Maryam Mirzakhani
1977-2017

• A. Zorich

« (...), je dirai quelques mots sur toi, mais je ne te gênerai point en insistant avec lourdeur sur ton courage ou sur ta valeur professionnelle. C'est autre chose que je voudrais décrire... Il est une qualité qui n'a point de nom. Peut-être est-ce la "gravité", mais le mot ne satisfait pas. Car cette qualité peut s'accompagner de la gaieté la plus souriante.... »

Antoine de Saint-Exupéry

« You have to ignore lowhanging fruit, which is a little tricky. I am not sure if it is the best way of doing things, actually – you are torturing yourself along the way. But life is not supposed to be easy. »

Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani est décédée le 14 juillet 2017. Moins de trois ans plus tôt, elle recevait la médaille Fields « *pour ses contributions remarquables à la dynamique et à la géométrie des surfaces de Riemann et de leurs espaces de modules* », devenant ainsi la première femme à obtenir cette récompense. Elle était souvent la première. Par exemple, avec son amie Roya Beheshti, elle fut la première fille iranienne à participer aux olympiades internationales de mathématiques. Elle y gagna deux médailles d'or, en 1994 et 1995. Ses hauts faits n'empêchèrent jamais Maryam de rester extrêmement gentille, amicale, modeste, sans jamais se mettre en avant. Si vous la rencontriez à une conférence, vous la preniez à première vue pour une jeune post-doc plutôt que pour une mathématicienne de renommée internationale. Elle travaillait dur, « en gardant profil bas » selon ses propres mots.

Maryam est née et a grandi à Téhéran, dans une famille de quatre enfants. Dans l'une de ses rares interviews (donnée à la demande du Clay Mathematics Institute à la fin de sa bourse de recherche Clay), elle expliquait :

> *Mes parents nous ont toujours soutenus et encouragés. Ce qui comptait pour eux, c'était que nous ayons des professions enrichissantes et satisfaisantes, ils attachaient peu d'importance aux succès, aux distinctions.*

Après avoir passé un concours très sélectif, Maryam est entrée à l'école de jeunes filles Farzanegan à Téhéran. En 1999, une fois ses études prédoctorales terminées à l'université Shariff à Téhéran, elle est partie à l'université d'Harvard, où elle a soutenu sa thèse en 2004. Les résultats qu'elle y démontrait étaient époustouflants aux yeux de tous, y compris de son directeur de thèse C. McMullen : Maryam avait découvert des liens insoupçonnés entre différents problèmes de comptage à première vue complètement différents. En particulier, elle a montré que le comptage des géodésiques fermées simples sur les surfaces hyperboliques est relié au volume de Weil-Petersson des espaces de modules de surfaces hyperboliques à bord. Elle en a déduit une nouvelle preuve de la célèbre conjecture de Witten, initialement démontrée par M. Kontsevich.

La thèse de Maryam Mirzakhani est véritablement remarquable. Les preuves ne sont ni très longues ni particulièrement compliquées. Cependant, Maryam y entremêle ingénieusement différentes idées et techniques récentes provenant de directions variées en dynamique et en géométrie. Lire les trois articles relativement courts issus de sa thèse donne un sentiment euphorique, celui qu'on peut avoir en écoutant son œuvre musicale favorite, en lisant son poète préféré ou en admirant une peinture chère à son cœur. Relire ces articles peut entrer en résonance avec des réflexions que vous entreteniez depuis longtemps, et faire surgir des réponses simples et inattendues. Pour mes collaborateurs et moi-même, cela s'est déjà produit plusieurs fois : les articles de Maryam sont remplis d'idées superbes qui sont encore en train d'être assimilées par la communauté mathématique.

Après avoir soutenu sa thèse de doctorat, Maryam Mirzakhani a reçu une bourse de recherche prestigieuse du Clay Mathematics Institute. [1] Dans l'interview que j'ai déjà mentionnée plus haut, elle commente cette période de sa vie :

> *C'était une belle opportunité pour moi ; j'ai passé la plupart de mon temps à Princeton, ce fut une expérience riche. La bourse Clay me laissait la liberté de réfléchir à des problèmes plus difficiles, de voyager librement, de discuter avec d'autres mathématicien(ne)s. Je pense lentement, il me faut beaucoup de temps avant de pouvoir éclaircir mes idées et avancer. J'ai donc vraiment apprécié de ne pas être pressée pour écrire mes travaux.*

Ce que Maryam appelle « lenteur » est plutôt de la « profondeur », ou une sorte de qualité que Saint-Exupéry ne réussit pas à décrire en un mot. En 2008, alors qu'elle avait 31 ans, Maryam Mirzakhani est devenue professeur à l'université de Stanford, où elle a travaillé depuis lors.

Je voudrais parler d'un des nombreux résultats de Mirzakhani durant cette période, sur le flot des tremblements de terre introduit par Thurston. Étant donnée une géodésique fermée simple sur une surface hyperbolique, on peut couper la surface le long de la géodésique, tordre les deux côtés de la coupure l'un par rapport à l'autre, puis les recoller afin d'obtenir une nouvelle surface hyperbolique. Si l'on a l'imagination de Bill Thurston, on peut même considérer simultanément l'ensemble de toutes les surfaces hyperboliques, de toutes les géodésiques simples (généralisées) sur ces surfaces, et définir un twist global. Pendant de nombreuses années, les propriétés du flot correspondant, appelé flot des tremblements de terre, sont restées mystérieuses. En particulier, on ignorait s'il avait des orbites denses.

Maryam Mirzakhani a découvert à son sujet un lien encore insoupçonné. Elle a réussi à construire un isomorphisme mesuré entre le flot des tremblements de terre de Thurston et un flot beaucoup mieux compris, le flot horocyclique sur l'espace des modules des différentielles quadratiques. Ce théorème a tout de suite eu d'importantes applications ; d'autres n'ont été établies que très récemment, une dizaine d'années plus tard. Je suis sûr que d'autres apparaîtront dans le futur. Les mathématiques sont lentes (dans le même sens que Maryam se traitait de lente).

Si vous avez vu Maryam assister à un exposé dans un grand auditorium, comme au MSRI, vous aurez remarqué qu'elle se tenait toujours debout derrière la dernière rangée de sièges. Ce n'était ni de l'impatience ni de l'extravagance. Je n'ai jamais vu chez Maryam la moindre trace de caprices : elle avait juste de sérieux problèmes de dos, qu'elle ne montrait jamais autrement. Elle dirait plus tard avec ironie que « sérieux » pouvait devenir très relatif.

En plus d'avoir des idées brillantes, Maryam était capable de travailler très dur, comme lorsqu'elle a travaillé sur le théorème de la baguette magique. Du point de vue des systèmes dynamiques, l'espace des modules des différentielles holomorphes peut être considéré comme un « espace homogène avec des complications ». Je cite Alex Eskin, qui connaît très bien les deux aspects : comment la dynamique sur les espaces de modules ressemble à la dynamique homogène, mais aussi comment les difficultés supplémentaires peuvent être très profondes.

Les théorèmes de rigidité, qui incluent et généralisent les théorèmes démontrés par Marina Ratner au début des années 90, expliquent pourquoi la dynamique homogène est si spéciale. (Tristement, Marina Ratner est décédée à peine une semaine avant Maryam). En général, les systèmes dynamiques admettent une multitude de trajectoires curieuses, qui restent dans des parties fractales de l'espace. Elles ne sont pas majoritaires, mais elles sont quand même en très grand nombre. En particulier, cela n'a pas de sens de chercher à classifier toutes les adhérences d'orbites, ou toutes les mesures invariantes, pour la plupart des systèmes dynamiques : il y a toute une jungle de trajectoires exotiques. Dans certains cas, cela engendre une difficulté majeure : même si l'on connaît les propriétés fines des trajectoires issues de presque tout point, il n'y a pas d'algorithme qui permet de vérifier qu'une condition initiale particulière, qui vous intéresse, est générique ou non. Le but de la théorie ergodique est plutôt de répondre à des questions statistiques, mais elle devient impuissante si l'on veut utiliser une condition initiale spécifique.

1. On peut remarquer que trois des quatre récipiendaires de la médaille Fields en 2014 sont des anciens lauréats de cette bourse.

La situation est complètement différente dans le cas de la dynamique homogène. Dans certaines situations favorables, on réussit à démontrer que *n'importe quelle* adhérence d'orbite est un sous-espace homogène sympathique, que *n'importe quelle* mesure invariante est la mesure de Haar correspondante, etc. Ce genre de rigidité permet de fantastiques applications par exemple en théorie des nombres, développées entre autres par J. Bourgain, E. Lindenstrauss, G. Margulis, and T. Tao (pour ne citer que les médaillés Fields dans une liste beaucoup plus longue de mathématiciens remarquables qui travaillent dans ce domaine).

L'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur les espaces de modules de différentielles abéliennes et quadratiques ressemble par certains côtés à une dynamique homogène, mais savoir jusqu'à quel point est resté une question ouverte pendant des décennies. Pour Alex Eskin, qui s'est intéressé à la dynamique dans les espaces de modules après avoir étudié la dynamique homogène, cette question était probablement la plus importante depuis plus de 15 ans. Maryam Mirzakhani a commencé à travailler avec lui sur cette question en 2006, aiguillonnée par les travaux de son directeur de thèse, C. McMullen, qui avait résolu la question dans le cas particulier du genre 2. Après plusieurs années de collaboration, Eskin et Mirzakhani ont obtenu une première grande avancée sur cette question : ils ont classifié les mesures invariantes par $SL(2,\mathbb{R})$. Nous avons insisté pour qu'Alex Eskin annonce ce résultat à la conférence à Bonn durant l'été 2010.

Pour illustrer l'importance de ce théorème, je cite ce qu'Artur Avila en a dit à S. Roberts du *New Yorker* dans un article en mémoire de Maryam :

> *Lorsque j'ai entendu ce résultat, et connaissant ses travaux précédents, j'étais sûr qu'elle serait parmi les favoris pour la médaille Fields en 2014, et je ne pensais pas avoir beaucoup de chances de la recevoir.*

Je ne crois pas que Maryam pensait beaucoup à la médaille Fields à l'époque (quelques années plus tard, lorsqu'elle a reçu le message d'I. Daubechies annonçant que la médaille Fields lui était attribuée, elle a cru que c'était une plaisanterie et l'a ignoré), mais elle savait assurément à quel point ce théorème était important. Ces dernières années, quasiment tous les articles dans mon domaine utilisent le théorème de la baguette magique d'une manière ou d'une autre.

Cependant, Eskin et Mirzakhani ont eu encore besoin de plusieurs années de travail acharné pour étendre leur résultat en démontrant les résultats de rigidité pas seulement pour le groupe entier $SL(2,\mathbb{R})$ de toutes les matrices 2×2 de déterminant 1, mais aussi pour son sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures (qui a la propriété cruciale d'être *moyennable*). La différence peut sembler mineure. Cependant, cette petite modification est décisive pour la version la plus puissante du théorème de la baguette magique. La partie de l'énoncé traitant des adhérences d'orbites a été prouvée vers la fin du projet avec la collaboration d'A. Mohammadi. Un complément important est dû à S. Filip.

Supposons par exemple que l'on étudie un billard dans un polygone rationnel (un polygone dont les angles sont tous des multiples rationnels de π). Quel objet mathématique pourrait être plus simple et concret qu'un triangle rationnel ? Cependant, la seule approche efficace connue pour étudier les billards dans les polygones rationnels se décrit comme suit. En appliquant les symétries par rapport aux côtés du polygone, on le déplie jusqu'à obtenir une surface fermée. Les trajectoires du billard se déplient et forment des lignes droites sans auto-intersection sur cette *surface de translation*. Cette astuce est très simple et classique. On peut ensuite toucher la surface de translation ainsi formée avec la baguette magique du théorème, pour décrire l'adhérence de son orbite sous l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ dans l'espace des modules de toutes les surfaces de translation qui partagent les mêmes caractéristiques combinatoires que notre surface de départ. D'après le théorème de la baguette magique, cette adhérence d'orbite est un orbifold très spécial. Sa géométrie donne énormément d'informations sur le billard initial. Aussi fort que le carrosse-citrouille de Cendrillon, non ?

Un des derniers travaux de Maryam Mirzakhani, en collaboration avec Alex Wright, montre que, tandis que la surface obtenue en dépliant un triangle rationnel a beaucoup de symétries, l'adhérence d'orbite qu'on obtient ci-dessus est souvent aussi grande qu'elle peut l'être : c'est tout l'espace des modules ambiant.

La démonstration du théorème de la baguette magique est un travail titanesque, qui repose sur beaucoup de progrès récents fondamentaux en systèmes dynamiques. La plupart de ces résultats sont sans rapport direct avec les espaces de modules. Je ne comprends toujours pas comment Eskin et Mirzakhani ont réussi à mener cette preuve à bout.

Des difficultés techniques très importantes ont fait surface à chaque étape du projet. Sans parler du fait que, dans les quatre ans entre 2010 et 2014, Maryam a donné le jour à une petite fille, et a réussi à surmonter une première attaque du cancer. Depuis lors, je pensais que Maryam pouvait tout faire.

Je ne peux m'empêcher de raconter une histoire, symbolique à mes yeux. Alors que M. Mirzakhani avait reçu la médaille Fields, la *Gazette* m'avait demandé d'écrire un article sur le théorème de la baguette magique, et de contacter Maryam pour qu'elle me procure une photo d'elle pour illustrer l'article. La photo que j'ai reçue était inattendue pour un article scientifique : une petite fille de trois ans tenait deux ballons aux formes compliquées (des surfaces de Riemann) presque aussi grands que la fillette.

L'image m'a semblé parfaite. Elle représentait exactement la vision que j'avais moi-même de Maryam, j'étais juste surpris qu'elle la propose elle-même. Maryam avait parcouru toute sa vie avec la curiosité et l'imagination naturelles aux enfants, mais malheureusement perdues par la plupart des adultes.

Puis l'email suivant est arrivé : *« Oups, désolée, Anton, je t'ai envoyé une photo de ma fille :) »*. J'avais confondu Anahita et Maryam.

À l'automne 2016, j'ai appris que sa maladie était de retour. Mais je savais aussi que Maryam faisait de son mieux pour rester avec sa fille et sa famille aussi longtemps que possible. Je n'étais pas le seul à penser que Maryam pourrait faire plus que qui que ce soit d'autre. Mais, même en admirant le courage exceptionnel de quelqu'un, on ne peut pas en attendre de miracle. « Une lumière s'est éteinte » a écrit Firouz Naderi en annonçant la mort de Maryam. Ses travaux et sa personnalité ont inspiré et encouragé de nombreuses personnes sur toute la Terre. Des femmes et des hommes. Nous garderons précieusement sa lumière en nous.

Anton Zorich

Anton Zorich est Professeur à l'université Paris Diderot. Ses travaux portent sur la géométrie, la topologie et les systèmes dynamiques et sur les interactions entre ces trois domaines. Il fait également beaucoup de mathématiques expérimentales.