BERNARD TEISSIER

Résultats récents sur l'approximation des morphismes en algèbre commutative

Séminaire N. Bourbaki, 1993-1994, exp. n° 784, p. 259-282.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__259_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94 n° 784

RÉSULTATS RÉCENTS SUR L'APPROXIMATION DES MORPHISMES EN ALGÈBRE COMMUTATIVE [d'après André, Artin, Popescu et Spivakovsky]

par **Bernard TEISSIER**

0. INTRODUCTION

On sait bien que pour un système d'équations algébriques en n variables à coefficients entiers, les solutions dont les coordonnées sont des nombres algébriques sont denses parmi les solutions complexes. Si l'on considère des équations algébriques dont les coefficients sont eux-mêmes des polynômes, disons en $z_1, \ldots, z_p$, on peut se demander si parmi les solutions qui sont des séries formelles ou convergentes en $z_1, \ldots, z_p$ celles qui sont algébriques (en un sens convenable) sur l'anneau $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_p]$ des polynômes sont encore denses.
Ce type de question, depuis sa solution affirmative par M. Artin à la fin des années 60, porte le nom d'approximation d'Artin. A la fin des années 70, il est apparu que ces résultats d'approximation étaient des conséquences d'un résultat d'approximation (au sens maintenant de limite inductive) de morphismes réguliers entre anneaux nœthériens par des objets de même nature mais de type fini, ce qui est une sorte de résolution des singularités relatives. Les nombreuses conséquences de ce résultat, démontré par Popescu et André d'une part et Spivakovsky d'autre part, forment le sujet de cet exposé.

1. L'ÉNONCÉ

Soit $\sigma: A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme σ est dit *régulier* s'il est plat et si pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A, la $\kappa(\mathcal{P})$-algèbre $B \otimes_A \kappa(\mathcal{P})$

est géométriquement régulière, où $\kappa(\mathcal{P}) = A_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ est le corps résiduel de $A_{\mathcal{P}}$. Cela veut dire que $B \otimes_A K$ est encore un anneau nœthérien régulier pour toute extension finie K de $\kappa(\mathcal{P})$. Une condition équivalente ([22]) est que pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B la A-algèbre $B_{\mathcal{Q}}$ obtenue de B par localisation soit formellement lisse pour la topologie $\mathcal{Q}$-adique.

Exemples de morphismes réguliers :

– Si A et B sont des corps, un morphisme injectif $A \to B$ est régulier si et seulement si il fait de B une extension séparable de A.

– Le morphisme naturel $A \to \mathbf{S}_A(M)$ de A dans l'algèbre symétrique d'un A-module M est régulier si et seulement si M est un A-module projectif.

– Si l'anneau A est *excellent*, ce qui est le cas des anneaux de la géométrie algébrique ou analytique usuelle, pour tout idéal I de A, l'homomorphisme $A \to \hat{A}$ de A dans son complété I-adique est régulier (*cf.* [22], scholie 7.8.3).

– Pour tout anneau nœthérien excellent A et tout entier n, l'inclusion naturelle $A \hookrightarrow A[[X_1, \ldots, X_n]]$ est un morphisme régulier.

– Le composé de deux morphismes réguliers est régulier et si le composé $\psi \circ \phi$ de deux morphismes entre anneaux nœthériens est régulier, et si ψ est fidèlement plat, alors ϕ est régulier. En particulier, si $k\{X_1, \ldots, X_n\}$ est un anneau de séries convergentes sur un corps valué non discret de caractéristique zéro, il est excellent ([23]) et il résulte de ce qui précède que l'homomorphisme $k[X_1, \ldots, X_n] \to k\{X_1, \ldots, X_n\}$ est régulier.

– Soient k un corps et $(R, \mathbf{m})$ une k-algèbre locale régulière telle que l'homomorphisme naturel $k \to R/\mathbf{m}$ soit séparable. Alors l'inclusion $k \to R$ est un morphisme régulier.

– Soient k un corps de caractéristique zéro algébriquement clos et V une k-algèbre (non nécessairement nœthérienne) qui est un anneau de valuation; le morphisme $k \to V$ est régulier (*cf* le §3 ci-dessous).

– Soit $V \to V'$ un morphisme local entre deux anneaux de valuation discrète. C'est un morphisme régulier si :

- On a $\mathbf{m}_V.V' = \mathbf{m}_{V'}$.
- Le corps des fractions de V' est une extension séparable de celui de V.
- Le corps résiduel de V' est une extension séparable de celui de V.

– Soit K un sous-ensemble de Stein de $\mathbf{C}^d$ compact, connexe, et tel que pour tout sous-ensemble analytique V de $\mathbf{C}^d$ l'intersection $K \cap V$ n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes (par exemple un polycylindre fermé de $\mathbf{C}^d$). Soit A_K l'anneau des fonctions analytiques sur K. L'anneau A_K est nœthérien et de dimension d, et l'homomorphisme naturel $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_d] \to A_K$ est régulier.
(*cf.* [16], Prop. 4.6).

– Soit Ω une variété de Nash compacte, et soit $\mathcal{N}(\Omega)$ l'anneau des fonctions de Nash sur Ω. Son inclusion naturelle $\mathcal{N}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ dans l'anneau des fonctions analytiques réelles sur Ω est un morphisme régulier d'anneaux nœthériens (cf [15]).

Rappelons que le faisceau des fonctions de Nash sur $\mathbf{R}^d$ est défini ainsi:
Pour tout ouvert connexe de $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{N}(U)$ désigne l'anneau des fonctions analytiques réelles sur U qui sont algébriques sur l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_d]$. Etant donné $x \in \mathbf{R}^d$, l'anneau local $\mathcal{N}_x$ des germes de fonctions de Nash en un point est le hensélisé du localisé en ce point de l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_d]$. Une variété de Nash est un espace topologique séparé annelé en anneaux locaux et localement isomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^d$ muni du faisceau des fonctions de Nash.

Régularité et lissité :

Un homomorphisme d'anneaux $A \to C$ fait de C une de A-algèbre de type fini si C est engendré en tant que A-algèbre par un nombre fini d'éléments, ce qui revient à dire que la A-algèbre C est isomorphe à un quotient d'un anneau de polynômes en un nombre fini d'indéterminées à coefficients dans A. Si A est supposé nœthérien, cet idéal est de type fini. Une A-algèbre de type fini $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ est dite *lisse* en un idéal premier $\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}C$ correspondant à $\mathcal{Q}' \in \mathrm{Spec}A[u_1, \ldots, u_n]$ s'il existe un entier r, des polynômes $g_1, \ldots, g_r$ dans l'idéal J dont les images dans $A[u_1, \ldots, u_n]_{\mathcal{Q}'}$ engendrent $JA[u_1, \ldots, u_n]_{\mathcal{Q}'}$ et r indices $i_1, \ldots, i_r$ tels que l'image dans C du déterminant jacobien $\det(\frac{\partial g_i}{\partial u_{i_j}}) \in A[u_1, \ldots, u_n]$ n'appartienne pas à $\mathcal{Q}'$. Si $r = n$, on dit que le morphisme $A_{\mathcal{P}} \to C_{\mathcal{Q}}$ est *étale* , où $\mathcal{P}$ est l'image réciproque de $\mathcal{Q}$ dans A. On sait ([22]) que si C est une A-algèbre de type fini, l'homomorphisme $A \to C$ est lisse (c'est-à-dire lisse en $\mathcal{Q}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathrm{Spec}C$), si et seulement si il est régulier au sens ci-dessus. La différence entre régulier et lisse tient donc dans la condition de finitude, qui permet de donner un *critère jacobien de lissité.*

1.1 Théorème (Popescu [34],[35],[36], Spivakovsky [42]; voir aussi [32] et [5]).– *Soit $\sigma\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux nœthériens. Il est régulier si et seulement si il fait de B une limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses.*

On peut voir (*cf* [8], Lemme 5.2) que l'assertion du théorème est équivalente à l'énoncé suivant :

Pour toute A-algèbre de type fini C et tout A-homomorphisme $s\colon C \to B$, il existe un A-homomorphisme $\lambda\colon C \to D$ de C dans une A-algèbre de présentation finie lisse, et un A-homomorphisme $t\colon D \to B$ tels que $t \circ \lambda = s$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B \\
C = A[u]/J \arrow[r, "\lambda"] \arrow[ur, "s"] & D \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

2. APPLICATIONS

Commençons par montrer quelques avatars de ce résultat. Le premier résultat de cette nature est dû à Néron, motivé par des problèmes de Géométrie arithmétique (réduction des variétés abéliennes).

2.1 Théorème (Désingularisation de Néron, *cf* [30]).– *Soit $\sigma\colon V \to V'$ un morphisme entre deux anneaux de valuation discrète. S'il est régulier, la V-algèbre V' est limite inductive filtrante de V-algèbres lisses de type fini.*

Par ailleurs, l'analogue du théorème 1.1 dans la catégorie des algèbres analytiques sur un corps de caractéristique zéro (c'est-à-dire des algèbres qui sont des quotients d'algèbres de séries convergentes à coefficients dans un corps valué non discret de caractéristique zéro) a été démontré par A. Płoski en 1974. Ce résultat va aussi nous montrer le lien entre l'approximation par des algèbres lisses de type fini et l'approximation de solutions formelles de systèmes d'équations par des solutions analytiques, qui avait été démontrée en 1968 par M. Artin.

2.2 Théorème (Płoski [33]).– *Étant donné un corps k de caractéristique zéro valué non discret, soient n, p et q des entiers; posons $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$.*

Soient $f_1(x,Y),\ldots,f_q(x,Y)$ des séries convergentes sans terme constant dans $k\{x,Y\}$. Posons $f(x,Y)=(f_1(x,Y),\ldots,f_q(x,Y))$.
S'il existe une solution formelle $\hat{S}(x)=(\hat{S}_1(x),\ldots,\hat{S}_n(x))\in k[[x]]^n$ des équations $f(x,Y)=0$, formée de séries sans terme constant, alors il existe un entier m, des séries convergentes sans terme constant $(T_1(x,\Lambda),\ldots,T_n(x,\Lambda))\in k\{x,\Lambda\}^n$, *où $\Lambda=(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m)$ est une famille finie d'indéterminées, et des séries formelles sans terme constant $H_1(x),\ldots,H_m(x)$ telles que:*

$$F(x,T(x,\Lambda))=0 \quad \text{et} \quad \hat{S}(x)=T(x,H(x)).$$

Ce résultat implique facilement l'énoncé suivant, en remarquant que l'on peut remplacer $k\{x\}$ par une algèbre k-analytique quelconque:

Soit A une algèbre analytique, notons $\mathbf{m}_A$ l'idéal maximal de A et $\sigma\colon A\to\hat{A}$ le morphisme naturel de A dans son complété $\mathbf{m}_A$-adique. Considérons une "A-algèbre analytique de type fini" C, c'est-à-dire une algèbre de la forme $A\{Y\}/(f_1,\ldots,f_q)$, et supposons-la munie d'un A-homomorphisme $C\to\hat{A}$, ce qui correspond à la donnée d'une solution formelle des équations $f_i=0$ (l'image de Y). Alors il existe une C-algèbre analytique de type fini D lisse sur A et munie d'un A-homomorphisme $D\to\hat{A}$ faisant commuter le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B=\hat{A} \\
C=A\{Y\}/(f_1,\ldots,f_q) \arrow[r] \arrow[ur] & D=A\{\Lambda\}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Puisque les algèbres analytiques sont des anneaux locaux nœthériens excellents ([23]), le morphisme $\sigma\colon A\to\hat{A}$ est régulier, et d'après le théorème des fonctions implicites, une algèbre analytique de type fini lisse sur A est de la forme $A\{\Lambda\}$. Le résultat principal est donc une généralisation à tous les morphismes réguliers entre anneaux nœthériens du résultat obtenu par Płoski dans la catégorie des algèbres analytiques.

Le résultat de Płoski entraîne le célèbre théorème d'approximation d'Artin :

2.3 Théorème (Artin [6]).– *Soient n, p et q des entiers; posons $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $Y=(Y_1,\ldots,Y_n)$ et soient $f_1(x,Y),\ldots,f_q(x,Y)$ des séries convergentes sans terme constant dans $\mathbf{C}\{x,Y\}$.*

S'il existe une solution formelle $(\hat{S}_1(x), \ldots, \hat{S}_n(x)) \in \mathbf{C}[[x]]^n$ *des équations* $f_1(x,Y) = \cdots = f_q(x,Y) = 0$*, formée de séries sans terme constant, alors pour tout entier* N *il existe une solution convergente* $(S_1(x), \ldots, S_n(x)) \in \mathbf{C}\{x\}^n$ *telle que, notant* $\mathbf{m}_{\mathbf{C}[[x]]}$ *l'idéal maximal de* $\mathbf{C}[[x]]$*, on ait, pour* $1 \leq j \leq p$*,* $S_j(x) - \hat{S}_j(x) \in \mathbf{m}^N_{\mathbf{C}[[x]]}$.

Autrement dit, les solutions convergentes sont denses parmi les solutions formelles pour la topologie $\mathbf{m}_{\mathbf{C}[[x]]}$-adique de $\mathbf{C}[[x]]^n$.

Étant donné un entier N, il suffit en effet de choisir des séries convergentes $H_j^{(N)}(x)$ assez proches des séries formelles $H_j(x)$ du théorème de Płoski pour avoir les inclusions $T_k(x, H^{(N)}(x)) - T_k(x, H(x)) \in \mathbf{m}^N_{\mathbf{C}[[x]]}$. Les $T_k(x, H^{(N)}(x))$ forment alors une solution approchée à l'ordre N et convergente.

Une première conséquence nouvelle, et la motivation principale, de la conjecture d'Artin-théorème de Popescu et Spivakovsky, est la preuve en toute généralité d'une autre conjecture d'Artin dont de nombreux cas particuliers étaient déjà établis ([7],[8],[39]). Rappelons d'abord que l'on dit qu'un couple $(A, \mathbf{r})$ formé d'un anneau nœthérien A et d'un idéal $\mathbf{r}$ de A possède la *propriété d'approximation* si, pour tout système fini d'équations polynomiales à coefficients dans A, l'ensemble de ses solutions dans A est dense pour la topologie $\mathbf{r}$-adique dans l'ensemble de ses solutions dans le complété $\mathbf{r}$-adique $\hat{A}$ de A.

Par ailleurs, on dit qu'un tel couple $(A, \mathbf{r})$ est un *couple hensélien* si, pour toute A-algèbre B qui est étale sur A et telle que le morphisme induit $A/\mathbf{r} \to B/\mathbf{r}B$ soit un isomorphisme, il existe un A-morphisme $B \to A$. On suppose que $\mathbf{r}$ est contenu dans le radical de A. On rappelle (cf. [23]) qu'étant donné un anneau local A, on dit qu'une A-algèbre locale B est strictement essentiellement étale si B est A-isomorphe à une algèbre $C_{\mathbf{n}}$ localisée d'une A-algèbre étale en un idéal premier, telle que le morphisme $A \to C_{\mathbf{n}}$ soit local et induise un isomorphisme des corps résiduels.

La limite inductive (filtrante) de toutes les A-algèbres strictement essentiellement étales est le *hensélisé* A^h de A. Cette limite inductive est un anneau local, nœthérien si A l'est, et le couple $(A^h, \mathbf{m}_{A^h})$ est hensélien. Etant donnée une inclusion d'anneaux nœthériens $A \subset B$, le hensélisé de A dans B est la limite inductive des sous-A-algèbres de B qui sont étales sur A. On peut alors définir le hensélisé d'un couple $(A, \mathbf{r})$ comme le hensélisé de A dans son complété $\mathbf{r}$-adique $\hat{A}$.

Il résulte du lemme de Hensel ([13]) que tout couple $(A, \mathbf{r})$ qui possède la propriété d'approximation est hensélien; une équation satisfaisant l'hypothèse du lemme de Hensel a une solution dans $\hat{A}$, et par l'approximation elle en a donc une dans A, ce qui prouve que $(A, \mathbf{r})$ est hensélien. Artin avait conjecturé la réciproque sous l'hypothèse que A est excellent, et en effet on a le :

2.4 Théorème (Popescu, Spivakovsky).– *Soit $(A, \mathbf{r})$ un couple hensélien tel que le morphisme naturel $\sigma: A \to \hat{A}$ de A dans son complété $\mathbf{r}$-adique soit régulier. Alors le couple $(A, \mathbf{r})$ possède la propriété d'approximation.*

En particulier, si $(A, \mathbf{m}_A)$ est un anneau local hensélien excellent, il possède la propriété d'approximation pour la topologie $\mathbf{m}_A$-adique.

Démonstration : montrons qu'un couple hensélien $(A, \mathbf{r})$ ayant la propriété que l'homomorphisme de complétion $\sigma: A \to \hat{A}$ est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses possède la propriété d'approximation.

2.5 Lemme.– *Soit $\sigma: A \to B$ un morphisme d'anneaux nœthériens qui fait de B une limite inductive filtrante de A-algèbres lisses de type fini. Alors B est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini étales sur des A-algèbres de polynômes.*

Étant donnés une A-algèbre de type fini

$$C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$$

et un A-morphisme $\rho: C \to B$, d'après l'hypothèse, le morphisme $C \to B$ se factorise en $C \to D \to B$ où D est une A-algèbre de type fini lisse. Nous pouvons donc supposer que C est lisse de type fini sur A. Alors l'algèbre symétrique S du C-module J/J^2 est aussi lisse de type fini sur A. D'après le lemme d' Elkik (lemme 3.6 ci-dessous) appliqué à $V = \mathrm{Spec} C$, nous pouvons présenter S comme quotient d'une algèbre de polynômes $A[v_1, \ldots, v_m]$ par un idéal (que nous noterons encore J) engendré par une suite de $m - (\dim S - \dim A)$ éléments, donc comme une intersection complète relative au-dessus de $\mathrm{Spec} A$. Utilisant la propriété universelle de l'algèbre symétrique et le fait que $J/J^2 = J \otimes_{A[u]} A[u]/J$, on peut étendre à S le morphisme $\rho: C \to B$ en assignant des valeurs arbitraires dans B aux générateurs de J, et ainsi se ramener au cas où C est une intersection complète relative lisse sur A, c'est-à-dire que $C = A[u_1, \dots, u_n]/(f_1, \dots, f_{n-r})$ avec $\mathrm{ht}(f_1, \dots, f_{n-r}) = n-r$. A l'aide du critère jacobien de lissité, on peut se ramener enfin au cas où C est une extension étale de type fini de $A[u_1, \dots, u_r]$.

Terminons la preuve de la propriété d'approximation: nous revenons au cas où $B = \hat{A}$, et nous sommes maintenant en mesure de raisonner comme dans le cas analytique: fixons un entier N et, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, choisissons un élément $x_i \in A$ tel que $\rho(u_i) - x_i \in \mathbf{r}^N \hat{A}$, et posons $R_N(u_i) = x_i$. L'homomorphisme $R_N: A[u_1, \dots, u_n] \to A$ ainsi défini induit modulo $\mathbf{r}^N A[u_1, \dots, u_n] + (f_1, \dots, f_r)$, c'est-à-dire sur $C/\mathbf{r}^N C$ le même homomorphisme que ρ. Notons encore u_i l'image dans C de la variable u_i. L'algèbre $C_1 = C/(u_1 - x_1, \dots, u_r - x_r)$, qui est une A-algèbre étale, possède donc mod.$\mathbf{r}^N$ un A-homomorphisme dans A. Par la propriété hensélienne de $(A, \mathbf{r})$, cet homomorphisme est induit par un A-homomorphisme $C_1 \to A$. Par composition avec le morphisme canonique $C \to C_1$, on obtient un A-morphisme $\rho_N: C \to A$, qui coïncide avec ρ mod. $\mathbf{r}^N$. Cela montre bien que $(A, \mathbf{r})$ possède la propriété d'approximation.

Remarquons que le théorème de Popescu et Spivakovsky entraîne le résultat de Płoski dans le cas où les équations sont polynomiales en (Y) ; en effet à toute algèbre de type fini sur une algèbre analytique A on peut associer son *analytisée,* solution du problème universel évident pour les morphismes dans des A-algèbres analytiques, et l'analytisée d'une A-algèbre locale étale sur une algèbre de polynômes à coefficients dans A est une algèbre de séries convergentes à coefficients dans A. Dans ce qui suit nous nous interesserons particulièrement au hensélisé de l'anneau localisé $k[x_1, \dots x_r]_{(x_1, \dots, x_r)}$ de l'anneau des polynômes en l'idéal maximal des polynômes qui s'annulent à l'origine. Cet anneau local nœtherien hensélien sera noté $k\langle x_1, \dots x_r\rangle$; il est de plus excellent, et lorsque k est un corps valué non discret, il est contenu dans l'anneau des séries convergentes. Le théorème de Popescu et Spivakovsky a aussi pour conséquence un théorème d'algébrisation dû à Artin:

2.6 Théorème.- *Soient k un corps, n, p, et q des entiers; posons $x = (x_1, \dots, x_p)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ et soient $f_1(x, Y), \dots, f_q(x, Y)$ des séries sans terme constant dans $k\langle x, Y\rangle$. S'il existe une solution formelle $(\hat{S}_1(x), \dots, \hat{S}_n(x)) \in k[[x]]^n$ des équations $f_1(x, Y) = \dots = f_q(x, Y) = 0$, formée de séries sans terme constant,* *alors il existe un entier* m*, des séries sans terme constant* $(T_1(x,\Lambda),\dots,T_n(x,\Lambda)) \in k\langle x,\Lambda\rangle^n$*, où* $\Lambda = (\Lambda_1,\dots,\Lambda_m)$ *est une famille finie d'indéterminées, et des séries formelles sans terme constant* $H_1(x),\dots,H_m(x)$ *telles que:*

$$F(x,T(x,\Lambda)) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{S}(x) = T(x,H(x)).$$

Si nous appliquons le théorème non plus au morphisme régulier $k\langle x\rangle \to k[[x]]$ de $k\langle x\rangle$ dans les séries formelles mais au morphisme régulier $k\langle x\rangle \to k\{x\}$ dans l'anneau des séries convergentes lorsque k est un corps valué complet non discret, cet énoncé a la conséquence géométrique suivante:

Soit $(X,0) \subset (k^d,0)$ *un germe d'espace analytique défini par des équations* $(\overline{S_1}(x) = 0,\dots,\overline{S_n}(x) = 0$, où les $\overline{S_i}(x) \in k\{x\}$ *sont des solutions d'un système d'équations* $f_1(x,Y) = \cdots = f_q(x,Y) = 0$ *polynomiales en* Y *à coefficients dans* $k\langle x_1,\dots,x_d\rangle$*. Alors il existe un entier* m*, un sous-espace* $(\mathcal{X},0) \subset (k^d \times k^m,0)$ *défini par des équations algébriques* $S_1(x,\Lambda) = \cdots = S_n(x,\Lambda) = 0$ *avec* $S_i(x,\Lambda) \in k\langle x_1,\dots,x_d,\Lambda_1,\dots,\Lambda_m\rangle$ *et une section analytique* $s\colon (k^d,0) \to (k^d \times k^m,0)$ *telle que* $X = \mathcal{X} \cap s(k^d)$.

Autrement dit, tout germe analytique X défini par des équations qui sont des solutions d'équations polynomiales à coefficients dans l'anneau des fonctions algébriques est une section analytique d'un espace algébrique.

Si l'on peut s'assurer en ajoutant à $(\overline{S_1}(x),\dots,\overline{S_n}(x))$ des fonctions supplémentaires et aux $f_j(x,Y)$ des équations algébriques auxiliaires que l'espace $\mathcal{X}$ est suffisamment équisingulier le long de $\{0\} \times k^m$, en approximant la section s par une section algébrique s', on obtiendra un espace algébrique $\mathcal{X} \cap s'(k^d)$ qui est équisingulier avec X, et on aura prouvé que tout germe analytique est équisingulier (par exemple homéomorphe par un homéomorphisme stratifié) à un germe algébrique. Souvent les équations supplémentaires font intervenir des fonctions dépendant de moins de variables, et l'on souhaite que les solutions algébriques aient la même propriété. C'est une des motivations du théorème d'approximation cylindrique que nous verrons plus bas.

Une autre conséquence du théorème de Popescu-Spivakovsky est le résultat suivant, démontré par Denef et Harbater ([16]) dans des cas particuliers:

2.7 Théorème.– *Soit* A_P *l'algèbre des fonctions analytiques sur un polycylindre fermé* P *de* $\mathbf{C}^d$*, et soit* A_P^{alg} *le hensélisé de* $A = \mathbf{C}[z_1,\dots z_d]$ *dans* A_P*. Alors pour* *tout système d'équations polynomiales à coefficients dans A_P, les solutions dans A_P^{alg} sont denses pour la norme uniforme parmi les solutions dans A_P.*

Nous avons vu que l'inclusion $A \to A_P$ est un morphisme régulier; la démonstration suit le même chemin que la démonstration de la propriété d'approximation vue plus haut, l'argument final étant remplacé par une version normée du théorème des fonctions implicites que l'on trouve dans [16].

L'application du théorème de Popescu et Spivakovsky au morphisme $\mathcal{N}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$ du §1 a permis récemment à M. Coste, J. Ruiz et M. Shiota ([15]) de résoudre plusieurs problèmes de la théorie des fonctions de Nash. Le résultat de base est le suivant, où $\mathcal{N}(\Omega, \Omega')$ désigne l'espace des morphismes de Nash entre deux variétés de Nash, et $\mathcal{O}(\Omega, \Omega')$ celui des morphismes analytiques:

2.8 Théorème ([15]).- *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $\Omega' \subset \mathbf{R}^{d'}$ deux variétés de Nash, avec Ω compacte. Soient $F_1, \ldots, F_q : \Omega \times \Omega' \to \mathbf{R}$ des fonctions de Nash. Alors toute solution analytique $y = f(x)$, $f \in \mathcal{O}(\Omega, \Omega')$, du système*

$$F_1(x, y) = \cdots = F_q(x, y) = 0$$

peut être approximé pour la topologie de Whitney par des solutions des mêmes équations, qui sont des fonctions de Nash globales $y = g(x)$, $g \in \mathcal{N}(\Omega, \Omega')$.

Une conséquence est qu'un morphisme analytique $f : \Omega \to \Omega'$ entre variétés de Nash, avec Ω compacte, peut être approché par un morphisme de Nash g. Si $S \subset \Omega$ et $S' \subset \Omega'$ sont des sous-ensembles semi-algébriques tels que $f^{-1}(S') = S$, on peut choisir g tel que $g^{-1}(S') = S$ puisque cela ne fait qu'imposer des relations algébriques.

L'APPROXIMATION CYLINDRIQUE

Soient $f_1(z_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_p) = \cdots = f_q(z_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_p) = 0$ des équations. Il arrive, en particulier en théorie de l'équisingularité, ou en théorie des équations aux dérivées partielles, que l'on connaisse des solutions formelles ou analytiques telles que $y_1(z), \ldots, y_j(x)$ ne dépendent que des variables $z_1, \ldots, z_{i_j}$, où i_j croît avec j. On se demande si l'on peut approximer ces solutions par des solutions analytiques ou algébriques ayant la même propriété. On savait, et nous verrons plus bas, que la réponse est négative en général lorsque les équations f_k sont analytiques (Gabrielov [20]), et le fait qu'elle soit positive dans le cas d'équations algébriques n'est démontré que grâce au théorème de Popescu-Spivakovsky. Il s'agit essentiellement de montrer que des anneaux comme $k[[z_1, \ldots, z_r]]\langle z_{r+1}, \ldots, z_n\rangle$, ont la propriété d'approximation, ce que les techniques antérieures ne permettaient pas. La preuve de l'énoncé qui suit, qui sert en théorie de l'équisingularité, est inspirée des preuves d'un résultat un peu plus faible (2.9 ci-dessous) rédigées par G. Pfister (communication directe), D. Popescu ([36]), et M. Spivakovsky ([42]).

2.9 Théorème.– *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \longrightarrow & \cdots & A_{i-1} & \xrightarrow{\alpha_{i-1}} & A_i & \longrightarrow & \cdots & A_m = A \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_2} & & \cdots & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_i} & & \cdots & \downarrow{\scriptstyle \sigma_m=\sigma} \\
B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \longrightarrow & \cdots & B_{i-1} & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & B_i & \longrightarrow & \cdots & B_m = B
\end{array}$$

un diagramme d'anneaux nœthériens tel que les σ_i soient des morphismes réguliers. Posons $A'_1 = A_1$ et, pour chaque $i \geq 2$, $A'_i = A_i \otimes_{A_{i-1}} B_{i-1}$. Supposons que pour chaque i l'anneau A'_i est nœthérien et que pour $i \geq 2$ le morphisme $\sigma'_i = \sigma_i \otimes \beta_{i-1}: A'_i \to B_i$ est régulier.
Soit $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho: C \to B$ tel que en fait pour chaque j, $\rho(u_1), \ldots, \rho(u_j)$ proviennent d'éléments de B_{i_j}, les i_j croissant avec j. Pour chaque indice k, il existe une A_k-algèbre de type fini D_k étale sur une A_k-algèbre de polynômes et munie d'un A_k-morphisme $D_k \to B_k$ telle que les $\rho(u_1), \ldots, \rho(u_j)$ proviennent en fait d'éléments de D_{i_j}.

Soit donc $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho: A \to B$ possédant les propriétés ci-dessus. Notons $u_1, \ldots, u_{j_i}$ les variables dont l'image dans B provient de B_i. Remarquons que pour chaque i l'homomorphisme $\rho: C \to B$ peut s'écrire comme composé

$$C \to (A \otimes_{A_{i-1}} A_{i-1}[u_1, \ldots, u_{j_{i-1}}])[u_{j_{i-1}+1}, \ldots, u_n]/J \to B \ ,$$

où la première flèche est un isomorphisme.

Choisissons des éléments $w_1, \ldots, w_n$ tels que $w_1, \ldots, w_{j_i} \in B_i$, et que les w_ℓ pour $\ell < j_i$ soient les images des éléments correspondants dans les B_ℓ, avec l'abus de notation nécessaire, et que $\rho(u_{j_k}) = \beta_{m-1} \circ \cdots \circ \beta_i(w_{j_k})$. Pour chaque entier i , $1 \leq i \leq m$, posons

$$C'_i = A'_i[u_1, \ldots, u_{j_i}]/J_i + \big(u_1 - 1 \otimes w_1, \ldots, u_{j_{i-1}} - 1 \otimes w_{j_{i-1}}\big)\big)$$

où J_i désigne l'idéal $J \cap A_i[u_1, \dots, u_{j_i}]$. Nous pouvons considérer C'_i comme une A'_i-algèbre de type fini, engendrée par les images des $u_{j_{i-1}+1}, \dots, u_{j_i}$, et la conjonction du morphisme naturel $\sigma'_i = \sigma_i \otimes \beta_{i-1} \colon A'_i \to B_i$ et des évaluations $\rho'_i(u_k) = w_k$ pour $j_{i-1} \; +1 \le k \le j_i$, détermine un A'_i-morphisme $\rho'_i \colon C'_i \to B_i$. Puisque par hypothèse le morphisme $\sigma'_i \colon A'_i \to B_i$ est régulier, on peut trouver une A'_i-algèbre de type fini D'_i étale sur une A'_i-algèbre de polynômes et un morphisme $D'_i \to B$ factorisant le morphisme ρ'_i. Une algèbre étale sur une algèbre de polynômes étant décrite par un nombre fini de polynômes, donc de coefficients, la A'_i-algèbre D'_i est en fait définie sur une sous-A_i-algèbre de type fini de A'_i, que l'on peut supposer de la forme $A_i \otimes_{A_{i-1}} C''_{i-1}$ où C''_{i-1} est une A_{i-1}-algèbre de type fini munie d'un A_{i-1}-morphisme dans B_{i-1} dont l'image contient les $w_{j_{i-2}+1}, \dots, w_{j_{i-1}}$. Puisque le morphisme σ_{i-1} est régulier, la A_{i-1}-algèbre C''_{i-1} est dominée par une A_{i-1}-algèbre D_{i-1} étale sur une algèbre de polynômes, munie d'un A_{i-1}-morphisme $\rho_i \colon D_{i-1} \to B_{i-1}$, qui est l'algèbre cherchée. On effectue cette construction d'abord pour $i = m$, et on se trouve avec A_{m-1}, B_{m-1} et C''_{m-1} exactement dans la même situation que pour A, B, et C. On démontre ainsi par récurrence descendante l'existence des A_i-algèbres D_i. Ceci achève la preuve du Théorème.

Supposons maintenant donné un idéal $\mathbf{r}$ de A, notons $\mathbf{r}_i$ l'image réciproque de $\mathbf{r}$ dans A_i, et $\mathbf{r}_i B_i$ l'image de $\mathbf{r}_i$ dans B_i. Supposons que chacun des couples $(A_i, \mathbf{r}_i)$ est hensélien, et que le passage aux complétés $\mathbf{r}_i$-adiques induit des isomorphismes $\hat{A}_i \cong \hat{B}_i$.

2.10 Corollaire (Théorème d'approximation cylindrique, [42], Th. 10.2).- *Étant donnée une A-algèbre de type fini $C = A[u_1, \dots, u_n]/J$, pour tout entier N et tout A-morphisme $\rho \colon C \to B$ tel que pour chaque i, $\rho(u_1), \dots, \rho(u_{j_i})$ proviennent de B_i, il existe un morphisme $\rho_N \colon C \to B$ tel que pour chaque i, $\rho_N(u_1), \dots, \rho_N(u_{j_i})$ proviennent de A_i et que $\rho_N(u_k) - \rho(u_k)$ provienne d'un élément de $(\mathbf{r}_i B_i)^N$ pour $1 \le k \le j_i$.*

Fixons un entier N, et choisissons dans A_1 des éléments $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{j_1}$ congrus mod. $(\mathbf{r}_1 B_1)^N$ aux images de $u_1, \dots, u_{j_1}$. Exactement comme dans la démonstration du théorème d'approximation, en utilisant le fait que D_1 est étale sur une A_1-algèbre de polynômes, on montre que l'on peut trouver dans A_1 des éléments $s_1, \dots, s_{j_1}$ congrus mod. $\mathbf{r}_1^N$ aux images de $u_1, \dots, u_{j_1}$ et définissant un A_1-morphisme $C'_1 \to A_1$. Cela fait, on peut fixer $u_1 = s_1, \dots, u_{j_1} = s_{j_1}$ dans toute la situation, recommencer avec A_2, et continuer ainsi jusqu'à A_m, ce qui prouve le résultat.

L'exemple privilégié est celui où, étant donné un anneau A_0 équipé d'une norme multiplicative, par exemple un corps valué complet non discret, on a $A_i = A_0\langle z_1, \dots, z_i\rangle$, $B_i = A_0\{z_1, \dots, z_i\}$, ou bien $B_i = A_0[[z_1, \dots, z_i]]$.
Soit n un entier, posons $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, et donnons-nous un système d'équations $(f_1(z, Y), \dots, f_q(z, Y)) \in A[Y]^q$ et une solution $\hat{Y} \in B^n$ telle que

$$\hat{Y}_1(z), \dots, \hat{Y}_{j_i}(z) \in A_0[[z_1, \dots, z_i]] \ ;$$

alors pour tout entier N il existe une solution telle que l'on ait

$$Y_1(z), \dots, Y_{j_i}(z) \in A_0\langle z_1, \dots, z_i\rangle \ , \quad \text{et}$$
$$Y_k(z) - \hat{Y}_k(z) \in (z_1, \dots, z_i)^N A_0[[z_1, \dots, z_i]] \text{ pour } 1 \leq k \leq j_i \ .$$

LA CONJECTURE DE BASS-QUILLEN

Soit k un corps; la conjecture de Serre: *tout module projectif de type fini sur une k-algèbre de polynômes est libre,* démontrée par Suslin et Quillen, peut être reformulée en : *tout module projectif de type fini sur $k[u_1, \dots, u_n]$ est de la forme $V \otimes_k k[u_1, \dots, u_n]$ où V est un k-espace vectoriel de dimension finie.* Bass et Quillen ont demandé si l'énoncé restait vrai lorsque k était remplacé par un anneau nœthérien régulier. D'après un théorème de recollement de Quillen ([38]), il suffit de prouver le résultat lorsque B est un anneau local nœthérien régulier. Lindel a prouvé le résultat dans le cas "géométrique", plus précisément sous l'hypothèse que l'anneau local B est lisse de type fini sur un corps. Le théorème de Popescu-Spivakovsky permet de s'affranchir de l'hypothèse de finitude, pour prouver la conjecture de Bass-Quillen dans un cas plus général :

2.11 Théorème (partie de la Conjecture de Bass-Quillen, *cf* [42]).– *Soit B un anneau nœthérien régulier. Supposons que, pour chaque idéal maximal $\mathbf{m}$ de B, l'anneau localisé $B_{\mathbf{m}}$ contient un corps ou un anneau de Dedekind local (A, π) tel que $\pi \notin \mathbf{m}^2$ et que l'extension de corps $A/(\pi) \to B/\mathbf{m}$ soit séparable (en particulier, le morphisme d'inclusion $A \to B_{\mathbf{m}}$ est régulier). Alors, pour tout entier n, tout $B[u_1, \dots, u_n]$-projectif de type fini M est de la forme $M_0 \otimes_B B[u_1, \dots, u_n]$ où M_0 est un B-module projectif de type fini (isomorphe à $M/(u_1, \dots, u_n)M$).*

De même, par réduction au cas de type fini, Spivakovsky prouve dans un grand nombre de cas une autre conjecture de Quillen:

Dans la situation ci-dessus, considérons pour un idéal maximal $\mathbf{m}$ *un élément* $u \in B_{\mathbf{m}}$ *tel que* u *et* π *soient linéairement indépendants dans le* $B_{\mathbf{m}}/\mathbf{m}$*-espace vectoriel* $\mathbf{m}/\mathbf{m}^2$*, ou que* $\frac{u}{\pi}$ *soit inversible dans* $B_{\mathbf{m}}$*. Alors tout* $(B_{\mathbf{m}})_u$*-module projectif de type fini est libre.*

C'est une version locale d'une autre conjecture de Quillen encore: Étant donnés un schéma affine régulier X et un diviseur non singulier $Z \subset X$, tout fibré vectoriel sur $X \setminus Z$ s'étend en un fibré vectoriel sur X.

3. QUELQUES ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION

Les premières démonstrations des théorèmes d'approximation par Artin dans le cadre formel/analytique ou formel/hensélien concernaient des morphismes $\sigma: A \to \hat{A}$, donc des morphismes sans extension résiduelle entre anneaux de même dimension, et de plus A était soit un anneau de séries convergentes soit le hensélisé d'un anneau de polynômes, disons en d variables, et B l'anneau des séries formelles. Elle procédaient par récurrence sur d au moyen du théorème de préparation de Weierstrass. Dans le cas général cette méthode est inapplicable. La démonstration de Popescu et celle de Spivakovsky doivent surmonter deux types de difficultés: faire diminuer par des extensions de type fini $C \to C'$ le lieu critique (la partie "résolution" de la démonstration) et se ramener au cas où $\sigma: A \to B$ est un morphisme d'anneaux locaux à extension résiduelle triviale.

L'IDÉAL CRITIQUE D'UNE A-ALGÈBRE DE TYPE FINI

Soient A un nœthérien et $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ une A-algèbre de type fini. Considérons l'idéal $H_{C/A}$ de C engendré par les images dans C de tous les élements de $A[u_1, \ldots, u_n]$ de la forme $c\Delta_{g,j}$, où r est un entier, $g = (g_1, \ldots, g_r) \subset J$, $j = (j_{i_1}, \ldots, j_{i_r})$, $\Delta_{g,j}$ est le déterminant jacobien $\det(\frac{\partial g_i}{\partial u_{j_k}})$, $1 \leq i,\ k \leq r$ et c appartient à l'idéal résiduel $(g) : (f)$, ce qui signifie que l'on a $c.(f) \subset (g)$. Il résulte du critère jacobien que l'idéal $H_{C/A}$ définit le lieu de non-lissité de Spec$C$ sur Spec$A$: Étant donné un idéal premier Q de C, l'algèbre localisée C_Q est lisse sur A si et seulement si $H_{C/A} \not\subset Q$.

Un intérêt de cette définition un peu alambiquée est que $H_{C/A}$ définit encore le lieu de non-lissité en restriction à chaque composante irréductible de Spec$C$, quelle que soit sa dimension. Une présentation plus générale de cette construction, en rapport avec la cohomologie d'André, se trouve dans [5]. L'idée générale des démonstrations est de faire des extensions de type fini $C \to C'$ telles que l'image dans B de $H_{C'/A}$ soit plus grosse que celle de $H_{C/A}$. Pour cela on travaille d'abord dans l'algèbre localisée de B en un idéal premier minimal de $H_{C/A}B$.

(CO)HOMOLOGIE D'ANDRÉ

Soit $\sigma: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux, et soit W un B-module. Dans [4], André associe à ces données pour chaque entier $i \geq 0$ des B-modules $\mathrm{H}_i(A, B, W)$ et $\mathrm{H}^i(A, B, W)$; la remarquable construction d'André est purement algébrique; on peut en obtenir une interprétation plus géométrique et des généralisations à l'aide du complexe cotangent de Grothendieck et Illusie ([26]). Nous n'utiliserons ici que les propriétés fondamentales suivantes :

Notant $\Omega_{B/A}$ le B-module des A-différentielles de Kähler de B , on a :

3.1 Proposition ([4], Prop. 16.12, Prop. 16.13).– *On a :*

$$\mathrm{H}_0(A, B, W) = \Omega_{B/A} \otimes_B W \quad , \quad H^0(A, B, W) = \mathrm{Der}_A(B, W).$$

Un point fondamental est que les A-algèbres lisses sont des objets acycliques pour cette (co)homologie:

3.2 Proposition ([4], Prop. VII.23, Prop. XVI.17, Th. 30).- *Pour un morphisme d'anneaux nœthériens $\sigma: A \to B$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *σ est régulier,*
2) $\mathrm{H}_i(A, B, W) = 0$ *pour tout $i > 0$ et tout B-module W,*
3) $\mathrm{H}_1(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier Q de B et tout $\kappa(Q)$-espace vectoriel W,*
4) $\mathrm{H}^1(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier Q de B et tout $\kappa(Q)$-espace vectoriel W,*
5) $\mathrm{H}^i(A, B, W) = 0$ *pour tout idéal premier Q de B, tout $\kappa(Q)$-espace vectoriel W et tout $i > 0$.*

En fait, σ est régulier si et seulement si $\mathrm{H}_1(A,B,B) = 0$ et $\Omega_{B/A}$ est un B-module plat. Une A-algèbre de présentation finie est lisse si et seulement si le B-module $\mathrm{H}_k(A,B,B)$ est nul pour $k=1$ et projectif pour $k=0$. Dans ce cas, les $\mathrm{H}_i(A,B,W)$ et $\mathrm{H}^i(A,B,W)$ sont nuls pour tout B-module W et tout $i>1$.

La suite exacte de cohomologie prend la forme suivante (dite de Jacobi-Zariski) :

3.3 Proposition ([4], Chap 5).– *Soient $F \to B$ un morphisme de A-algèbres et W un B-module. Il y a deux suites exactes longue s:*

$$\cdots \to \mathrm{H}_n(A,F,W) \to \mathrm{H}_n(A,B,W) \to \mathrm{H}_n(F,B,W) \to \mathrm{H}_{n-1}(A,F,W) \to \cdots$$

et

$$\cdots \to \mathrm{H}^{n-1}(A,F,W) \to \mathrm{H}^n(F,B,W) \to \mathrm{H}^n(A,B,W) \to \mathrm{H}^n(A,F,W) \to \cdots$$

Les propriétés ci-dessus de la cohomologie d'André et le fait qu'elle commute aux limites inductives filtrantes ([4], Chap. III, Prop. 35) impliquent aussitôt que si $\sigma\colon A \to B$ est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini lisses, σ est régulier. Il faut montrer la réciproque.
La démonstration de Popescu est très bien refondue à l'aide de la cohomologie d'André dans [5] (On consultera aussi [3]).

Voici un plan de la démonstration de Spivakovsky, qui est plus géométrique et plus facile à esquisser. Pour une partie, elle est guidée par l'analogie suivante: soient k un corps algébriquement clos et V une k-algèbre qui est un anneau de valuation du corps des fonctions d'une variété algébrique sur k. Alors le morphisme $k \to V$ est régulier parce que le calcul des groupes de cohomologie d'André commute aux limites inductives filtrantes d'algèbres et que V est limite inductive filtrante de k-algèbres lisses essentiellement de type fini (localisées d'algèbres de type fini); c'est un avatar du théorème d'uniformisation locale de Zariski ([46]), et les k-algèbres lisses dominant une k-algèbre essentiellement de type fini donnée sont construites par des éclatements. L'exemple donné au §1 utilise en outre le fait que le corps des fractions d'une k-algèbre est limite inductive filtrante de corps de fonctions algébriques sur k.

3.4 Proposition ([42], Prop. 4.1).– *Supposons que B soit un anneau local d'idéal maximal Q, et que $A \to B$ soit régulier. Posons $\mathbf{m} = Q \cap A$ et supposons l'extension résiduelle $A/\mathbf{m} \to B/Q$ triviale. Soit $C = A[u]/J$ une A-algèbre de type fini munie d'un A-morphisme $\rho: C \to B$. Supposons qu'il existe $(g_1, \ldots, g_r) \subset J$ et un entier N tels que $Q^N \subset \sum_j \Delta_{g,j} B$ et $\mathbf{m}A[u] \subset \sqrt{(g) : J}$. Alors il existe une A-algèbre de type fini lisse faisant commuter le diagramme:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & \overset{\rho}{\nearrow} & \uparrow \\ C = A[u]/J & \longrightarrow & D \end{array}$$

et telle que $\sqrt{H_{D/C}B} = Q$.

La dernière hypothèse est un peu plus faible que de demander que C soit intersection complète à singularité isolée au-dessus de A. La partie essentielle de la démonstration est de se ramener par une suite d'éclatements généralisés au cas où l'idéal J est engendré par des formes linéaires en les u_i. On se ramène d'abord, en remplaçant A par une A-algèbre de polynômes, au cas où $Q = \mathbf{m}B$. Puisque l'extension résiduelle est triviale, on a l'inclusion $\rho(C) \subset \sigma(A) + Q$. Soit $(z_1, \ldots, z_k)$ un système de générateurs de $\mathbf{m}$. Il existe des éléments $c_i \in A$ tels que $\rho(u_i - c_i) \in Q$. Il existe puisque $\mathbf{m}B = Q$ des éléments $\overline{v_{i,j}} \in B$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ tels que $\rho(u_i - c_i) = \sum_{j=1}^{k} \overline{v_{i,j}} \sigma(z_j)$. Introduisons des indéterminées $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ et l'homomorphisme de A-algèbres $\pi_z: A[u] \to A[v]$ déterminé par: $\pi_z(u_i) = c_i + \sum_{j=1}^{k} v_{i,j} z_j$. Notons $f^{(1)}$ l'image de f par π_z, et C_1 l'algèbre quotient $A[v]/(f^{(1)})$. Par construction, C_1 admet un A-morphisme $\rho_1: C_1 \to B$ tel que si nous continuons de noter π_z le morphisme $C \to C_1$, on ait $\rho_1 \circ \pi_1 = \rho$. L'homomorphisme $\pi_z: C \to C_1$ est appelé *éclatement généralisé* de $\mathbf{m}$ par rapport au système générateur (z). Si A est un anneau local et (z) un système minimal de générateurs de $\mathbf{m}$, l'éclatement généralisé ne dépend pas du choix de (z).

3.5 Lemme.- *Soit $\pi_z: C \to C_1$ un éclatement généralisé; on a l'inclusion $\sqrt{\mathbf{m}H_{C/A}C_1} \subset H_{C_1/A}$, avec égalité si $\mathbf{m}$ contient tous les idéaux premiers associés de A, en particulier si A est local.*

Nous allons désormais, pour montrer l'idée dans un cas simple, considérer seulement le cas où J est principal: $C = A[u_1, \ldots, u_n]/(f)$. Notons $J(f)$ l'idéal de B engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_n}$ et $I(f)$ l'idéal de A engendré par les coefficients a_α du polynôme $f = \sum_\alpha a_\alpha u^\alpha$. On a l'inclusion $J(f) \subset I(f) \otimes_A B$. On calcule ensuite $J(f^{(1)})$ et $I(f^{(1)})$ et la formule de Taylor donne:

$$J(f^{(1)}) = \mathbf{m}J(f), \quad I(f^{(1)}) \otimes_A B \subset \mathbf{m}J(f) + \mathbf{m}^2 I(f) \otimes_A B.$$

Utilisant le lemme d'Artin-Rees, on montre qu'il existe un entier N tel que, après N éclatements généralisés, on arrive à la situation où $J(f^{(N)}) = I(f^{(N)}) \otimes_A B$, avec une A-algèbre $C_N = A[U^{(N)}]/(f^{(N)})$. Si l'on note $(a_1, \ldots, a_\ell)$ un système minimal de générateurs de $I(f^{(N)})$, on peut écrire $f^{(N)} = \sum_i a_i g_i \ ; g_i \in A[u^{(N)}]$. On considère la A-algèbre $C_0 = A[G_1, \ldots, G_\ell]/(\sum_i a_i G_i)$, où les G_i sont de nouvelles indéterminées; elle admet un morphisme $C_0 \to C_N$ déterminé par $G_i \mapsto g_i$. L'égalité $J(f^{(N)}) = I(f^{(N)}) \otimes_A B$ entraîne que $(a_1, \ldots, a_\ell)$ induit un système minimal de générateurs du $B/\mathcal{Q}$-espace vectoriel $J(f^{(N)})/\mathcal{Q}J(f^{(N)})$, et de cela on déduit que $H_{C_N/C_0} \not\subset \mathcal{Q} \cap C_N$. Finalement on se ramène à lissifier l'algèbre C_0. C'est-à-dire que l'on est ramené au cas où l'idéal J est engendré par des formes linéaires!

Ce cas se traite par une généralisation du théorème de D. Lazard selon lequel tout A-module plat est limite inductive filtrante de A-modules libres de type fini. Le cas général sans extension résiduelle se ramène sans trop de peine au cas d'une intersection complète grâce au:

3.6 Lemme (Lemme d'Elkik, [17] Lemme 3).– *Soient A un anneau nœthérien et C une A-algèbre de type fini. Choisissons une présentation $C = A[u_1, \ldots, u_n]/J$ et un système de générateurs $(f_1, \ldots, f_q)$ de J. Notons S l'algèbre symétrique* $\mathrm{Sym}_C J/J^2$ *du C-module J/J^2. Soit V un ouvert de SpecC lisse sur SpecA; notons V' l'image réciproque de V par le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}S \to \mathrm{Spec}C$. *L'ouvert V' de SpecS est lisse sur SpecA et la dimension de ses fibres est constante et égale à n. Il existe une présentation $S = A[U_1, \ldots, U_{q+2n}]/K$ telle que, sur toute immersion ouverte* $\mathrm{Spec}D \hookrightarrow \mathrm{Spec}S$ *au dessus de* $\mathrm{Spec}A$ *dont l'image est contenue dans V', le S-module K/K^2 induise un D-module libre de rang $q+n$. Ainsi il existe un voisinage dans* $\mathrm{Spec}A[U_1, \ldots, U_{q+2n}]$ *de l'image de* $\mathrm{Spec}D$ *dans lequel S est une intersection complète relative, définie par $q+n$ équations.*

Il reste le travail très délicat d'exorciser les extensions résiduelles. Ici la cohomologie d'André joue un rôle crucial. Spivakovsky démontre la version suivante du théorème de Cohen, qui est très proche de résultats de Nica-Popescu ([31]):

3.7 Théorème (Nica-Popescu, Spivakovsky).– *Soit $\sigma\colon (A,\mathbf{m}) \to (B,Q)$ un morphisme régulier entre anneaux locaux nœthériens. Notons $\hat{B}_Q$ le complété de B. Alors il existe une A-algèbre locale nœthérienne A^* qui est limite inductive de A-algèbres lisses de type fini et un diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A^* \arrow[r, "\sigma^*"] & \hat{B}_Q \end{tikzcd}$$

où σ^* est aussi limite inductive de A^*-algèbres lisses de type fini et induit un isomorphisme des corps résiduels.

En fait, posant $k = A/\mathbf{m}$, $K = B/Q$, on a $\dim A^* \geq \dim A + \dim_K \mathrm{H}_1(k,K,K)$, et on peut choisir A^* ayant cette dimension, ou bien celle de B. Ici on a dû aller dans le complété de B. Finalement, dans la situation du Théorème, on obtient pour chaque idéal premier Q minimal de $H_{C/A}B$ un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B \arrow[r] & B_Q \arrow[r] & \hat{B}_Q \\ A' \arrow[d] \arrow[urrr] & & & \\ C \otimes_A A' \arrow[r, "\phi"] \arrow[uurrr] & D \arrow[uurr] & & \end{tikzcd}$$

où A' est une A-algèbre locale nœthérienne qui est limite inductive filtrante de A-algèbres de type fini, de même dimension que $\hat{B}_Q$ et avec extension résiduelle triviale. Le bas du diagramme résulte du cas sans extension résiduelle appliqué au morphisme $A' \to \hat{B}_Q$. Il reste enfin à approximer ce diagramme dans la topologie Q-adique pour obtenir un morphisme dans B_Q, puis à globaliser.

Spivakovsky montre aussi que si A est réduit et si pour tout idéal premier minimal $\mathcal{P}$ de A, le quotient $B/\mathcal{P}B$ est de degré de transcendance infini sur $A/\mathcal{P}$, alors B est limite inductive de ses sous-A-algèbres lisses de type fini.

4. L'EXEMPLE DE GABRIELOV

Partons de l'exemple dû à Osgood (*cf* [1], [2]) de l'injection

$$\phi\colon \mathbf{C}\{y_1, y_2, y_3\} \hookrightarrow \mathbf{C}\{x_1, x_2\}$$

définie par

$$\phi(y_1) = x_1,\ \phi(y_2) = x_1 x_2,\ \phi(y_3) = x_1 e^{x_2}.$$

Suivant Gabrielov ([20]), on peut vérifier que la série

$$\hat{S}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\,\big(y_1^{n-1} y_3 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} y_1^{n-i} y_2^i\big)$$

est divergente mais que $\hat{\phi}(\hat{S}) \in \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$ est convergente, où $\hat{\phi}$ désigne l'extension de ϕ aux anneaux de séries formelles. Cela permet de définir un morphisme

$$\Phi\colon \mathbf{C}\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \to \mathbf{C}\{x_1, x_2\}$$

par

$$\Phi(y_1) = x_1,\ \Phi(y_2) = x_1 x_2,\ \Phi(y_3) = x_1 e^{x_2}, \Phi(y_4) = \hat{\phi}(\hat{S}) = \hat{S}(\phi(y_1), \phi(y_2), \phi(y_3)))$$

dont on peut montrer qu'il est injectif mais dont l'extension aux anneaux de séries formelles

$$\hat{\Phi}\colon \mathbf{C}[[y_1, y_2, y_3, y_4]] \to \mathbf{C}[[x_1, x_2]]$$

n'est pas injective puisque son noyau contient $y_4 - \hat{S}(y_1, y_2, y_3)$.

Posant $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, la formule de Taylor

$$f(y) - \hat{\phi}(f) = \sum_{\alpha} (y - \phi(y))^{\alpha} F^{(\alpha)}(\phi(y))$$

nous montre que l'égalité $\hat{\phi}(f) = h(x)$ dans $\mathbf{C}[[x,y]]$ équivaut à l'existence de séries $A_i(x,y)$ telles que

$$h(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{3} A_i(x,y)(y_i - \phi(y_i)).$$

Choisissant $h(x) = \hat{\phi}(\hat{S})$, considérons cela comme une équation linéaire en les inconnues f, A_1, A_2, A_3 à coefficients dans $\mathbf{C}\{x,y\}$. D'après ce qui précède elle a une solution formelle, avec $\hat{f} = \hat{S}(y)$, qui est donc indépendante de x mais si elle avait une solution convergente $f(y)$ *telle que f soit indépendante de x* , on aurait en se restreignant au sous-espace de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^3$ défini par les équations $y_i = \phi(y_i)$ (le graphe du morphisme analytique $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ correspondant à ϕ) une relation analytique $\phi(f) = \hat{\phi}(\hat{S})$ dans $\mathbf{C}\{x_1, x_2\}$, donc $y_4 - f(y)$ appartiendrait au noyau de Φ, contredisant l'injectivité de Φ.

Ceci montre que le théorème d'approximation cylindrique n'est pas vrai pour des équations analytiques sans condition supplémentaire. Cette présentation de l'exemple de Gabrielov est due à Becker ([11]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Abhyankar - *Two notes on formal power series,* Proc. A.M.S. **7** (1956), 903-905.

[2] S. Abhyankar, M. Van der Put - *Homomorphisms of analytic local rings.* J. Reine u. Ang. Math., **242**, (1970), 26-60.

[3] M. André - *Artin's Theorem on the solutions of analytic equations in positive characteristic,* Manus. Math. **15**, (1975), 341-347.

[4] M. André - *Homologie des algèbres commutatives* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[5] M. André - *Cinq exposés sur la désingularisation,* Manuscrit, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Décembre 1991.

[6] M. Artin - *On the solutions of analytic equations,* Inventiones Math. (1968), 277-291.

[7] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over local rings,* Publ. Math. IHES, **36** (1969), 23-58.

[8] M. Artin - *Algebraic structure of power series rings,* Contemp. Math.**13** (1982), 223-227.

[9] M. Artin and J. Denef - *Smoothing of a ring homomorphism along a section,* Arithmetic and Geometry, Vol. II,(in honor of Shafarevitch), Birkhaüser 1983, 5-32.

[10] J. Becker, *Exposé on a conjecture of Tougeron,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **27**, 4 (1977), 9-27.

[11] J. Becker - *On the composition of power series,* Commutative algebra, Fairfax 1979, Lect. Notes in Pure and applied Math., No. 68, 159-172, Dekker, 1982.

[12] J. Becker - J. Denef, L. Lipshitz, and L. van den Dries, *Ultraproducts and Approximation in local rings I,* Invent. Math. **51**, (1979), 189-203.

[13] N. Bourbaki - *Algèbre commutative, Chap. 3* , Masson, 1985.

[14] D. Cerveau - *Résultats de type Artin pour les systèmes d'équations holomorphes,* Gazette des mathématiciens, **48**, 77-95, S.M.F. 1991.

[15] M. Coste, J Ruiz, M Shiota, *Approximation in compact Nash manifolds,* Prépublication IRMAR, Rennes 1994.

[16] J. Denef, D. Harbater - *Global approximation in dimension two,* Journal of Algebra, Vol. 129, No.1, 1990.

[17] R. Elkik - *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien,* Ann. Sci. ENS, **6** (1973), 553-604.

[18] J. Frisch, *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes,* Invent. math., **4**, (1967), 118-138.

[19] H. Hironaka - *formal line bundle along exceptionnal loci,* Algebraic geometry, Bombay, 1968, Oxford U.P.

[20] A.M. Gabrielov - *Formal relations between analytic functions,* Funk. Analiz Appl. **5** (1971), 64-65.

[21] M.J. Greenberg - *Rational points in henselian discrete valuation rings,* Publ. Math. IHES **31**, (1966).

[22] A. Grothendieck, J. Dieudonné - *EGA IV, seconde partie,* § 7. Publ. Math. IHES **24** (1965).

[23] A. Grothendieck, J. Dieudonné - *EGA IV, quatrième partie,* § 18. Publ. Math. IHES **32** (1965).

[24] M. Hickel - *Sur la fonction d'Artin d'un germe analytique,* in Complex analysis, Wuppertal 1991. K. Diederich ed., Aspects of Math. E 17, F. Vieweg and

Sohn 1991.

[25] H. Kurke, T. Mostowski, G. Pfister, D. Popescu and M. Roczen - *Die Approximationeigenschaft lokaler Ringe,* Springer LNM **634**, 1978.

[26] L. Illusie - *Complexe cotangent, I.* Springer LMN **239**.

[27] S. Lang - *Some applications of the local uniformization theorem,* Amer. J. Math. **76**, (1954), 362-374.

[28] H. Lindel - *On a question of Bass-Suslin concerning projective modules over polynomial rings,* Invent. Math. **65** (1981), 319-323.

[29] T. Mostowski - *Topological equivalence between analytic and algebraic sets,* Bull. Acad. Pol. Sci. (1984), 393-400.

[30] A. Néron - *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux,* Publ. Math. IHES. **21** (1964).

[31] V. Nica et D. Popescu - *A structure theorem on formally smooth morphisms in positive characteristic,* J. of Algebra **100** (1986), 436-455.

[32] T. Ogoma - General Néron desingularization based on the idea of Popescu, *Preprint.*

[33] A. Płoski - *Note on a theorem of M. Artin,* Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Math. **22** (1974), 1107-1109.

[34] D. Popescu - *Global form of Néron's p-desingularization, in* Week of algebraic Geometry, Bucharest, June 30-July 6, 1980. Teubner Texte, Band 40, Leipzig, 1981.

[35] D. Popescu - *General Neron desingularisation,* Nagoya Math. J. **100** (1985), 97-126.

[36] D. Popescu - *General Neron desingularisation and approximation,* Nagoya Math. J. **104** (1986), 85-115.

[37] D. Popescu - *Letter to the Editor, General Neron desingularisation and approximation,* Nagoya Math. J. **118** (1990), 45-53.

[38] D. Quillen - *Projective modules over polynomial rings,* Invent. Math. **36** (1976), 167-171.

[39] C. Rotthaus - *On the approximation property for excellent rings,* Inv. Math. **88** (1987), 39-63.

[40] N. Schappacher - *Some remarks on a theorem of M.J. Greenberg,* in Proc. 1979 Kingston number theory Conf. Queen's Math. Papers (1980), 100-114.

[41] N. Schappacher - *L'inégalité de Łojasiewicz ultramétrique,* CRAS Paris **296** (1983), 439-442.

[42] M. Spivakovsky - *Smoothing of ring homomorphisms, approximation theorems, and the Bass-Quillen conjecture.* Prépublication, Toronto 1993 (version corrigée de Janvier 1994).

[43] M. Spivakovsky, - *Non-existence of the Artin function for henselian pairs,* Prépublication.

[44] J-C. Tougeron, *Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **26**, 2 (1976), 117-131.

[45] J-C. Tougeron, *Solutions d'un système d'équations analytiques réelles et applications*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **26**, 3 (1976), 109-135.

[46] O. Zariski, *Local uniformization of algebraic varieties,* Annals of maths. **41**, No. 4, 1940.

Bernard TEISSIER

École Normale Supérieure
D.M.I.
URA 762 du C.N.R.S.
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS Cedex 05