial\mathscr{B}_y \xrightarrow{\sim} X_0''|\partial\mathscr{W}.$$

Dernière étape. — La restriction de X_0'' au complémentaire de $\mathscr{W}$ fournit un revêtement connexe, étale hors de Σ et galoisien de groupe H. Au-dessus de $\mathscr{W}$, on dispose du revêtement étale connexe, galoisien de groupe Q, qu'est $\mathscr{Y}$. On induit ces revêtements de H et Q respectivement au groupe G'. Sur $\partial\mathscr{W}$, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_H^{G'} X_0''|\partial\mathscr{W} &= \mathrm{Ind}_H^{G'}\,\mathrm{Ind}_S^H\,\partial\mathscr{B}_y && \text{par construction de } X_0'' \\
&= \mathrm{Ind}_S^{G'}\,\partial\mathscr{B}_y && \text{par transitivité de l'induction} \\
&= \mathrm{Ind}_Q^{G'}\,\mathrm{Ind}_S^Q\,\partial\mathscr{B}_y && \\
&= \mathscr{Y}|\partial\mathscr{W} && \text{d'après le choix de } \mathscr{B}_y
\end{aligned}$$

si bien qu'on peut recoller ces revêtements en un revêtement analytique rigide de $\mathscr{X}^*$, étale hors de Σ et galoisien de groupe G'. Il est connexe car H et Q engendrent G' et redonne $\mathscr{X}'^*$ après passage au quotient par Q. Il reste à appliquer le théorème *GAGA rigide* de Kiehl puis à spécialiser le revêtement obtenu de $k((\pi))$ à k.

Références

[1] S. S. Abhyankar – « Coverings of algebraic curves », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 825–856.

[2] M. A. Garuti – « Géométrie rigide et géométrie formelle », ces comptes-rendus.

[3] A. Grothendieck – *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Lect. Notes Math., no. 224, Springer-Verlag, 1971.

[4] D. Harbater – « Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves », *Invent. Math.* **117** (1994), p. 1–25.

[5] F. Orgogozo & I. Vidal – « Le théorème de spécialisation du groupe fondamental », ces comptes-rendus.

[6] F. Pop – « Étale Galois covers of affine smooth curves. The geometric case of a conjecture of Shafarevich. On Abhyankar's conjecture », *Invent. Math.* **119** (1995), p. 555–578.

[7] M. Raynaud – « Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar », *Invent. Math.* **116** (1994), p. 425–462.

[8] M. Saïdi – « Abhyankar's conjecture II : the use of semi-stable curves », ces comptes-rendus.

[9] J.-P. Serre – « Construction de revêtements étales de la droite affine en caractéristique p », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), p. 341–346.

Antoine Chambert-Loir, Institut de mathématiques de Jussieu, Boite 247, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 • *E-mail :* `chambert@math.jussieu.fr`