BERNARD TEISSIER

Résultats récents d'algèbre commutative effective

Séminaire N. Bourbaki, 1989-1990, exp. n° 718, p. 107-131.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__107_0>

Séminaire BOURBAKI
42ème année, 1989-90, n° 718

Novembre 1989

RÉSULTATS RÉCENTS D'ALGÈBRE COMMUTATIVE EFFECTIVE

par **Bernard TEISSIER**

Introduction

Beaucoup des résultats fondamentaux de l'algèbre commutative sont des résultats d'existence non effectifs: le théorème de Lasker-Noether affirmant l'existence pour tout idéal I d'un anneau noetherien A d'une décomposition $I = \mathcal{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{Q}_s$ en idéaux primaires, le théorème de normalisation de Noether, etc.. Le problème est de déterminer effectivement, lorsque l'on a des données précises, le cran auquel une suite croissante d'idéaux va stationner, ou bien une décomposition primaire d'un idéal donné, et bien sûr en premier lieu si un élément donné de l'anneau appartient à un idéal donné.

Le premier cadre naturel dans lequel on peut se poser de tels problèmes est celui des idéaux de l'algèbre des polynomes à coefficients dans un corps k dans lequel on sait faire des calculs effectifs, comme c'est le cas si k est une extension finie de son corps premier.

Ces problèmes ont déjà été attaqués au début du siècle, essentiellement au moyen de la théorie de l'élimination, et en ce qui concerne le dernier cité, par Macaulay au moyen de sa théorie des "systèmes inverses" qui est devenue la théorie de la dualité en algèbre et en géométrie algébrique (*cf* [35] et ses références). La donnée consiste en un nombre fini de polynomes, et l'on cherche des renseignements sur la décomposition primaire de l'idéal qu'ils engendrent; nombre des idéaux primaires, degré de leurs générateurs, taille de leurs coefficients, etc...

Soient k un corps et $I = (f_1, \ldots, f_m)$ un idéal de l'anneau de polynomes $k[x_1, \ldots, x_n]$. Etant donné un polynome g dont l'on suppose qu'il est dans I, comment écrire explicitement une relation $g = \sum_{i=1}^{m} g_i f_i$?. Il faut d'abord avoir une borne des degrés en dessous desquels on est sûr trouver des polynomes g_i. Dans le cas où $g = 1$, c'est le problème de l'identité de Bézout. Si D est le plus grand des degrés des polynomes $(f_1, \ldots, f_m)$, la théorie de l'élimination (*cf* [2] p.140, [26], [38],) montre que l'on peut trouver des g_i tels que $\deg g_i f_i \leq \deg g + 2(2D)^{2^{n-1}}$. Lorsque $(f_1, \ldots, f_m)$ est une intersection complète, on sait depuis Macaulay que l'on a une borne en $\deg g + D^m$. Un exemple de Mayr-Meyer ([18], [39]) a mis fin aux espoirs de trouver une borne simplement exponentielle dans le cas général : Ils ont montré comment construire pour tout entier $D \geq 5$, en prenant $n = 10n'$, une famille de $n + 1$ polynomes $f_1, \ldots, f_{n+1}$ engendrant un idéal I qui contient z_1 mais tel que si l'on écrit

$$z_1 = g_1 f_1 + \cdots + g_{n+1} f_{n+1}$$

alors $\max_j(\deg g_j) > (D - 2)^{2^{n'-1}}$. Ceci montre que le problème de l'appartenance est doublement exponentiel en le nombre de variables.

Le problème, analogue, du théorème des zéros effectif est celui de trouver, pour un polynome $g \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_m)}$, des bornes pour s et le degré de polynomes en dessous desquelles on soit sûr de trouver des polynomes $g_1, \ldots, g_m$ tels que $g^s = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i$. Dans le cas homogène, il suffit bien sûr de borner l'entier s.

Des problèmes de cette nature, dans des cas très particuliers, ont joué un rôle important en théorie de la transcendance depuis les travaux de Gel'fond, mais depuis une dizaine d'années, à la suite en particulier des travaux de Nesterenko (*cf* [40]), les spécialistes de la transcendance les ont remis à l'ordre du jour dans les cas les plus généraux (voir [10]).

Ainsi, c'est au travail fondamental (*cf* [12], [13]) de Brownawell que l'on doit de savoir que contrairement au problème de l'appartenance, le théorème des zéros effectif, lui, est simplement exponentiel en le nombre de variables.

D'autre part les recherches de calcul formel et de géométrie algébrique effective ont aussi, depuis une dizaine d'années, fait surgir des problèmes d'effectivité de calculs dans les anneaux de polynomes. En ce qui concerne le calcul formel, mis à part les travaux de Lazard ([32], [33]), et plus récemment de Heintz et ses collaborateurs (*cf* [16], qui donna la première borne simplement exponentielle pour l'identité de Bézout valable sur un corps quelconque, [17] et [19]), l'attention s'était concentrée sur les calculs de bases standard d'idéaux, qui sont des systèmes de générateurs très particuliers permettant de décider effectivement par un algorithme de division de l'appartenance d'un élément à l'idéal qu'ils engendrent. Mais il semble que pour le moment ces méthodes "trop générales" ne savent pas distinguer entre les problèmes, comme celui de l'appartenance, qui sont doublement exponentiels, et les problèmes, comme ceux dont il est question ici, qui sont simplement exponentiels. Je ne parlerai pas ici de bases standard et renvoie le lecteur à [44] pour un panorama récent de cet aspect. De même, je renvoie à [17] et [25] pour les liens avec le calcul formel, et suis obligé de passer sous silence d'autres jolis résultats, comme la version effective du théorème de Serre-Quillen-Souslin sur les modules projectifs sur un anneau de polynomes ([19]).

On va considérer d'abord le cas "géométrique", où l'on ne retient des polynomes, outre le nombre des variables, que leur degré, alors que des calculs effectifs nécéssitent de considérer aussi la taille de leurs coefficients, ce dont nous nous occuperons ensuite, d'abord par des méthodes analytiques dues à Berenstein et Yger puis par des méthodes algébriques dues à Philippon.

Je remercie Daniel Bertrand, André Galligo, et Joos Heintz pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la préparation de ce texte.

§1 La géométrie

1. Le résultat

Soit k un corps. Posons $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ et soit $I = (f_1, \ldots, f_m)$ un idéal de R engendré par des polynomes homogènes; posant $d_i = \mathrm{degf}_i$, ordonnons les générateurs de telle façon que l'on ait $d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_m \geq d_1 > 0$, et notons μ l'entier $\min(m,n)$. Le résultat de Kollár ([29]) raffiné par Brownawell ([11]) s'énonce comme la version effective suivante de l'égalité $\sqrt{I} = \mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_r$:

Théorème 1.- *Supposons $d_i \geq 3$ pour $i > 1$ et soient $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_r$ les idéaux premiers minimaux associés à l'idéal $I = \mathcal{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{Q}_s$. Il existe des entiers e_i tels que l'on ait*

$$\mathcal{P}_1^{e_1} \ldots \mathcal{P}_r^{e_r} \subset I$$

et

$$\sum_{i=1}^{r} e_i \leq d_1 \ldots d_\mu .$$

Lorsque $(f_1, \ldots, f_m)$ est une intersection complète, d'après un théorème de Macaulay ([37]), toutes les composantes de la variété projective définie par I sont de la même dimension $n-m$, il n'y a pas de composantes immergées et il résulte alors très facilement du théorème de Bézout que l'on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{long}\mathcal{Q}_i \mathrm{deg}\mathcal{P}_i = d_1 \ldots d_m$$

où $\mathrm{long}\mathcal{Q}_i$ désigne la longueur dans l'anneau local $R_{\mathcal{P}_i}$ de l'idéal engendré par $\mathcal{Q}_i$, c'est-à-dire la longueur du $R_{\mathcal{P}_i}$-module $R_{\mathcal{P}_i}/\mathcal{Q}_i R_{\mathcal{P}_i}$; c'est la multiplicité avec laquelle la composante correspondant à l'idéal $\mathcal{P}_i$ intervient dans l'intersection des m hypersurfaces $f_i = 0$ dans $\mathbf{P}^n$. L'entier $\mathrm{deg}\mathcal{P}_i \geq 1$ est le degré de la variété projective correspondant à $\mathcal{P}_i$. Il n'est pas difficile de vérifier (*cf* [11]) que l'on a $\mathcal{P}^{\mathrm{long}\mathcal{Q}_i} \subset \mathcal{Q}_i$ et on a donc, en posant $e_i = \mathrm{long}\mathcal{Q}_i$ les inclusions $\mathcal{P}_1^{e_1} \ldots \mathcal{P}_r^{e_r} \subset \mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_r \subset \mathcal{Q}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{Q}_r = I$ et le résultat dans ce cas, sans hypothèse sur les degrés. La difficulté dans le cas général vient des intersections non propres des hypersurfaces, qui détruisent l'équidimensionalité et surtout font apparaître des composantes immergées. L'idée de la démonstration est, après avoir, comme dans [11], par des combinaisons linéaires générales n'affectant pas trop les degrés remplacé la suite de polynomes donnée par une suite $(h_1, \ldots, h_l)$ aussi proche que possible d'une intersection complète, de construire l'idéal en ajoutant une fonction après l'autre, en examinant à chaque pas les nouvelles composantes immergées qui apparaissent. Une construction voisine apparait dans la démonstration du théorème de Bézout général due à W. Vogel ([49]). L'idée de Kollár est de borner la méchanceté des composantes immergées à chaque étape au moyen d'un argument de cohomologie locale et le point est que cela permet d'obtenir le résultat optimal. Comme nous le verrons, l'hypothèse $d_i \geq 3$ provient de ce que la cohomologie locale naît de suites exactes à trois termes.

1) Préparation de l'idéal.

Rappelons que la hauteur ht$\mathcal{P}$ d'un idéal premier $\mathcal{P}$ d'un anneau A est la longueur d'une suite croissante maximale d'idéaux premiers emboités de A contenus dans $\mathcal{P}$. La hauteur d'un idéal I est la plus petite des longueurs des idéaux premiers associés à I. Lorsque $A = k[x_0, \ldots, x_n]$, la hauteur correspond à la codimension de la sous-variété de l'espace affine (ou projectif si I est homogène) définie par I.

D'après Brownawell ([11]) une suite *assez régulière* d'éléments d'un idéal I d'un anneau A est une suite $(h_1, \ldots, h_l)$ d'éléments de I telle que pour chaque $i, 1 \leq i < l$, si nous notons $\mathcal{B}_i$ l'idéal de A engendré par $(h_1, \ldots, h_i)$, on ait :
a) Si h_{i+1} appartient à un des idéaux premiers isolés associés à $\mathcal{B}_i$, cet idéal premier contient I (et est donc un idéal premier isolé associé à I).
b) Au moins un des idéaux premiers isolés associés à I ne contient pas h_{i+1}.

Lemme 1.- (*cf* [11], lemma 0, [16], prop.3) *Si A est l'anneau $k[x_0, \ldots, x_n]$ des polynomes à coefficients dans un corps k infini et $I = (f_1, \ldots, f_m)$, il existe une suite assez régulière $(h_1, \ldots, h_l)$ d'éléments de I tels que pour $1 \leq i \leq l$ on ait* $\deg h_i = \deg f_{j(i)}$, *où les $j(i)$ sont tous distincts, et telle que l'idéal $\mathcal{B} \subset I$ engendré par les h_i ait les mêmes idéaux premiers isolés que I. De plus, la suite $(h_1, \ldots, h_{\mathrm{ht}I})$ est régulière.*

On prend $h_1 = f_1$ et, supposant avoir construit $(h_1, \ldots, h_i)$, on considère le plus grand entier j tel que, pour tout idéal premier isolé $\mathcal{R}$ de $\mathcal{B}_i$ qui n'est pas associé à I, l'un au moins des éléments $f_j, \ldots, f_m$ n'appartienne pas à $\mathcal{R}$. On choisit une combinaison linéaire assez générale Y des coordonnées x_i n'appartenant à aucun idéal premier $\mathcal{R}$ et la règle de Cramèr montre qu'une combinaison linéaire générale

$$h_{i+1} = f_j + \sum_{k=j+1}^{m} c_k Y^{\deg f_j - \deg f_k} f_k$$

n'appartient à aucun des idéaux $\mathcal{R}$ qui ne sont pas associés à I. Le reste est facile.

Un argument de hauteur montre l'inégalité $l \leq n+1$. Comme le remarque Brownawell, le résultat qu'il démontre avec k infini prouve , par passage à $k[T]$, que le lemme est aussi valable sur un corps fini, et donc que le résultat final est vrai sur tout corps.

2) La cohomologie locale.

Si nous notons D_i le degré de h_i, nous avons $d_2 \geq D_i \geq d_1$ et pour montrer l'inclusion $\mathcal{P}_1^{e_1} \dots \mathcal{P}_r^{e_r} \subset I$ il suffit de montrer $\mathcal{P}_1^{e_1} \dots \mathcal{P}_r^{e_r} \subset (h_1, \dots, h_l)$, mais à cause des différences de degrés, cela ne signifie pas que l'on puisse tout ramener *a priori* au cas où I est engendré par une suite assez régulière.

Nous pouvons supposer que la hauteur de l'idéal I est > 1; sinon les générateurs f_i ont un facteur commun, et il suffit de diviser par ce facteur pour se ramener au cas où la hauteur est > 1; on peut ensuite remultiplier par le facteur commun les deux côtés de l'inclusion du théorème. Fixons une suite assez régulière $(h_1, \dots, h_l)$ dans I, posons $I_0 = (0)$ et définissons par récurrence des idéaux I_i, K_i et E_i par les égalités

$$(I_{i-1}, h_i) = I_i \cap K_i \cap E_i$$

où E_i est la partie immergée d'une décomposition primaire du membre de gauche, K_i désigne l'intersection des idéaux primaires de cette décomposition dont le radical est isolé et contient h_{i+1} (et donc I tout entier par définition des h_i), et enfin I_i est l'intersection des idéaux primaires dont le radical est isolé et ne contient pas h_{i+1}. Puisque par construction h_i n'est dans aucun des idéaux premiers isolés de I_{i-1}, il résulte du théorème de l'idéal principal que l'idéal $I_i \cap K_i$ est pur et de hauteur i (c'est-à-dire que toutes ses composantes ont la même dimension, qui vaut $n-i$), et il en est donc de même de I_i et K_i. Notons que puisque la hauteur de I est > 1, les h_i n'ont pas de facteur commun et $K_1 = A$, et puisqu'une hypersurface n'a pas de composantes immergées, $E_1 = A$. L'idée est de démontrer pour $i = 1, \ldots, \lambda = min(l, n)$ l'inclusion

$$(*) \qquad (K_1^{3^{i-2}} K_2^{3^{i-3}} \ldots K_{i-1}^{3^0})(I_i \cap K_i) \subset (I_{i-1}, h_i)$$

Cela va résulter essentiellement du lemme suivant.
Rappelons que, pour des idéaux I et J tels que $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ et que I soit pur, on note $\mathrm{codim}_I J$ pour $\mathrm{ht}J - \mathrm{ht}I$.

Lemme-clé (Kollár [29], revu par Brownawell [11]).-*Soient R un anneau noetherien de Cohen-Macaulay, I un idéal pur de R et h un élement de R hors de tous les idéaux premiers associés à I. Ecrivons $(I, h) = J \cap E$, où J est la partie d'une décomposition primaire de l'idéal (I, h) dont les idéaux premiers sont minimaux, et E celle dont les idéaux premiers sont immergés. Soit F un idéal réduit contenant J et considérons la cohomologie locale $H_F^*(M)$ des R-modules M.*

Si un idéal N de R annihile les espaces de cohomologie locale de R/I par rapport à F et à $\sqrt{E}$ en degré $< \mathrm{codim}_I F$ et $< \mathrm{codim}_I \sqrt{E}$ respectivement, c'est-à-dire si $N.H_F^i(R/I) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_I F$ et $N.H^i_{\sqrt{E}}(R/I) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_I \sqrt{E}$, alors on a $N^3.H_F^i(R/J) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_J F$ et si l'idéal (I, h) est pur, on a même $N^2.H_F^i(R/J) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_J F$.

Notons d'abord que l'idéal J est pur de hauteur $\mathrm{ht}I + 1$ puisque d'après le théorème de l'idéal principal de Krull, l'idéal $h.R/I$ est de hauteur 1, donc $\mathrm{ht}(I, h) = \mathrm{ht}J = \mathrm{ht}I + 1$. Considérons les suites exactes

$$0 \longrightarrow R/I \xrightarrow{\times h} R/I \longrightarrow R/(I, h) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow J/(I, h) \longrightarrow R/(I, h) \longrightarrow R/J \longrightarrow 0$$

qui donnent naissance aux suites exactes de cohomologie

$$(1) \ldots \to H_F^i(R/I) \longrightarrow H_F^i(R/(I, h)) \longrightarrow H_F^{i+1}(R/I) \to \ldots$$

et

$$(2) \ldots \to H^i_F(J/(I,h)) \longrightarrow H^i_F(R/(I,h)) \longrightarrow H^i_F(R/J) \longrightarrow H^{i+1}_F(J/(I,h)) \to \ldots$$

Puisque N annihile $H^i_F(R/I)$, il résulte de la suite exacte (1) que N^2 annihile $H^i_F(R/(I,h))$ pour $i+1 < \mathrm{codim}_I F$, c'est-à-dire pour $i < \mathrm{codim}_J F$.

Il résulte facilement des définitions que si (I,h) a effectivement des composantes immergées, c'est-à-dire si $E \neq R$, alors $H^0_{\sqrt{E}}(R/I) = 0$ et il en résulte par la première suite de cohomologie que l'on a une injection $H^0_{\sqrt{E}}(R/(I,h)) \to H^1_{\sqrt{E}}(R/I)$. Mais par ailleurs le $R/(I,h)$-module $J/(I,h)$ a pour support $\sqrt{E}$ et par conséquent $J/(I,h) = H^0_{\sqrt{E}}(J/(I,h))$ et ce dernier espace est un sous-module de $H^0_{\sqrt{E}}(R/(I,h))$. Finalement on a une injection de R/I-modules $J/(I,h) \to H^1_{\sqrt{E}}(R/I)$. Puisque $\mathrm{codim}_I\sqrt{E} > 1$, d'après l'hypothèse N annule $H^1_{\sqrt{E}}(R/I)$ et donc aussi $J/(I,h)$ ainsi que tous ses groupes de cohomologie. La suite exacte (2) nous montre que du fait que N^2 annihile les groupes $H^i_F(R/(I,h))$ pour $i < \mathrm{codim}_J F$ et que N annule tous les $H^j_F(J/(I,h))$ il résulte que $N^3.H^i_F(R/I) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_J F$. Si (I,h) est pur alors $J/(I,h)$ est nul ainsi que tous ses groupes de cohomologie, et en fait $N^2.H^i_F(R/I) = 0$ pour $i < \mathrm{codim}_J F$.

Corollaire.- *Pour tout entier $i \leq \mu = \min(m,n)$ l'idéal $N_i = K_1^{3^{i-1}} K_2^{3^{i-2}} \ldots K_i$ annihile les groupes de cohomologie locale $H^j_F(R/I_i)$ pour $j < \mathrm{codim}_{I_i} F$.*

On raisonne par récurrence sur i; pour $i = 1$, l'idéal $I_1 = (h_1)$ est contenu dans un idéal intersection complète de hauteur $htF = 1 + \mathrm{codim}_{I_1} F$ contenu dans F et d'après la seconde propriété fondamentale de la cohomologie locale tous les groupes de cohomologie $H^j_F(R/I_1)$ sont nuls pour $j < \mathrm{codim}_{I_1} F$. Ensuite on utilise le lemme-clé avec $I = I_{i-1}$, $f = h_i$, $J = I_i \cap K_i$. Puisque la multiplication par K_i annihile $I_i/I_i \cap K_i$ et par conséquent tous ses groupes de cohomologie, la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \longrightarrow I_i/I_i \cap K_i \longrightarrow R/I_i \cap K_i \longrightarrow R/I_i \longrightarrow 0$$

montre que la multiplication par K_i envoie $H^j(R/I_i)$ dans le sous module de $H^j(R/I_i)$ image de $H^j(R/I_i \cap K_i)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $N_{i-1}.H^j_F(R/I_{i-1}) = 0$ pour $j < \mathrm{codim}_{I_{i-1}} F$ et donc par le lemme-clé $N^3_{i-1}.H^j_F(R/I_i \cap K_i) = 0$ pour $j < \mathrm{codim}_{I_i} F$.

En combinant cela avec ce qui précède, on obtient $N^3_{i-1} K_i.H^j_F(R/I_i) = 0$ pour $j < \mathrm{codim}_{I_i} F$, et le résultat.

Une récurrence aisée utilisant le fait que si $E_i \neq R$ on a l'inclusion $(K_i \cap E_i)/(I_{i-1}, h_i) \subset H^1_{\sqrt{E}}(R/I_{i-1})$ donne alors pour $1 \leq i \leq \lambda = \min(l, n)$ l'inclusion de nature géométrique

$$(3) \qquad (K_1^{3^{i-2}} K_2^{3^{i-3}} \dots K_{i-1})(I_i \cap K_i) \subset (I_{i-1}, h_i)$$

et de cette inclusion on déduit, cette fois-ci par une récurrence descendante depuis $\lambda = min(l, n)$ les inclusions

$$(\prod_{j=i-1}^{\lambda} N_{j-1} K_j).I_\lambda \subset (I_{i-1}, h_i, h_{i+1}, \dots, h_\lambda)$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad (K_1^{(\frac{3^{\lambda-1}+1}{2})} K_2^{(\frac{3^{\lambda-2}+1}{2})} \dots K^2_{\lambda-1})(K_\lambda I_\lambda) \subset (h_1, \dots, h_\lambda)\ .$$

3) La fin de la preuve

On termine maintenant à l'aide essentiellement du théorème de Bézout; une récurrence directe donne pour $1 \leq i \leq \lambda = \min(n, l)$ les égalités

$$(5) \qquad \mathrm{deg} I_i + \textstyle\sum_{j=0}^{i} (\mathrm{deg} K_j) D_{j+1} \dots D_i = D_1 . \dots . D_i\ .$$

Montrons maintenant comment l'on conclut la preuve du théorème dans le cas $l \leq n$

On écrit une décomposition primaire de chacun des idéaux K_i, soit $K_i = \bigcap_{\sigma \in S_i} \mathcal{Q}^{(i)}_\sigma$; on pose $\sqrt{\mathcal{Q}^{(i)}_\sigma} = \mathcal{P}^{(i)}_\sigma$ et pour chaque $\mathcal{Q}^{(i)}_\sigma$ il existe un entier $t^{(i)}_\sigma \leq \mathrm{long} \mathcal{Q}^{(i)}_\sigma$ tel que $(\mathcal{P}^{(i)}_\sigma))^{t^{(i)}_\sigma} \subset \mathcal{Q}^{(i)}_\sigma$. En utilisant l'inclusion (4), on obtient puisque $I_l = R$ des entiers $s^{(i)}_\sigma$ tels que l'on ait les inclusions

$$\prod_{i=1}^{l} \prod_{\sigma \in S_i} (\mathcal{P}^{(i)}_\sigma)^{s^{(i)}_\sigma} \subset (K_1^{(\frac{3^{l-1}+1}{2})} K_2^{(\frac{3^{l-2}+1}{2})} \dots K^2_{l-1}) K_l \subset (h_1, \dots, h_l).$$

La première inclusion implique l'inégalité

(6) $\quad \sum_{i=1}^{l} \sum_{\sigma \in S_i} s_\sigma^{(i)} \deg \mathcal{P}_\sigma^{(i)} \leq \sum_{i=1}^{l} (\deg K_i)(\frac{3^{l-i}+1}{2})$

et par ailleurs il faut remarquer que puisque $h_1, \ldots, h_{\mathrm{ht}I}$ est une intersection complète, on a $K_i = R$, donc $\deg K_i = 0$, pour $i < \mathrm{ht}I$. Il résulte de l'égalité (5) que l'on a alors

(7) $\quad \sum_{i=\mathrm{ht}I}^{l} (\deg K_i) D_{i+1} \ldots D_l \leq D_1 \ldots . D_l$

et nous allons montrer l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{\sigma \in S_i} s_\sigma^{(i)} \deg \mathcal{P}_\sigma^{(i)} \leq d_1 \ldots . d_\mu$$

Pour cela, il suffit au vu de (6) et (7) de prouver l'inégalité

(8) $\quad \sum_{i=htI}^{l} (\deg K_i)(\frac{d_1 \ldots . d_\mu}{D_1 \ldots . D_i} - \frac{3^{l-i}+1}{2}) \geq 0$.

Or on a clairement $l \leq \mu$ et les D_i étant les degrés de polynomes $f_{j(i)}$ distincts, on a l'inégalité $d_1 \ldots . d_\mu \geq D_1 \ldots . D_l$ d'où résulte

$$\frac{d_1 \ldots . d_\mu}{D_1 \ldots . D_i} \geq D_{i+1} \ldots . D_l \geq 3^{l-i} \geq \frac{3^{l-i}+1}{2}$$

d'après l'hypothèse $d_j \geq 3$ pour $j > 1$. En fait si l'on voulait se passer de cette hypothèse, on pourrait, en notant κ le nombre des D_i $(1 \leq i \leq l)$ qui sont égaux à 2, utiliser l'inégalité $(\frac{3}{2})^\kappa D_{i+1} \ldots . D_l \geq 3^{l-i}$, et dans le résultat final le produit $d_1 \ldots . d_\mu$ serait affecté d'un facteur $(\frac{3}{2})^\kappa$.

Ainsi nous avons montré, dans le cas $l \leq n$, l'existence d'une famille d'idéaux premiers homogènes $\mathcal{P}_\sigma^{(i)}$ contenant les idéaux premiers isolés de I, et d'une famille d'entiers $s_\sigma^{(i)}$ vérifiant

$$\prod (\mathcal{P}_\sigma^{(i)})^{s_\sigma^{(i)}} \subset (h_1, \ldots, h_l) \subset I$$

et

$$\sum s_\sigma^{(i)} \deg \mathcal{P}_\sigma^{(i)} \leq d_1 \ldots d_\mu$$

donc en particuler

$$\sum s_\sigma^{(i)} \leq d_1 \dots d_\mu \ .$$

Le cas où $l = n + 1$ est analogue et un peu plus compliqué; on utilise la généralisation suivante, due à Kollár et Philippon, d'un résultat de Macaulay (*cf* [37], p.67) et Lazard (*cf* [32]):

Lemme .- *Notons $\mathcal{M}$ l'idéal $(x_0, \dots, x_n)R$. Si h_{n+1} ne s'annule sur aucun des zéros de I_n, alors*

i) Pour $d \geq degI_n - 1$ on a $\mathcal{M}^{D_{n+1}+d} \subset (I_n, h_{n+1})$

ii) Si $(h_1, \dots, h_n)$ est une suite régulière, pour $d \geq \Sigma_{i=1}^n (D_i - 1)$ on a

$$\mathcal{M}^{D_{n+1}+d} \cap (K_n, h_{n+1}) = \mathcal{M}^{D_{n+1}+d} \cap (I_n \cap K_n, h_{n+1})$$

Ici on est essentiellement en dimension zéro, et la démonstration se ramène à un décompte de dimensions d'espaces vectoriels, comme chez Macaulay.

Par une récurrence descendante analogue à celle qui prouve (4), en partant de l'inclusion $\mathcal{M}^{D_{n+1}+d} \subset (I_n, h_{n+1})$, on prouve

$$(9) \qquad (K_1^{(\frac{3^{n-1}+1}{2})} K_2^{(\frac{3^{n-2}+1}{2})} \dots K_{n-1}^2) K_n \mathcal{M}^{D_{n+1}+d} \subset (h_1, \dots, h_{n+1})$$

et on en déduit de la même manière que précédemment l'existence d'une famille d'idéaux premiers homogènes $\mathcal{P}_\sigma^{(i)}$ distincts de $\mathcal{M}$ contenant les idéaux premiers isolés de I, et d'une famille d'entiers $(s_0,\ s_\sigma^{(i)})$ vérifiant

$$\mathcal{M}^{s_0} \prod (\mathcal{P}_\sigma^{(i)})^{s_\sigma^{(i)}} \subset (h_1, \dots, h_l) \subset I$$

et

$$s_0 + \sum s_\sigma^{(i)} \deg \mathcal{P}_\sigma^{(i)} \leq d_1 \dots d_\mu$$

donc en particuler

$$s_0 + \sum s_\sigma^{(i)} \leq d_1 \dots d_\mu \ .$$

Le théorème annoncé en résulte aussitôt.

2. Théorèmes de Bézout et théorème de Hilbert

1) Identité de Bézout et théorème des zéros.

Soient $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ et supposons qu'il n'ont aucun zéro commun dans $\overline{k}^n$. Il résulte du théorème des zéros de Hilbert qu'il existe des polynomes $g_1, \ldots, g_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que l'on ait *l'identité de Bézout*

$$\sum_1^m f_i g_i = 1$$

si en effet on ajoute une variable x_0 et considère les polynomes homogenes $\tilde{f}_i = x_0^{d_i} f_i(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$ ils ont tous leurs zéros communs dans l'hyperplan à l'infini $x_0 = 0$ et donc il existe un entier e et des polynomes homogènes $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m$ tel que l'on ait $x_0^e = \Sigma_{i=1}^m \tilde{f}_i \tilde{g}_i$, d'où le résultat en faisant $x_0 = 1$. Inversement, Rabinowitsch (*cf* [43]) a montré que si l'on connait l'identité de Bézout, on peut en déduire le théorème de Hilbert: si un polynome g s'annule sur tous les zéros communs de $f_1, \ldots, f_m$, on ajoute une variable x_{n+1} et on considère les polynomes $f_1, \ldots, f_m, 1 - x_{n+1}g$; ils n'ont aucun zéro commun dans $\overline{k}^n$, donc on peut écrire $1 = \sum_{i=1}^m f_i g_i + h(1 - x_{n+1}g)$. Én remplaçant x_{n+1} par g^{-1} et en chassant les dénominateurs, on obtient $g^s = \Sigma_{i=1}^m f_i g_i'$, c'est-à-dire le théorème des zéros.

La technique que nous venons d'exposer a permis à Kollár de donner le résultat optimal en ce qui concerne l'identité de Bézout et le théorème des zéros.

Etant donnés un corps k et des entiers positifs $n, d_1, \ldots, d_m$ notons $N_B(k; n, d_1, \ldots, d_m)$ le plus petit entier s tel que pour tout choix de polynomes $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $\deg f_i = d_i$ et sans zéro commun dans $\overline{k}^n$, il existe des polynomes $g_1, \ldots, g_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $\Sigma_1^m f_i g_i = 1$ et $\sup_i(\deg f_i g_i) \leq s$, et notons $N_H(k; n, d_1, \ldots, d_m)$ le plus petit entier s tel que pour tout choix de polynomes *homogènes* $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$ tels que $\deg f_i = d_i$ on ait l'inclusion d'idéaux
$(\sqrt{(f_1, \ldots, f_m)})^s \subset (f_1, \ldots, f_m)$.
Etant donnés des entiers positifs n et $d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_m$, notons $P(n, d_1, \ldots, d_m)$

le nombre défini ainsi:

$$P(n, d_1, \dots, d_m) = \begin{cases} d_1 \dots d_m & \text{si } m \leq n; \\ d_1 \dots d_{n-1}.d_m & \text{si } m > n > 1 \ ; \\ d_1 + d_m - 1 & \text{si } m > n = 1. \end{cases}$$

On étend la définition de $P(n, d_1, \dots, d_m)$ aux suites quelconques d'entiers en rangeant $d_1, \dots, d_m$ par ordre décroissant avant d'appliquer la définition précédente. On a alors

Théorème 2 (Kollár [29]).- *Si tous les d_i sont différents de 2, on a les égalités*

$$N_B(k; n, d_1, \dots, d_m) = N_H(k; n, d_1, \dots, d_m) = P(n, d_1, \dots, d_m).$$

Les inégalités $\leq$ sont essentiellement un corollaire de ce que nous avons vu au paragraphe précédent. Il faut remarquer que puisqu'il s'agit de déterminer en fin de compte si des systèmes d'équations linéaires entre les coefficients ont des solutions, on peut librement faire grossir le corps k et en particulier le supposer algébriquement clos.

Kollár a adapté un exemple de Masser et Philippon pour montrer que les inégalités déduites du paragraphe précédent sont optimales :

Exemple ([29]).-Etant donnés des entiers positifs $n, d_1, \dots, d_n$, considérons les polynomes suivants de $k[x_0, \dots, x_n]$:

$$x_1^{d_1}, x_1 x_n^{d_2 - 1} - x_2^{d_2}, \dots, x_{n-2} x_n^{d_{n-1}-1} - x_{n-1}^{d_{n-1}}, x_{n-1} x_n^{d_n - 1} - x_0^{d_n}$$

Notons f_i le i-ième; il est de degré d_i. Les zéros communs des f_i sont les points de la droite $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$ et un calcul rapide montre que $k[x_0, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n, x_n - 1) \simeq k[x_0]/(x_0)^{\Pi d_i}$. Ainsi x_0 est dans le radical de l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$, mais $(x_0)^{\Pi d_i - 1} \notin (f_1, \dots, f_n)$. En arrangeant les d_i de telle façon que d_n soit le plus petit et ajoutant aux f_i des multiples convenables de f_n, on obtient la borne du théorème pour $m > n$ et en regardant cet exemple avec m variables parmi n, on obtient la borne pour $m < n$. En déshomogeneisant x_0, on obtient la borne pour $N_B(k; n, d_1, \dots, d_m)$.

Il faut remarquer que dans un anneau euclidien il est très facile de démontrer l'identité de Bézout avec de bonnes bornes pour les degrés et la taille des coefficients, et on peut donc espérer que des méthodes de division en dimension quelconque seront utiles. Comme il a été dit, le théorème de division général de Hironaka et l'algorithme de Buchberger (*cf* [44]) ne semblent pas aider pour le moment, mais nous allons voir au paragraphe suivant que l'on peut obtenir par l'analyse des substituts à la division.

2)Théorème de Bézout sur les intersections et théorème de Hilbert.

La théorie des intersections de Vogel dans [49] (voir aussi [48]) associe à l'intersection de $m \leq n$ hypersurfaces V_i de $\mathbf{P}^n$ des sous-variétés réduites $C_1, \ldots, C_t$ de l'intersection $\bigcap_{i=1}^m V_i$ et des entiers $j_b \geq 1$ de telle façon que, posant $d_i = \deg V_i$, on ait $d_1 \ldots d_m = \sum_{b=1}^t j_b \deg C_b$. Du point de vue de Fulton et MacPherson dans [20], il existe des sous-variétés (dites distinguées) $Z_1, \ldots, Z_u$, des entiers $m_1, \ldots, m_u$ et sur chaque Z_c un cycle α_c tels que l'on ait pour le cycle intersection l'égalité $V_1 \cdots V_m = \sum_{c=1}^u m_c \alpha_c$. Ces résultats décrivent l'intersection $\bigcap_{i=1}^m V_i$ par un cycle algébrique, qui coincide avec certaines des composantes de l'intersection au point générique de celles-ci. Au contraire, la version effective du théorème des zéros du No. 1 est vraiment géométrique et pas seulement numérique ou "cycliste", puisqu'elle décrit un sous-schéma et pas un cycle, et que ce sous-schéma contient effectivement, et pas seulement au voisinage de points génériques, l'intersection $\bigcap_{i=1}^m V_i$. On peut donc la voir, en éxagérant un peu, comme un "théorème de Bézout géométrique".

§2 L'analyse

De ce point de vue, l'histoire remonte au problème de la couronne résolu par Carleson et aux généralisations de Hörmander ([27]) et Kelleher-Taylor ([28]).

On se donne un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et une fonction s plurisousharmonique non négative sur Ω. On note $A_s(\Omega)$ l'algèbre des fonctions f analytiques sur Ω et telles qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que l'on ait, pour $z \in \Omega$,

$$|f(z)| \leq C_1 \exp(C_2 s(z))$$

et le problème est de déterminer si des éléments $f_1, \ldots, f_m$ de $A_s(\Omega)$ tels qu'il existe des nombres positifs c_1, c_2 tels que pour $z \in \Omega$ on ait

$$|f_1(z)| + \cdots + |f_m(z)| \geq c_1 \exp(-c_2 s(z))$$

engendrent l'algèbre $A_s(\Omega)$.

Remarquons que la condition est nécessaire, comme on le voit en écrivant

$$1 = \sum_1^m f_i(z) g_i(z)$$

dans $A_s(\Omega)$.

On reprend donc les problèmes du §1 dans cette classe d'algèbres. L'algèbre des polynomes $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ correspond, d'après le théorème de Liouville, au cas $\Omega = \mathbf{C}^n$, $s(z) = \log(1 + \|z\|)$. On trouve dans [7] la motivation suivante:

Un signal, représenté par une distribution σ sur $\mathbf{R}^n$, est analysé par m instruments de mesure, qui sont représentés par m distributions à support compact $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sur $\mathbf{R}^n$, tandis que le résultat de chaque analyse est représenté par la convolution $\gamma_i = \mu_i * \sigma$. Le problème est de reconstituer explicitement σ à partir des γ_i, c'est-à-dire de trouver explicitement des distributions à support compact ν_i telles que l'on ait $\sigma = \sum_{i=1}^m \nu_i * \mu_i * \sigma$; il s'agit donc de résoudre dans l'algèbre de convolution, dont l'unité est la distribution de Dirac δ_0 en 0, l'équation

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^m \nu_i * \mu_i \ .$$

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ établit un isomorphisme entre l'algèbre de convolution des distributions à support compact sur $\mathbf{R}^n$ et l'algèbre $A_s(\mathbf{C}^n)$ où $s(z) = \log(1 + \|z\|) + \|\mathrm{Im} z\|$. Il s'agit donc de résoudre dans cette algèbre de fonctions entières le problème de Bézout

$$1 = \sum_{i=1}^m \mathcal{F}(\nu_i) \mathcal{F}(\mu_i) \ .$$

Plus généralement, on peut se demander si une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $g \in A_s(\Omega)$ appartienne à l'idéal de $A_s(\Omega)$ engendré par $f_1, \ldots, f_m$ est qu'il existe des constantes non négatives c_1, c_2

telles que l'on ait pour $z \in \Omega$, en posant $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $\|f\| = (\sum_1^m |f_i(z)|^2)^{\frac{1}{2}}$, les inégalités

$$|g(z)| \leq c_1 \|f\| \exp(c_2 s(z)).$$

Skoda a démontré dans [47] un théorème très général dans cette direction, qui était d'ailleurs utilisé par Brownawell dans sa démonstration (voir [12] et [14]) d'une identité de Bézout effective pour les polynomes.

Les progrès récents dus à Berenstein et Yger s'appuient sur une formule de représentation qui se substitue à une formule de division pour permettre d'écrire explicitement des solutions de l'équation $g = \sum_{i=1}^m f_i g_i$. Berenstein et Yger commencent par montrer l'existence d'un courant résidu associé à une famille de polynomes $f_1, \ldots, f_n$ définissant une sous-variété discrète de $\mathbf{C}^n$. Ils utilisent le théorème d'Atiyah ([3]) et Bernstein ([9]).

Théorème 3 (Berenstein-Yger [5]).-*Etant données p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et y définissant une intersection complète V, soit ϕ une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{C}^n$ à support compact de type $(n, n-p)$ et $\bar{\partial}$-fermée au voisinage de V. La fonction*

$$\lambda \mapsto \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2\pi i)^p} \int_\Omega \frac{|f_1 \ldots f_p|^{2p\lambda}}{(|f_1|^2 + \cdots + |f_p|^2)^{\frac{1}{2}}} \bar{\partial} f_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\partial} f_p \wedge \phi$$

est méromorphe dans tout le plan complexe. De plus, elle a en $\lambda = 0$ un pôle simple en lequel son résidu est égal à

$$\left\langle \bar{\partial} \frac{1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \bar{\partial} \frac{1}{f_p} \ , \ \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi}{f_1 \ldots f_p}$$

où Γ_ϵ est le cycle analytique réel orienté $(z \in \Omega / |f_1(z)| = \cdots = |f_p(z)| = \epsilon)$.

Supposons donnés m polynomes $(p_1, \ldots, p_m)$ de $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, et quand nous voudrons distinguer les n premiers, notons les $(f_1, \ldots, f_n, p_{n+1}, \ldots, p_m)$ (c'est-à dire que nous noterons, pour $i \leq n$, f_i ou p_i).

Notons $F = f_1 \ldots f_n$, $f^a = f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}$, $\|F\| = (\sum_{i=1}^n |f_i(z)|^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\partial f = \bigwedge_1^n \partial f_i$, $\bar{\partial} f = \bigwedge_1^n \bar{\partial} f_i$ et $df = \bigwedge_1^n df_i$ (dans l'ordre croissant). Supposons que les n premiers d'entre eux satisfont une inégalité à la Łojasiewicz:

Il existe un rayon r et des constantes $c > 0$ et $d \in \mathbf{R}$ telles que pour $\|z\| > r$ on ait

$$(\text{Ł}(d)) \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq c\|z\|^d$$

Par ailleurs, choisissons, pour chaque fonction f_i, n polynomes en $2n$ variables $g_{j,\ell}$ de degré $\leq d_j$ en chaque paquet de variables et tels que l'on ait

$$f_j(z) - f_j(\zeta) \equiv \sum_{\ell=1}^{n} g_{j,\ell}(z,\zeta)(z_\ell - \zeta_\ell)$$

On peut prendre par exemple

$$g_{j,\ell} = \frac{f_j(\zeta_1,\ldots,\zeta_{\ell-1},z_\ell,\ldots,z_n) - f_j(\zeta_1,\ldots,\zeta_\ell,z_{\ell+1},\ldots,z_n)}{z_\ell - \zeta_\ell}$$

Dans ces conditions, étant donné un polynome q appartenant à l'idéal $(f_1,\ldots,f_m)$ et des fonctions holomorphes $u_1,\ldots,u_m$ dans un voisinage Ω de V telles que l'on ait $q = u_1p_1 + \cdots + u_mp_m$ dans Ω, considérons les polynomes en z,ζ définis par

$$W_j(z,\zeta) = \det \begin{pmatrix} g_{1,1}(z,\zeta) & g_{2,1}(z,\zeta) & \ldots & g_{n,1}(z,\zeta) & g_{j,1}(z,\zeta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1,n}(z,\zeta) & g_{2,n}(z,\zeta) & \ldots & g_{n,n}(z,\zeta) & g_{j,n}(z,\zeta) \\ f_1(z)-f_1(\zeta) & f_2(z)-f_2(\zeta) & \ldots & f_n(z)-f_n(\zeta) & p_j(z) \end{pmatrix}$$

Notons $a + \underline{1} = (a_1+1,\ldots,a_n+1)$ et $\bar\partial \frac{1}{f^{a+\underline{1}}} = \bar\partial \frac{1}{f_1^{a_1+1}} \wedge \ldots \wedge \bar\partial \frac{1}{f_n^{a_n+1}}$.

On a alors le

Théorème 4 (Berenstein-Yger [5]).- *Posons $D = \max_{1\leq j\leq n} \deg f_j$ et soit d l'exposant apparaissant dans l'inégalité (Ł(d)). Si r est un entier tel que $dr > \deg q + (n-1)(2D-1) + 1$, on a l'identité*

$$\text{(B-Y)} \quad q(z) = \sum_{|a|\leq r-n} \left\langle \bar\partial \frac{1}{f^{a+\underline{1}}(\zeta)} \ , \ \sum_{j=1}^{m} u_j(\zeta) W_j(z,\zeta) d\zeta \right\rangle f^a(z)$$

On vérifie que ceci donne bien une identité de Bézout $q = \sum_1^m A_i p_i$. Le seul terme qui pose un problème est le terme en $a = 0$, mais on développe les déterminants W_j et on utilise le fait que le courant résidu $\overline{\partial}\frac{1}{f}$ annule le sous-module $(f_1, \ldots, f_n)\Omega^{n,0}$ du module $\Omega^{n,0}$ des n-formes différentielles de type $(n, 0)$.

La convergence des intégrales est assurée par (Ł(d)) et le nombre d qui y apparaît est borné en fonction des données au moyen du résultat suivant, qui est une amélioration due à Kollár d'un résultat de Brownawell.

Proposition (Kollár, (*cf* [29]) *Soient* $p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *des polynomes n'ayant qu'un nombre fini de zéros communs dans* $\mathbf{C}^n$*; posons* $d_i =$ degp_i *et supposons* $n \geq 2$. *Alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour* $\|z\|$ *assez grand on ait*

$$\max_i(\|z\|^{-d_i}|p_i(z)|) \geq C\|z\|^{-P(n,d_1,\ldots,d_m)}$$

La démonstration consiste à utiliser le fait que le problème est local au voisinage des points à l'infini, et se ramène donc à prouver que si $p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, avec $m \leq n$ sont des polynomes dont les zéros communs sont contenus dans $x_1 = 0$, alors près de l'origine on a pour une constante $C' > 0$

$$\max_i |p_i(z)| \geq C'|x_1|^{\Pi d_i}.$$

Kollár remarque qu'il suffit de vérifier qu'une au moins des fonctions $p_i \circ \pi$ s'annule avec un ordre $< \Pi d_i$ le long de chaque composante du diviseur exceptionnel de l'éclatement $\pi \colon Z \to \mathbf{C}^n$ de l'idéal engendré par les p_i, et cela résulte d'un simple argument de degré.

Le miracle est que cette identité (B-Y) d'apparence fort compliquée permet de borner les degrés et , si l'on est parti de polynomes à coefficients dans $\mathbf{Z}$, la taille des coefficients de l'identité de Bézout.

Etant donné un polynome $p(z) = \sum p_\alpha z^\alpha \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, on appelle hauteur (*) de p le nombre $\mathrm{H}(p) = \mathrm{Max}_\alpha |p_\alpha|$ et hauteur logarithmique le nombre $\mathrm{h}(p) = \log\mathrm{H}(p)$. Il faut remarquer qu'une borne sur les degrés

(*) cette notion de hauteur, qui s'étend aux idéaux, (*cf* [40], [41]) est sans rapport avec celle que nous avons utilisée au §1; le mot *taille* serait préférable, mais telle est malheureusement la terminologie reçue.

dans l'identité de Bézout implique par l'algèbre linéaire une borne sur les hauteurs, mais cette borne est bien mauvaise; elle est en $c(n)D^{n^2}(h+\log m+n^2\log D)$. La méthode de Berenstein et Yger donne le

Théorème 5 (Berenstein-Yger [5]).- *Soient $p_1,\dots,p_m$ des polynomes de $\mathbf{Z}[x_1,\dots,x_n]$ tous de degré $\leq D$ et tels que $\mathrm{h}(p_j)\leq h$ $(1\leq j\leq m)$, et sans zéro commun dans $\mathbf{C}^n$. Il existe un entier δ et des polynomes $g_1(z),\dots,g_m(z)\in\mathbf{Z}[x_1,\dots,x_n]$ tels que l'on ait*

$$\delta=\sum_1^m f_j(z)g_j(z)$$

et pour tout j

$$\deg g_j\leq 10(n+1)^5(2D+1)^{2n},$$

$$\mathrm{h}(g_j(z))\leq\kappa(n)D^{9n+3}(h+\log m+D\log D)$$

$$\log\delta\leq\kappa(n)D^{9n+3}(h+\log m+D\log D)$$

où $\kappa(n)$ est une constante effective.

On prend $\Omega=\mathbf{C}^n$. La borne sur les degrés se voit directement sur (B-Y), mais les bornes sur les hauteurs sont bien plus délicates. Berenstein et Yger utilisent une version effective du théorème de normalisation de Noether pour préparer de meilleurs p_i et le point est qu'au bout du compte il suffit de trouver une borne pour le p.g.c.d. des dénominateurs des nombres rationnels

$$\left\langle\bar\partial\frac{1}{f^{a+\underline{1}}(\zeta)},\frac{\zeta^b d\zeta}{f_{n+1}(\zeta)}\right\rangle,\ |b|\leq 3(n+1)^2(2D+1)^n,\quad |a|\leq r-n$$

où f_{n+1} est un nouveau générateur bien choisi et à hauteur controlée pour l'idéal $(p_1,\dots,p_m)$.(*)

(*) Dans [8], Berenstein et Yger annoncent obtenir, par un raffinement de leur méthode et en utilisant les résultats de Philippon présentés ci-après, des bornes

$$\deg g_j\leq 10n^2D^n,$$

$$\max(\log\delta,\mathrm{h}(g_1(z)),\dots,\mathrm{h}(g_m(z)))\leq\kappa(n)D^{8n+3}(h+D\log D).$$

§3 L'arithmétique

Philippon se propose de majorer les degrés et la taille des coefficients dans le théorème des zéros dans le cadre plus général des polynomes à coefficients dans un anneau A muni d'une fonction "taille", mais nous nous restreindrons ici au cas de $\mathbf{Z}$. Comme on le fait depuis Nesterenko ([40]), Philippon estime la taille arithmétique de l'idéal engendré par des polynomes homogènes $p_i \in \mathbf{Z}[x_0, \ldots, x_n]$ au moyen des coefficients de la forme de Cayley-Chow associée. Il appelle *rang restreint* d'un idéal $I \subset \mathbf{Z}[x_0, \ldots, x_n]$ la plus petite des hauteurs des idéaux premiers $\mathcal{P}$ associés à I et tels que $x_0 \notin \mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P} \cap \mathbf{Z} = (0)$. On rappelle qu'un élément g d'un anneau A est dit *entier* sur un idéal J de A s'il satisfait une relation algébrique $g^t + a_1 g^{t-1} + \cdots + a_t = 0$ avec $a_i \in J^i$. En géométrie algébrique la dépendance intégrale se traduit par des inégalités valuatives et en géométrie analytique locale par des inégalités de Łojasiewicz (*cf* [36]). L'ensemble des éléments de A qui sont entiers sur J est un idéal, que l'on note $\overline{J}$. Par des méthodes valuatives (donc complètement algébriques), Philippon démontre le résultat suivant:

Théorème 6 (Philippon [41]).- *Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{Z}[x_0, \ldots, x_n]$ des polynomes homogènes de degrés $d_1 \leq d_m \leq \ldots \leq d_2$ et tels que $\mathrm{h}(p_j) \leq h$. On pose $\mu = \min(m, n)$ et $\nu = \min(m, n+1)$. Si l'idéal I engendré par les p_j est de rang restreint $\geq n+1$, il existe un élément $\gamma \in \mathbf{Z}$ tel que*

$$\gamma x_0^{d_1 \ldots d_\mu} \in \overline{I}\ , \text{ et}$$

$$\log\gamma \leq C(n) h d_1 \ldots d_\nu \left(\frac{1}{h} + \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{1}{d_j}\right)\right)$$

où $C(n)$ est effectivement calculable.

Il déduit alors de ([36], Theorem 2.1), qui joue ici le rôle du théorème de Skoda, que *pour tout nombre premier p il existe un entier a_p premier avec p et tel que, posant $q = \gamma x_0^{d_1 \ldots d_\mu}$, on ait*

$$a_p q^{n+2} \in I.$$

Il vient alors assez facilement

Théorème 7 (Philippon [41]).-*Soient* $p_1, \ldots, p_m \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *des polynomes de degrés* $d_1 \leq d_m \leq \ldots \leq d_2$ *et tels que* $\mathrm{h}(p_j) \leq h$. *Si* $p_1, \ldots, p_m$ *n'ont pas de zéro commun dans* $\mathbf{C}^n$. *Il existe un entier* δ *tel que*

$$\log\delta \leq (n+2)C(n)hd_1 \ldots d_\nu(\frac{1}{h} + \sum_{j=1}^{\nu}(\frac{1}{d_j}))$$

et des polynomes $g_1, \ldots, g_m \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *tels que*

$$\delta = \sum_{j=1}^{m} p_j g_j$$

$$\text{avec} \quad \deg(p_j g_j) \leq (n+2)d_1 \ldots d_\mu.$$

L'hypothèse sur les zéros implique que la hauteur réduite est $\geq n+1$. Puisque les a_p sont premiers entre eux dans leur ensemble, le théorème précédent implique, en posant $\delta = \gamma^{n+2}$ et en homogéneisant les polynomes p_j en $\tilde{p}_j$, que l'on a

$$q^{n+2} = \delta x_0^{(n+2)d_1 \ldots d_\mu} \in (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m)$$

On peut donc écrire

$$\delta x_0^{(n+2)d_1 \ldots d_\mu} = \sum_{j=1}^{m} \tilde{g}_i \tilde{p}_i$$

et l'on conclut en faisant $x_0 = 1$. Tout récemment Philippon a donné une démonstration de résultats équivalents par une méthode différente consistant à faire fonctionner sur $\mathbf{Z}$ la démonstration de Kollár revue par Brownawell qui a été exposée au paragraphe 1. Selon sa préférence, (*cf* [42]), la cohomologie locale y est présentée sous la forme de complexes de Koszul, plus maniables lorsqu'il s'agit de surveiller les hauteurs des éléments. Pour le moment, ces méthodes ne donnent pas les bornes sur la hauteur des polynomes g_j qu'obtiennent Berenstein et Yger.

§4 Conclusion

Considérer le résultat du §1 comme un théorème d'intersection géométrique conduit à espérer que le bon cadre pour ce type de problème est la géométrie arithmétique d'Arakelov ([1]), que ces résultats sont les prémices d'une théorie géométrique de l'intersection sur les variétés arithmétiques. Cela permettrait en particulier de remplacer par de la théorie des intersections à la Gillet-Soulé (*cf* [21], [22], [23]) les lourds calculs sur les formes de Cayley-Chow que j'ai cachés (*).

Un thème commun aux trois paragraphes est "résidus et dualité"; au §1, ce thème apparaît dans l'utilisation des propriétés en cohomologie locale des suites (assez) régulières, au §2 il est tout-à-fait explicite, et au §3 il est présent par l'utilisation d'un résultat de [36] qui est une conséquence de la dualité locale de Grothendieck. On peut aussi espérer que les trois approches présentées ci-dessus constituent les prémices d'une résonnance de ce thème en Géométrie d'Arakelov.

Références

[1] S.Ju. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, *Izv. Akad. Nauk. SSSR* **38** (1974), No.6, 1167-1180.

[2] Jean-Marie Arnaudiès, *Elimination et théorie de Galois.* Thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse, Janvier 1989.

[3] Michael Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure and App. Math,* **23**, (1970), 145-150.

[4] David A. Bayer, *The division algorithm and the Hilbert Scheme* , Thèse, Université Harvard, 1982.

[5] Carlos A. Berenstein and Alain Yger, *Effective Bézout identities in* $\mathbf{Q}[z_1, \ldots, z_n]$, Preprint University of Maryland, Sept.1988.

(*) En fait la construction de cette théorie est déjà entamée; voir les prépublications *Hauteurs alternatives* de P. Philippon (Institut Henri Poincaré, 1990) et *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants* de C. Soulé (Institut des hautes Études scientifiques, 1990).

[6] Carlos A. Berenstein and Daniele Struppa, On explicit solutions to the Bézout equation, *Syst. Control Letters* **4** (1984), 33-39.

[7] Carlos A. Berenstein and Alain Yger, Le problème de la déconvolution, *J. Funct. Anal.* **54** (1983), 113-160.

[8] Carlos A. Berenstein and Alain Yger, Une formule de Jacobi et ses conséquences, à paraître dans *Annales sci. E.N.S.*

[9] I.N. Bernstein, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, *Funct. An. Appl.* **6** (1972), 273-285.

[10] Daniel Bertrand, Lemmes de zéros et nombres transcendants, *Séminaire Bourbaki,* exposé No. 652, Nov. 1985. Astérisque No. 145-146, (1987) p.21-44.

[11] W. Dale Brownawell, A prime power version of the Nullstellensatz. Preprint 1989.

[12] W. Dale Brownawell, Bounds for the degree in the Nullstellensatz. *Annals of Math.***126** (1987), 577-591.

[13] W. Dale Brownawell, Bornes effectives pour l'exposant dans le théorème des zéros. *C.R.A.S.*, Paris t.305, série 1 (1987), 287-290.

[14] W. Dale Brownawell, Local diophantine nullstellen inequalities. *J.A.M.S.* **1**, No.2 (1988), 311-322.

[15] W. Dale Brownawell and D.W. Masser, Multiplicity estimates for analytic functions, II, *Duke Math. J.* **47**, No.2, June 1980.

[16] L. Caniglia, A. Galligo, J. Heintz, Borne simple exponentielle pour les degrés dans le théorème des zéros sur un corps de caractéristique quelconque. *C.R.A.S.* , *Paris* **307** (1988), 255-258.

[17] L. Caniglia, A. Galligo, J. Heintz, Some new effectivity bounds in computational geometry. *6th International Conference on applied algebra* (AAECC-6) Springer LNCS No. 357 (1989), 131-151.

[18] Michel Demazure, Le théorème de complexité de Mayr-Meyer, *Géométrie algébrique et applications,*Travaux en cours No.22, Hermann 1987.

[19] Noaï Fitchas et André Galligo: Nullstellensatz effectif et conjecture de Serre, in *Séminaire "Structures algébriques ordonnées"* 1987-88, Université Paris 7.

[20] William Fulton: *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik, Springer 1984.

[21] Henri Gillet and Christophe Soulé: Arithmetic intersection theory. Preprint IHES 1988.

[22] Henri Gillet and Christophe Soulé: Amplitude arithmetique. *CRAS* Paris **307** (1988), 887-890.

[23] Henri Gillet and Christophe Soulé: Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics. A paraître dans Annals of Math.

[24] Alexander Grothendieck, *Local cohomology* (Notes by R. Hartshorne), Springer L.N.M. No. 41, Springer 1967.

[25] J. Heintz, M.-F. Coste-Roy, P.Solernó, On the complexity of semi-algebraic sets. A paraître dans *Proc. IFIP, World Computer congress*, San Francisco 1989.

[26] Greta Hermann, Die Frage der endliche vielen Schritte in der Theorie der Polinomideale, *Math. Ann.* **95** (1926), p.736-788.

[27] Lars Hörmander, Generators for some rings of analytic functions, *Bull. A.M.S.*, **73** (1967), 943-949.

[28] J.J.Kelleher and B.A.Taylor, Finitely generated ideals in rings of analytic functions, *Math. Ann.* **193** (1971), 225-237.

[29] János Kollár, Sharp effective Nullstellensatz. *J.A.M.S.* **1** (1988), 963-975.

[30] János Kollár, A Łojasiewicz-type inequality for Algebraic Varieties, Preprint, University of Utah, 1990.

[31] E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.* **60**, (1905), 20-116, Errata p.607-608.

[32] Daniel Lazard, Algorithmes fondamentaux en algèbre commutative, *Astérisque* No. 38-39.

[33] Daniel Lazard, Algèbre linéaire sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ et élimination, *Bull. S.M.F.* **105** (1977), 165-190.

[34] Monique Lejeune-Jalabert, *Effectivité de calculs polynomiaux*, Cours de DEA, Institut Fourier, 1984-85. A paraître.

[35] Monique Lejeune-Jalabert, Liaison et résidus, *Algebraic Geometry*, Springer LNM No. 961, 1982, p.233.

[36] Joseph Lipman and Bernard Teissier, Pseudo-rational local rings and a theorem of Briançon-Skoda, *Mich. Math. J.* **28** (1981), 97-116.

[37] F.S. Macaulay, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge

tracts in Math. No.19, Cambridge 1916, et Stechert-Hafner, New York 1964.

[38] D.W. Masser and G. Wüstholz, Fields of large transcendance degree generated by values of elliptic functions, *Invent. Math.* **72** (1983), 407-464.

[39] E.W. Mayr and A.R. Meyer, The complexity of the word problems for commutative semi-groups and polynomial ideals, *Adv. in Math.* **46** (1982), 305-329.

[40] Yu.V. Nesterenko, Estimates for the order of zeros of functions of a certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk USSR* **41** (1977)= *Math. USSR Izv.*, **11** (1977), 239-270.

[41] Patrice Philippon, Dénominateurs dans le théorème des zéros de Hilbert, *Prépublications, Institut Henri Poincaré*, 1989. (soumis à Acta arithmetica)

[42] Patrice Philippon, Théorème des zéros effectif d'après J. Kollár, *Problèmes diophantiens*, Publ. Math. Univ. Paris 6, No.88, 1988-89.

[43] J.L. Rabinowitsch, Zum Hilbertschen Nullstellensatz, *Math. Ann.* **102** (1929), p.520.

[44] Lorenzo Robbiano (Ed.) *Computational aspects of commutative algebra*, Academic Press 1989.

[45] Pierre Samuel, *Méthodes d'algèbre abstraite en Géométrie algébrique.* Springer, Ergebnisse der Math. No.4, 1967.

[46] Bernard Schiffman, Degree bounds for the division problem in polynomial ideals, *Mich. Math. Journ.* **36**, (1989), 163-171.

[47] Henri Skoda, Application des techniques L^2 à l'étude des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, *Ann. sci. E.N.S.* **5** (1972), 545-579.

[48] Leendert Van Gastel: *Excess intersections*, Thèse, Université d'Utrecht, 1989.

[49] W. Vogel: *Lectures on results on Bézout's theorem*, Tata Institute Lecture notes, Bombay 1984.

Bernard TEISSIER
D.M.I., École normale supérieure
45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.