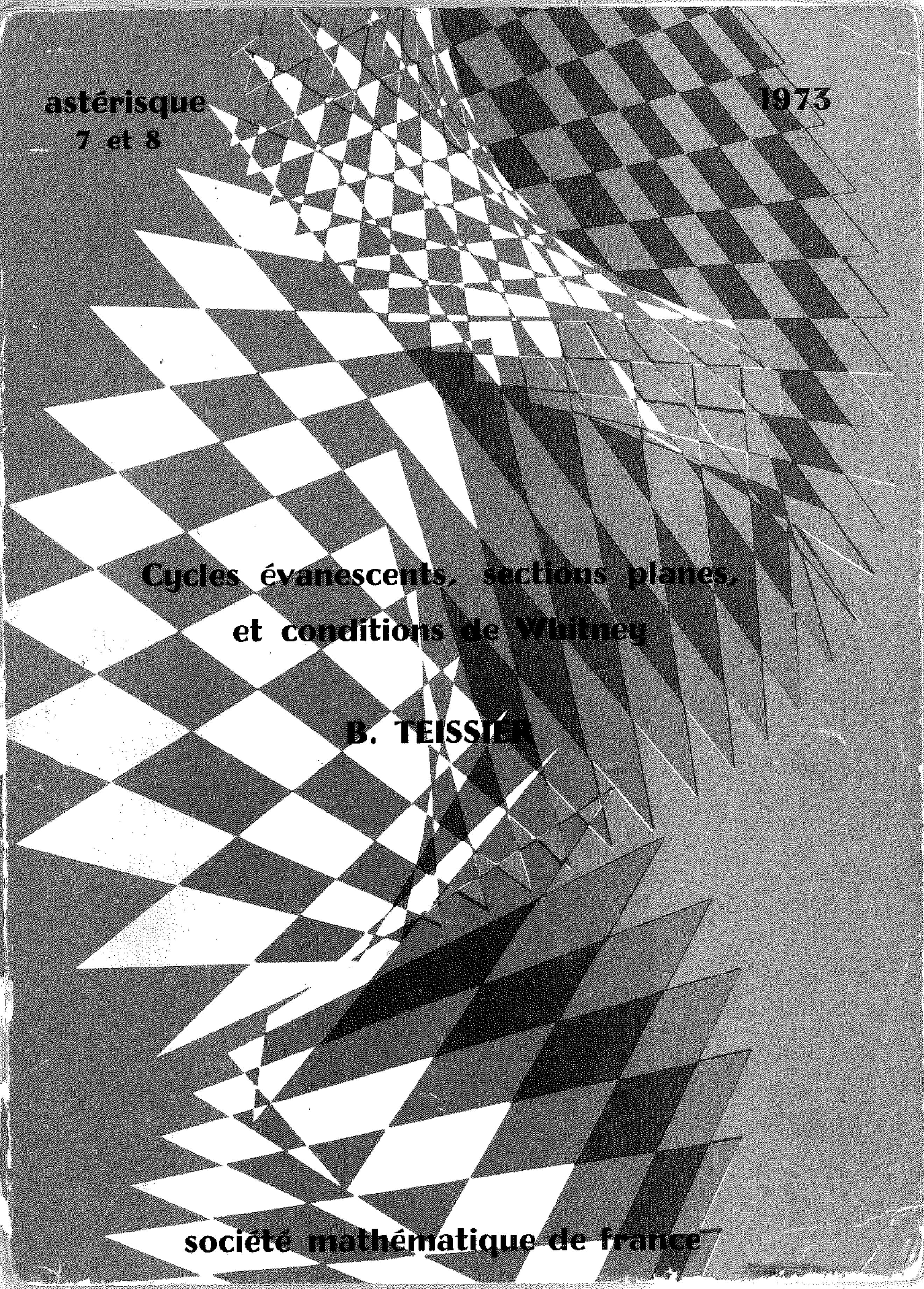


astérisque
7 et 8

1973

Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney

B. TEISSIER

société mathématique de france

Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney

B. TEISSIER

Extrait de "astérisque" 7 et 8 - 1973

Pages 285 à 362

CYCLES EVANESCENTS, SECTIONS PLANES ET CONDITIONS DE WHITNEY

Bernard TEISSIER

<u>Préambule</u> : Le but que l'on se propose ici est la construction d'invariants numériques d'un germe d'hypersurface analytique complexe à singularité isolée, invariants dont la constance dans une petite déformation de l'hypersurface entraîne l'"équisingularité" de cette déformation en un sens très fort (conditions de Whitney). En fait, nous attachons à un germe d'hypersurface $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ à singularité isolée une suite décroissante d'entiers $\mu^*_{x_o}(X_o)=(\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o),\dots,\mu^{(i)}_{x_o}(X_o),\dots,\mu^{(o)}_{x_o}(X_o))$ où $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$ est le nombre de cycles évanescents* de l'intersection de (X_o,x_o) avec un i-plan général de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$. Si $F:X\overset{\sigma}{\rightleftarrows}D=\{t\in\mathbb{C}\,/\,|t|<1\}$ est une déformation de (X_o,x_o) munie d'une section σ telle que $X-\sigma(\mathbb{D})$ soit lisse sur $\mathbb{D}$, et si "$\mu^{(n+1)}$ constant" (resp. "μ^* constant") signifie que $\mu^{(n+1)}_{\sigma(t)}(X_t)=\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$ (resp. avec μ^*), où $X_t=F^{-1}(t)$, pour tout $t\in\mathbb{D}$, notre programme est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
{[\mu^{(n+1)}\text{ constant}]} \arrow[r, Rightarrow, "{[C_1]}"] \arrow[ddrr, Rightarrow, bend left, "{[L.R]}"] & {[\mu^*\text{ constant}]} \arrow[r, Rightarrow, "{[ICI]}"] & {[(X-\sigma(\mathbb{D}),\sigma(\mathbb{D}))\text{ satisfait les conditions de Whitney}]} \arrow[d, Rightarrow, "{[\text{Thom-Mather}]}"] \\
 & & {[F\text{ est topologiquement triviale}]} \arrow[d, Rightarrow, "{[\text{évident}]}"] \\
 & & {[(X_t,\sigma(t))\text{ ont toutes même type topologique }(t\in\mathbb{D})]} \arrow[uull, Rightarrow, "{[ICI]}"] \arrow[uul, Rightarrow, "{[C_2]}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Légende</u> :

[C] : Conjecture
[ICI] : démontré dans ces notes
[L.R] : Lê + Ramanujam ($n\neq 2$)

---

* ou nombre de Milnor.

On peut voir que la démonstration de C_1 nous munirait d'une théorie satisfaisante de l'équisingularité pour les familles d'hypersurfaces à singularité isolée. Ceci apporterait aussi une réponse partielle à des questions posées par Zariski dans [Z_2].

***

CHAPITRE 0 - RAPPELS ET GENERALITES

§ 0. Rappels sur la dépendance intégrale

Ce paragraphe est un aide-mémoire, qui ne contient aucun résultat essentiellement nouveau, (voir [H_1], [$L.T_1$], [L_i]) sauf peut-être les raffinements concernant $\bar{\nu}$, qui ont été mis au point avec Monique Lejeune, et 0.5.2). On suppose connues les notions de clôture intégrale (d'un anneau réduit $\mathcal{O}$ dans son anneau total de fractions $\mathrm{Tot}(\mathcal{O})$ (opération notée : $\mathcal{O} \mapsto \overline{\mathcal{O}}$), et de normalisation d'un espace analytique complexe.

0.1 <u>Définition</u> : Soient $\mathcal{O}$ un anneau commutatif unitaire, I un idéal de $\mathcal{O}$. Nous dirons qu'un élément h d'un anneau $\mathcal{O}'$ de même espèce, contenant $\mathcal{O}$, est entier sur I si il satisfait une équation de dépendance intégrale :

$$h^k + a_1 h^{k-1} + \dots + a_k = 0 \qquad \text{avec } a_i \in I^i \ .$$

0.2 <u>Définition</u> : Soient $\mathcal{O}$ comme ci-dessus, I_1 et I_2 deux idéaux de $\mathcal{O}$. Posons pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\nu_{I_1}(I_2^i) = \mathrm{Sup}\{\nu \in \mathbb{N} \,/\, I_2^i \subseteq I_1^\nu\}$$

et définissons

$$\bar{\nu}_{I_1}(I_2) = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{\nu_{I_1}(I_2^i)}{i} \ .$$

En fait, il est facile de montrer que la suite $\dfrac{\nu_{I_1}(I_2^i)}{i}$ converge vers $\bar{\nu}_{I_1}(I_2)$, et que si $I_2 = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\mathcal{O}$, on a

$$\bar{\nu}_{I_1}(I_2) = \min_{1\leq j\leq m} \bar{\nu}_{I_1}(\varphi_j) \quad .$$

On peut même montrer que $\bar{\nu}_{I_1}(I_2) \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

0.3 <u>Remarque</u> : Si l'anneau $\mathcal{O}$ est normal (i.e. intégralement clos dans son anneau total de fractions) et si I est principal : $I = g\,.\,\mathcal{O}$, I est intégralement clos, i.e. tout élément de $\mathcal{O}$ entier sur I est dans I.
En effet, si $h \in \mathcal{O}$ est entier sur I, on peut écrire :

$$h^k + \alpha_1 g\, h^{k-1} + \ldots + \alpha_k g^k = 0 \qquad \text{avec } \alpha_i \in \mathcal{O} \ ,$$

ce qui signifie que $\frac{h}{g} \in \mathrm{Tot}(\mathcal{O})$ est entier sur $\mathcal{O}$, donc dans $\mathcal{O}$, et donc que $h \in I$.

0.4 <u>Proposition</u> : Soient W un espace analytique complexe réduit, $x \in W$ et $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ deux Idéaux cohérents définis sur un voisinage de x dans W. Posons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{W,x}$, $I_i = \mathcal{I}_{i,x}$ $(i = 1,2)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $I_2 \subseteq \overline{I_1}$ où $\overline{I_1}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}$ entiers sur I_1.

2) $\bar{\nu}_{I_1}(I_2) \geq 1$.

3) Pour tout morphisme $h : \mathbb{D} \to W$ tel que $h(0) = x$ $(\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\})$ on a :

$$I_2 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0} \subseteq I_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$$

(avec l'abus d'écriture : $I_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0} = h^* I_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$) .

4) Pour tout morphisme $g : W' \to W$ vérifiant la condition suivante :
Il existe un voisinage ouvert V de x dans W, sur lequel $\mathcal{I}_1$ est défini, et tel que :

i) $g|V : g^{-1}(V) \to V$ est propre et surjectif .

ii) $g^{-1}(V)$ est normal .

iii) $\mathfrak{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{g^{-1}(V)}$ est localement principal .

On a : Il existe un voisinage $U \subset V$ de x dans W sur lequel $\mathfrak{I}_2$ est défini et tel que :

$$\mathfrak{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{g^{-1}(U)} \subseteq \mathfrak{I}_1 \cdot \mathcal{O}_{g^{-1}(U)} .$$

<u>Remarque</u> : On peut obtenir un tel g de la manière suivante : Soit V un voisinage de x sur lequel $\mathfrak{I}_1$ est défini ; soit $\pi : W_1 \to W$ le composé de la modification de centre $\mathfrak{I}_1$ dans V et de l'inclusion $V \subset W$. Soit $N : W' \to W_1$ la normalisation de W_1. $g = \pi \circ N : W' \to W$ satisfait i), ii), iii) (pourvu que le support de $\mathfrak{I}_1$ contienne un voisinage de x). g est appelée : modification normalisée (ou éclatement normalisé) de $\mathfrak{I}_1$.

5) Il existe un $\mathcal{O}$-module fidèle de type fini M tel que $I_2 . M \subseteq I_1 . M$.

Les conditions énoncées sont de nature locale et algébriques. Elles sont encore équivalentes à la condition de nature transcendante que voici :

6) Remplaçons W par un voisinage de x, disons W', sur lequel $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ sont engendrés par leurs sections globales. Pour tout système de générateurs $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ de $\mathfrak{I}_2(W')$, et tout élément $h \in \mathfrak{I}_1(W')$, on peut trouver un voisinage V' de x, et une constante C telle que :

$$|h(w)| \leq C . \operatorname{Sup} |\varphi_i(w)| \qquad \text{pour } w \in V' \quad .$$

On déduit facilement de ce qui précède, et du théorème de finitude de Grauert, l'existence, pour tout $\mathcal{O}_W$-Idéal cohérent $\mathfrak{I}$, d'un Idéal cohérent $\overline{\mathfrak{I}}$ de $\overline{\mathcal{O}_W}$ tel que pour tout $x \in W$ on ait $(\overline{\mathfrak{I}})_x = \overline{\mathfrak{I}_x}$, où $\overline{\mathfrak{I}_x}$ désigne la fermeture intégrale de $\mathfrak{I}_x$ dans $\mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{W,x})$, i.e. l'ensemble des éléments de $\mathrm{Tot}(\mathcal{O}_{W,x})$ entiers sur $\mathfrak{I}_x$. $(\overline{\mathfrak{I}} \cap \mathcal{O}_W)_x$ nous fournira de même les éléments de $\mathcal{O}_{W,x}$ entiers sur $\mathfrak{I}_x$.

Enfin, $\bigoplus_{\nu \geq 0} \overline{\mathfrak{I}^\nu}$ et $\bigoplus_{\nu \geq 0} \overline{\mathfrak{I}}^\nu$ sont des $\bigoplus_{\nu \geq 0} \mathfrak{I}^\nu$-Modules gradués de présentation finie, et en particulier, posant à nouveau $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{W,x}$ et $I = \mathfrak{I}_x$, il existe ν_o et ν_o' tels que

$$I^{\nu} . \overline{I^{\nu_o}} = \overline{I^{\nu+\nu_o}} \qquad (\nu \geq 0)$$

$$I^{\nu} . \overline{I}^{\nu_o'} = \overline{I}^{\nu+\nu_o'} \qquad (\nu \geq 0)$$

(et de même en remplaçant $\overline{I}$ par $\overline{I} \cap \mathcal{O}$).

Ceci permet de montrer que pour calculer $\bar{\nu}_{I_1}(I_2)$, on peut remplacer I_1 ou I_2, ou les deux, par leur clôture intégrale dans $\mathcal{O}$ ou dans $\overline{\mathcal{O}}$, et de même que l'on peut définir $\bar{\nu}_{I_1}(I_2)$ comme limite de la suite $\frac{\tilde{\nu}(i)}{i}$ où

$$\tilde{\nu}(i) = \text{Sup}\,\{\nu / I_2^i \subset \overline{I_1^{\nu}}\} .$$

0.5 <u>Applications</u> :

1) Soit $f \in \mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{C}\{z_o, \dots, z_n\}$. f est entier sur l'idéal $\left(z_o \frac{\partial f}{\partial z_o}, \dots, z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{n+1}$. Nous allons appliquer le critère valuatif de dépendance intégrale de 0.4, 3).

Soit $h : (\mathbb{D},0) \to (\mathbb{C}^{n+1},0)$,et soit t une coordonnée locale sur $\mathbb{D}$. Nous avons

$$\frac{d}{dt}(f \circ h) = \Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} \circ h \frac{d(z_i \circ h)}{dt}$$

d'où, en notant ν_o l'ordre à l'origine des fonctions sur le disque :

$$\nu_o(f \circ h) - 1 \geq \min \left(\nu_o\left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \circ h\right) + \nu_o(z_i \circ h) - 1\right)$$

i.e.

$$\nu_o(f \circ h) \geq \min_{0 \leq i \leq n} \left(\nu_o\left(\left(z_i \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i}\right) \circ h\right)\right)$$

et donc $(f \circ h)\mathcal{O}_{\mathbb{D},0} \in \left(\left(z_o \cdot \frac{\partial f}{\partial z_o}\right) \circ h, \dots, \left(z_o \cdot \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \circ h\right)\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$. En particulier, f est entier sur l'idéal $\mathfrak{m} \, . \, j(f)$ [où $\mathfrak{m} = (z_o, \ldots, z_n)\mathcal{O}_{n+1}$, et $j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_o}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{n+1}$] et donc aussi sur $j(f)$. Le fait que f soit entier sur $\mathfrak{m} \, . \, j(f)$ jouera un rôle crucial plus loin. Remarquons que l'on peut interpréter ceci par une inégalité (cf. 0.4, 6)) : Il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $(z_o, \ldots, z_n) = z \in U$ on ait : $|f(z)| \leq C \, . \, \operatorname{Sup} \left| z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \right|$.

2) Soit $\Phi : (\mathbb{C}^N, 0) \to (\mathbb{C}^N, 0)$ germe d'application holomorphe. Choisissons des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_N$ à la source, $u_1, \ldots, u_N$ au but, et écrivons Φ par : $u_i = \varphi_i(z_1, \ldots, z_N)$, $1 \leq i \leq N$.

Soit $J = J(\Phi) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$ la matrice jacobienne de Φ. Le résultat est : si tous les $(N-1) \times (N-1)$-mineurs de J s'annulent en 0, on a, posant $\Delta = \det J$: Δ est entier, dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$ sur l'idéal $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\}$.

Soit en effet $h : (\mathbb{D}, 0) \to (\mathbb{C}^N, 0)$. On peut écrire

$$\frac{d}{dt}(\varphi_i \circ h) = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \circ h \, . \, \frac{d(z_j \circ h)}{dt} \qquad 1 \leq i \leq N$$

et grâce à Cramèr :

$$(\Delta \circ h) \frac{d}{dt}(z_j \circ h) = \sum_i (M_{ij} \circ h) \frac{d}{dt}(\varphi_i \circ h) \qquad 1 \leq j \leq N$$

où les M_{ij} sont des $(N-1) \times (N-1)$-mineurs de J.

En prenant les ordres :

$$\nu_o(\Delta \circ h) + \nu_o(z_j \circ h) - 1 \geq \min_{i,j} (\nu_o(\varphi_i \circ h) - 1 + \nu_o(M_{ij} \circ h))$$

mais si tous les M_{ij} s'annulent à l'origine, $\nu_o(M_{ij} \circ h) \geq \min_k(\nu_o(z_k \circ h))$, et en choisissant j tel que $\nu_o(z_j \circ h) = \min_k \nu_o(z_k \circ h)$ il vient bien :

$$\nu_o(\Delta \circ h) \geq \min_i(\nu_o(\varphi_i \circ h))$$

c'est-à-dire que $(\Delta \circ h)\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$ appartient à l'idéal engendré par les $(\varphi_i \circ h)\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$.

0.6 <u>Multiplicités et dépendance intégrale</u> :

Ici $\mathcal{O}$ est une algèbre analytique, et "primaire" signifie : primaire pour l'idéal maximal.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal primaire de $\mathcal{O}$. On rappelle que : il existe un entier ν_0 tel que pour tout $\nu \geq \nu_0$ l'application $\nu \longmapsto \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/\mathfrak{n}^{\nu}$ prenne les mêmes valeurs qu'un polynôme en ν, à coefficients rationnels, de degré $d = \dim \mathcal{O}$ dont le terme de plus haut degré peut s'écrire $e(\mathfrak{n})\frac{\nu^d}{d!}$ où $e(\mathfrak{n})$ est un entier, nommé multiplicité de $\mathfrak{n}$. (voir [Se]).

Nous supposerons dorénavant $\mathcal{O}$ réduite. L'intérêt de la notion de dépendance intégrale sur un idéal tient aux deux résultats suivants :

0.6.1

1) $e(\mathfrak{n}) = e(\bar{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{O})$ ($\mathfrak{n}$ idéal primaire de $\mathcal{O}$) ceci équivaut à : deux idéaux $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ tels que $\overline{\mathfrak{n}_1} = \overline{\mathfrak{n}_2}$ ont même multiplicité. (En particulier, si l'un est primaire, l'autre aussi).

2) (Théorème de Rees voir [R]) si $\mathcal{O}$ est équidimensionnel, $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$ deux idéaux primaires de $\mathcal{O}$:

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_2 \\ \\ e(\mathfrak{n}_1) = e(\mathfrak{n}_2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\mathfrak{n}_1} = \overline{\mathfrak{n}_2} \quad .$$

Montrons le point 1). (Le point 2) est beaucoup plus délicat et l'on renvoie à [R]).

Il suffit de remarquer deux propriétés élémentaires de la multiplicité : $\mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_2 \Rightarrow e(\mathfrak{n}_1) \geq e(\mathfrak{n}_2)$ et $e(\mathfrak{n}^k) = k^d e(\mathfrak{n})$, où $d = \dim \mathcal{O}$. On écrit alors

$$\mathfrak{n}_1^i \subseteq \mathfrak{n}_2^{\nu(i)} \Rightarrow i^d e(\mathfrak{n}_1) \geq \nu(i)^d e(\mathfrak{n}_2)$$

et donc

$$(\bar{\nu}_{\mathfrak{n}_2}(\mathfrak{n}_1))^d \leq \frac{e(\mathfrak{n}_1)}{e(\mathfrak{n}_2)}$$

(et l'on se gardera bien de croire à l'égalité).

Mais si $\mathfrak{n}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{n}_2}$ on a $\bar{\nu}_{\mathfrak{n}_2}(\mathfrak{n}_1) \geq 1$ d'après (0.4,2)) et donc $e(\mathfrak{n}_1) \geq e(\mathfrak{n}_2)$, d'où le résultat par symétrie.

0.6.2 Nous ferons d'autre part usage de la notion de multiplicité d'un idéal primaire $\mathfrak{n}$ pour un un $\mathcal{O}$-module de type fini M (cf. [Se]).
($\lg_{\mathcal{O}} M/\mathfrak{n}^{\nu}.M$ coïncide pour ν assez grand avec un polynôme de degré $d = \dim M$ dont le terme de plus haut degré peut s'écrire $e(\mathfrak{n};M)\frac{\nu^d}{d!}$, où $e(\mathfrak{n};M)$ est un entier appelé multiplicité de $\mathfrak{n}$ pour M)
et en particulier, nous utiliserons le fait que si $\mathfrak{n}$ est engendré par une M-suite (M $\mathcal{O}$-module de Macaulay) on a

$$e(\mathfrak{n},M) = \lg M/\mathfrak{n}.M \qquad \text{(cf. [Se])} \quad .$$

0.7 Pour pouvoir appliquer le critère de dépendance intégrale (0.4, 4)) nous utiliserons aussi le fait que sur un espace normal W', pour vérifier qu'un idéal localement principal $\mathfrak{I}_2$ est contenu dans un idéal inversible $\mathfrak{I}_1$, il suffit de vérifier l'inclusion sur un ouvert analytique dense de chaque composante irréductible du sous-espace de W' défini par $\mathfrak{I}_2$. Ceci est dû au fait que sur un espace normal, le lieu polaire d'une fonction méromorphe est soit de codimension 1, soit vide. (On applique ceci à $\mathfrak{I}_2^{-1}.\mathfrak{I}_1$).

§ 1. Le nombre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. (Rappels)

1.1 Soit $f=0$, $f \in \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\} = \mathcal{O}_{n+1}$ une équation pour un germe d'hypersurface $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$.

On dit que (X_o,x_o) est à singularité isolée en x_o si pour tout représentant suffisamment petit $X_o - \{x_o\}$ est non singulier.

Grâce au théorème des zéros de Hilbert, ceci revient à dire que l'idéal $\left(f, \frac{\partial f}{\partial z_o},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\cdot\mathcal{O}_{n+1}$ est primaire (pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$), et d'après 0.5, 1) et 0.6.1 ceci équivaut encore au fait que $j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\cdot\mathcal{O}_{n+1}$ est primaire. D'après 0.6.1, en fait, ces deux idéaux ont même multiplicité. On remarque que l'idéal $\left(f, \frac{\partial f}{\partial z_o},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$ ne dépend pas du choix des coordonnées, ni du choix de l'équation f ; (i.e. on peut impunément multiplier f par une unité, sans changer l'idéal) cette multiplicité ne dépend donc que du germe (X_o,x_o) et nous la noterons $\mu_{x_o}(X_o)$. Mais d'autre part, d'après 0.6.2

$$\mu_{x_o}(X_o) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\}/j(f) \quad .$$

Sous cette forme, ce nombre a été introduit par Milnor [M] :

1.2 <u>Théorème</u> (Milnor) : Il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que si

$$X = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} ; |z| < \varepsilon ; |f(z)| < \eta\}$$

l'application donnée par $f \in \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\}$, $f : X \to \mathbb{D}_\eta$ ($\mathbb{D}_\eta = \{t \in \mathbb{C}/|t| < \eta\}$) induit sur $X^* = X - f^{-1}\{0\}$ une fibration $f : X^* \to \mathbb{D}^*_\eta$ localement triviale (en particulier $f^{-1}(t) \subset X^*$ est lisse).

De plus $f^{-1}(t)$ n'a d'homologie qu'en dimensions 0 et n $(n=\dim_{x_o} X_o = \dim f^{-1}(t))$ et $H_n(f^{-1}(t),\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\mu_{x_o}(X_o)}$ (et $f^{-1}(t)$ est connexe). De plus, $f^{-1}(0)$ est contractile, et pour cette raison $\mu_{x_o}(X_o)$ est appelé le "nombre de cycles évanescents" de la singularité isolée d'hypersurface (X_o,x_o) (ou : son nombre de Milnor).

1.3 <u>Définition</u> : Soient (X_1,x_1) et (X_2,x_2) deux germes d'hypersurfaces analytiques complexes réduites (à singularité isolée ou non) de même dimension. Nous dirons que (X_1,x_1) et (X_2,x_2) ont le même type topologique si il existe des plongements locaux $(X_1,x_1)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$, $(X_2,x_2)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ et un germe en 0 d'homéomorphisme de paires $(\mathbb{C}^{n+1},X_1)\approx(\mathbb{C}^{n+1},X_2)$.
(et a posteriori, cette définition est indépendante des plongements choisis).
Nous avons comme corollaire du théorème de Milnor :

1.4 <u>Théorème</u> (cf. [T]) : Si (X_1,x_1) et (X_2,x_2) sont des hypersurfaces à singularité isolée, de même type topologique, $\mu_{x_1}(X_1)=\mu_{x_2}(X_2)$.

<u>Démonstration</u>♦ : A l'aide de l'existence des bons voisinages en géométrie analytique et de [M], il est facile de vérifier que le X_1^* (resp. X_2^*) du théorème 1.2 a le même type d'homotopie que le complémentaire de X_1 (resp. X_2) dans un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n+1}$(!)) et que si (X_1,x_1) et (X_2,x_2) ont même type topologique, ces complémentaires ont le même type d'homotopie. Ainsi X_1^* et X_2^* ont le même type d'homotopie, mais comme ils fibrent tous deux sur un disque épointé, la suite exacte d'une fibration nous montre tout de suite que les fibres ont même homotopie, donc que $\mu_{x_1}(X_1)=\mu_{x_2}(X_2)$.

***

♦ Pour une démonstration rédigée de façon plus détaillée, et un résultat plus fort (le fait que la monodromie est en fait un invariant du type topologique) voir l'exposé de Lê Dung Trang [L].

CHAPITRE I

§ 1. Présentation topologique de la suite $\mu^*_{x_o}(X_o)$

1.1 Lemme : Soient X un sous-espace analytique complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$, et $x \in X$. Pour tout $1 \leq i \leq n+1$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et un ouvert de Zariski dense $U_o^{(i)}$ de la grassmanienne $G^{(i)}$ $(= G^{n,i-1})$ des i-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par x tels que pour tout i-plan $H \in U_o^{(i)}$ on ait l'égalité ensembliste :

$$V \cap S(X \cap H) = V \cap H \cap S(X)$$

où S(X) désigne le lieu singulier de l'espace analytique X.
Remarquer que l'on a $S(X \cap H) \supseteq H \cap S(X)$ au voisinage de x, pour un i-plan H quelconque.

Démonstration : On peut se ramener au cas $i = n$ en considérant un i-plan comme intersection de $n+1-i$ n-plans. Il suffit donc de montrer que les hyperplans $H \in G^{(n)}$ tels que H soit transverse à $X - S(X)$ au voisinage de x forment un ouvert de Zariski non vide de $G^{(n)}$. De plus, puisque localement $X - S(X)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, on peut supposer X analytiquement irréductible de x, et donc équidimensionnel. Considérons l'ensemble $L_{X,x} = L$ des positions limites en x des plans tangents à X aux poents de $X - S(X)$. C'est un sous-espace analytique strict fermé (donc en fait algébrique) de $G^{(d)}$ où $d = \dim_x X < n+1$. Comme on le voit immédiatement (cf. Whitney : [W_1]) en le définissant comme fibre réduite de la modification $\omega : X' \to X$ déterminée par l'idéal obtenu en restreignant à X un idéal jacobien de X i.e. l'idéal engendré par les $(n+1-d) \times (n+1-d)$-mineurs de la matrice jacobienne associée à un système de générateurs $(f_1, \ldots, f_m)$

$(m \geq n+1-d)$ de l'idéal définissant X dans $\mathbb{C}^{n+1}$ au voisinage de x. Cet idéal dépend du choix des générateurs, mais pas sa restriction à X. De plus, on voit ainsi que $\dim \omega^{-1}(x) \leq d-1$ et puisque $L = |\omega^{-1}(x)|$, $\dim L \leq d-1$. Il nous suffit maintenant de montrer que l'ensemble des hyperplans de $G^{(n)}$ qui sont transverses dans $\mathbb{C}^{n+1}$ à tous les éléments de $L \subset G^{(d)}$, est un ouvert de Zariski non vide de $G^{(n)}$ $(= \mathbb{P}^n)$. Un tel hyperplan restera en effet transverse à $X - S(X)$ au voisinage de x. Or, l'ensemble des couples $(H,T) \in \mathbb{P}^n \times L$ tels que H ne soit pas transverse à T est un sous-ensemble algébrique fermé de dimension $\dim L + n - d \leq n-1$. Sa projection dans $\mathbb{P}^n$ est donc un sous-ensemble algébrique fermé de $\mathbb{P}^n$ de dimension $\leq n-1$, dont le complémentaire est l'ouvert de Zariski cherché.

1.2 <u>Remarque</u> : Si l'on considère l'idéal $\mathcal{J}(X)$ engendré par des équations locales de X et les mineurs considérés plus haut comme définissant le lieu singulier de X, le Lemme 1.1 dit que pour $H \in U_o^{(n)}$ nous avons l'égalité dans $\mathcal{O}_{H,x}$:

$$\sqrt{\mathcal{J}(X).\mathcal{O}_{H,x}} = \sqrt{\mathcal{J}(X \cap H).\mathcal{O}_{H,x}} \quad .$$

Mais il faut noter qu'il n'existe pas en général un ouvert de Zariski dense $U_o'^{(n)} \subset \mathbb{P}^n$ tel que pour $H \in U_o'^{(n)}$, on ait

$$\mathcal{J}(X).\mathcal{O}_{H,x} = \mathcal{J}(X \cap H).\mathcal{O}_{H,x} \quad .$$

Comme le montre l'exemple suivant :

$X \subset \mathbb{C}^3$ (z_o, z_1, z_2) est défini par $z_o.z_1.z_2 = 0$ et $x = (0)$. Un ouvert de Zariski se verra sur la carte affine de $\mathbb{P}^2$ correspondant aux hyperplans H d'équation $z_o = a_1 z_1 + a_2 z_2$. Or nous avons $\mathcal{J}(X) = (z_o z_1, z_1 z_2, z_2 z_o)\,\mathbb{C}\{\underline{z}\}$

$$\mathcal{J}(X).\mathcal{O}_{H,x} = (a_1 z_1^2, z_1 z_2, a_2 z_2^2)\,\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$$

et

$$\mathcal{J}(X \cap H).\mathcal{O}_{H,x} = (2a_1 z_1 z_2 + a_2 z_2^2,\ a_1 z_2^2 + 2a_2 z_1 z_2)\,\mathbb{C}\{z_1, z_2\} \quad .$$

On a bien sûr $\mathcal{J}(X \cap H).\mathcal{O}_{H,x} \subseteq \mathcal{J}(X).\mathcal{O}_{H,x}$, mais on a égalité si et seulement si $z_1.z_2 \in \mathcal{J}(X \cap H).\mathcal{O}_{H,x}$ i.e. si l'on peut trouver λ et μ dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$z_1.z_2 = 2a_1 \lambda z_1 z_2 + \lambda a_2 z_2^2 + \mu a_1 z_1^2 + 2a_2 \mu z_1 z_2$$

ou

$$\lambda a_2 z_2^2 + \mu a_1 z_1^2 = (1 - 2\lambda a_1 - 2\mu a_2) z_1.z_2$$

et une telle inégalité n'est possible que si

$$\lambda a_2 = \mu a_1 = 0$$

$$1 - 2\lambda a_1 - 2\mu a_2 = 0$$

et les hyperplans H pour lesquels l'égalité a lieu sont donc ceux qui satisfont : $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$ et $a_2 = 0$. Nous trouvons ainsi un constructible de dimension 1 de $\mathbb{P}^2$.

Si le lecteur désire un exemple à singularité isolée, on lui recommande : $z_o^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0$.

On peut remarquer ici que sauf pour $a_1 = a_2 = 0$, $\mathcal{J}(X).\mathcal{O}_{H,x}$ est entier sur $\mathcal{J}(X \cap H)\mathcal{O}_{H,x}$, ce qui est un résultat beaucoup plus fin que l'égalité des racines. On trouvera un résultat assez général dans cette direction au § 2.

1.3 <u>Corollaire</u> (Notations et hypothèses de 1.1) : Soit i_o la codimension de $S(X)$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ en x. Pour tout $0 \leq i \leq i_o$ il existe un ouvert de Zariski dense $U_1^{(i)}$ de $G^{(i)}$ tel que pour $H \in U_1^{(i)}$, $X \cap H$ soit à singularité isolée en x. (i.e. : $V \cap S(X \cap H) = \{x\}$ pour un voisinage V assez petit). En effet, pour $i \leq i_o$, les i-plans de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par x et qui coupent S(X) en x seulement au voisinage de x forment un ouvert de Zariski dense de $G^{(i)}$. $G_1^{(i)}$ est l'intersection de cet ouvert avec le $G_o^{(i)}$ de 1.1.

1.4 <u>Lemme</u> : Soit $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface analytique complexe réduite. Pour tout $0 \leq i \leq n+1$, il existe un ouvert de Zariski dense $U_2^{(i)}$ de $G^{(i)}$ tel que le type topologique de $(X \cap H, x)$ soit indépendant de $H \in U_2^{(i)}$. (Nous pouvons donc parler du type topologique d'une section plane générale de X (i.e. par un i-plan général).

<u>Démonstration</u> : Il suffit encore de montrer le résultat pour $i = n$. Or, nous pouvons construire une famille :

(*)
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, "\pi"] & Z \arrow[dl, shift left, "\pi"] \\ \mathbb{P}^n \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[ur, bend left, "\Sigma"] & \end{tikzcd}$$

telle que pout tout $H \in \mathbb{P}^n$ $(= G^{(n)})$, le germe en $\sigma(H)$ de $(\pi^{-1}(H), \pi^{-1}(H))$ soit isomorphe au germe en x de $(X \cap H, H)$. Choisissons en effet des coordonnées locales $z_o, \dots, z_n$ pour $\mathbb{C}^{n+1}$ en 0, et une équation $f(z_o, \dots, z_n) = 0$ pour $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$. Au-dessus d'un ouvert affine Y de $\mathbb{P}^n$, correspondant par exemple aux hyperplans d'équation $z_o - \sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$ on prend

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_Y \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, "\pi"] & Y \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, shift left, "\pi"] \\ Y \arrow[u, bend left, "\sigma"] \arrow[ur, bend left, "\Sigma"] & \end{tikzcd}$$

comme suit : $\mathfrak{X}_Y$ est défini dans $Y \times \mathbb{C}^n$ muni des coordonnées $(a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n)$ par $f(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i, z_1, \dots, z_n) = 0$; π est la première projection, Σ est la section $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$ et π est induit par π.

On peut maintenant stratifier π, ou du moins sa restriction à un voisinage assez petit de $\Sigma(\mathbb{P}^n)$, de telle façon que la restriction de $\mathfrak{X}$ à ce voisinage soit une union de strates. Ceci induit en particulier une stratification de $\mathbb{P}^n$, dont la strate de plus grande dimension est un ouvert de Zariski dense $U_2^{(n)}$. D'après un théorème de Thom ([E. M. S.] et [Ma]) on aura trivialité topologique locale de (*) au-dessus de $U_2^{(n)}$ et en particulier les germes $(\pi^{-1}(H),\pi^{-1}(H))_{\sigma(H)}$ auront même type topologique. Mais ce sont par construction les $(X\cap H,H)_x$ (à isomorphisme près).

Pour $i=1$, on conviendra que le type topologique de $X\cap H$ en x ($X\cap H$ est maintenant un point non réduit) est donné par la multiplicité d'intersection $(X.H)_x$.

1.5 <u>Définition</u> : Soit $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface analytique. Soit i_o la codimension dans $\mathbb{C}^{n+1}$ de $S(X_o)$. D'après le résultat précédent et (ch. 0, 1.4) nous pouvons parler du nombre de Milnor d'une section i-plane générale de (X_o,x_o), pourvu que $i\leq i_o$. Nous noterons $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$ ce nombre. Pour $i_o<i\leq n+1$, nous poserons $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)=+\infty$, et nous poserons

$$\mu^*_{x_o}(X_o) = (\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o),\dots,\mu^{(i)}_{x_o}(X_o),\dots,\mu^{(1)}_{x_o}(X_o),\mu^{(o)}_{x_o}(X_o)) \quad .$$

1.6 <u>Remarques</u> :

1) $\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)<\infty$ si et seulement si $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ est à singularité isolée, et c'est alors le nombre de Milnor habituel de la singularité isolée d'hypersurface (X_o,x_o).

2) $\mu^{(1)}_{x_o}(X_o)=\mathfrak{M}_{x_o}(X_o)-1$ où $\mathfrak{M}_{x_o}(X_o)$ désigne la multiplicité de l'hypersurface (X_o,x_o).

3) $\mu^{(o)}_{x_o}(X_o)=1$, mais nous le gardons par souci d'homogénéité.

1.7 Ce paragraphe se termine par des conjectures :

<u>Conjecture 1</u> : Si deux germes d'hypersurfaces analytiques complexes réduites (X_o,x_o) et (X_1,x_1) ont même type topologique (ch. 0, 1.3), il en est de même de leur section i-plane générale, (pour tout $1 \leq i \leq n = \dim_{x_o} X_o = \dim_{x_1} X_1$) (cet énoncé a un sens grâce à 1.4).

<u>Remarque</u> : Il suffit encore bien sûr de montrer le résultat pour $i = n$. On peut même se demander si $(X_o \cup H_o, x_o)$ et $(X_1 \cup H_1, x_1)$ ont encore même type topologique, où H_o et H_1 sont des n-plans généraux pour X_1 et X_2 respectivement. C'est ce dernier fait que l'on sait montrer pour $n = 1$ grâce aux travaux de Zariski (Zariski $[Z_1]$).

La conjecture 1 a une forme (affaiblie) numérique :

<u>Conjecture 1'</u> : Si (X_o,x_o) et (X_1,x_1) ont même type topologique, on a : $\mu^*_{x_o}(X_o) = \mu^*_{x_1}(X_1)$. (Zariski demandait dans $[Z_2]$ si $\mathfrak{M}_{x_o}(X_o) = \mathfrak{M}_{x_1}(X_1)$)

<u>Remarque</u> : Si (X_o,x_o) et (X_1,x_1) ont même type topologique, on a : $\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o) = \mu^{(n+1)}_{x_1}(X_1)$ en effet, si l'un des deux est fini, l'autre aussi (si l'on admet qu'une singularité effective d'hypersurface ne saurait avoir même type topologique qu'une hypersurface lisse : si $S(X_o) = x_o$ par exemple, on a sûrement $S(X_1) = x_1$), et si ces nombres sont tous deux finis, ils sont égaux d'après (ch. 0, 1.4).

§ 2. Présentation algébrique de la suite $\mu^*_{x_o}(X_o)$

2.1 Proposition (J. J. Risler et l'auteur (voir aussi Bhattacharya [B]))♦ : Soient $\mathcal{O}$ un anneau local nœthérien, de corps résiduel $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ infini, M un $\mathcal{O}$-module de type fini, $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k$ des idéaux $\mathfrak{m}$-primaires de $\mathcal{O}$. Considérons l'application $H_M : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ définie par :

$$H_M(\nu_1, \ldots, \nu_k) = \lg_{\mathcal{O}} M / \mathfrak{n}_1^{\nu_1}, \ldots, \mathfrak{n}_k^{\nu_k}.M \ .$$

Il existe des entiers ν_i^o $(1 \le i \le k)$ tels que pour $\nu_i \ge \nu_i^o$ $(1 \le i \le k)$, H_M prenne les mêmes valeurs qu'un polynôme à coefficients rationnels, de degré total $d = \dim M$. De plus, si nous notons $\overline{H}_M$ le polynôme homogène, somme des termes de plus haut degré du polynôme précédent, nous pouvons écrire :

$$\overline{H}_M(\nu_1, \ldots, \nu_k) = \frac{1}{d!} [\nu_1 \mathfrak{n}_1 + \ldots + \nu_k \mathfrak{n}_k \, ; M]^{[d]}$$

la puissance symbolique qui apparaît à droite s'écrivant par la formule de Newton :

$$[\nu_1 \mathfrak{n}_1 + \ldots + \nu_k \mathfrak{n}_k ; M]^{[d]} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| = d}} \frac{d!}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \left[\mathfrak{n}_1^{[\alpha_1]}, \ldots, \mathfrak{n}_k^{[\alpha_k]} ; M\right] \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_k^{\alpha_k} .$$

Il nous reste à définir le symbole $\left[\mathfrak{n}_1^{[\alpha_1]}, \ldots, \mathfrak{n}_k^{[\alpha_k]} ; M\right]$. Pour cela, une notation : choisissons pour un idéal $\mathfrak{n}$ (un des $\mathfrak{n}_i$) un système, disons minimal, de générateurs $(a_1, \ldots, a_l)$, et écrivons α combinaisons linéaires des a_i à coefficients dans $\mathcal{O}$:

$$b_i = \Sigma \lambda_{ij} a_j \quad 1 \le i \le \alpha \quad , \quad 1 \le j \le l, \qquad \text{où } \lambda = (\lambda_{i,j}) \in \mathcal{O}^{\alpha . l} \quad .$$

♦ Je me suis aperçu tardivement du lien étroit qui existe entre ce résultat et le théorème de Snapper (cf. S. Kleiman : Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math., vol. 84, No 2 (1966)).

Nous noterons $\mathfrak{n}^{[\alpha,\lambda]}$ l'idéal engendré par les b_i. On peut alors calculer $\left[\mathfrak{n}_1^{[\alpha_1]},\ldots,\mathfrak{n}_k^{[\alpha_k]};M\right]$ comme suit : pourvu que les classes modulo $\mathfrak{m}$ des matrices λ_t $(1\leq t\leq k)$ soient assez générales (i.e. $(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_k)$ dans un ouvert de $\pi K^{l_i\alpha_i}$) on a :

$$\left[\mathfrak{n}_1^{[\alpha_1]},\ldots,\mathfrak{n}_k^{[\alpha_k]};M\right] = e\left(\mathfrak{n}_1^{[\alpha_1,\lambda_1]}+\ldots+\mathfrak{n}_k^{[\alpha_k,\lambda_k]};M\right)$$

(notations de 0.6.2)

en termes simples, le symbole de gauche est la multiplicité pour M de l'idéal engendré par α_1 éléments généraux de $\mathfrak{n}_1,\ldots,\alpha_k$ éléments généraux de $\mathfrak{n}_k$. Le sens à donner au mot général apparaît dans la

Démonstration : La démonstration se fait suivant un schéma classique (cf. [Z.S.] tome II ou [N]) par récurrence sur d.

Lemme : Posons $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{s}=(\mathfrak{n}_2,\ldots,\mathfrak{n}_k)$, $\mu=(\nu_2,\ldots,\nu_k)$ et $\mathfrak{s}^\mu=\mathfrak{n}_2^{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{n}_k^{\nu_k}$. Etant donné un système minimal de générateurs $(a_1,\ldots,a_l)$ de $\mathfrak{n}_1$, il existe un ouvert de Zariski non vide U de K^l, et des entiers ν^o, et $\mu^o=(\nu_1^o,\ldots,\nu_k^o)$ tels que, posant $a=\sum_{i=1}^{l}\xi_i.a_i$, on ait, dès que $\nu\geq\nu_o$, $\mu\geq\mu^o$ (ordre produit), et $\overline{\xi}=(\overline{\xi}_1,\ldots,\overline{\xi}_l)\in U$ (où $\overline{\xi}_i$ = classe de ξ_i mode m).

$$\text{(E)}\quad lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^\nu.\mathfrak{s}^\mu.M+a.M)= lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^\nu.\mathfrak{s}^\mu.M)-lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^\mu.M)+lg_{\mathcal{O}}(0:a)_M$$

Preuve : Considérons l'anneau nœthérien gradué par ν (i.e. donnant le poids 0 aux éléments de $\mathfrak{s}$)

$$A=\bigoplus_{\nu,\mu}\mathfrak{n}^\nu.\mathfrak{s}^\mu/\mathfrak{n}^{\nu+1}.\mathfrak{s}^\mu$$

et le A-module gradué de type fini

$$G = \bigoplus_{\nu,\mu} \mathfrak{n}^{\nu}.\mathcal{J}^{\mu}.M \big/ \mathfrak{n}^{\nu+1}.\mathcal{J}^{\mu}.M \quad .$$

Soient $N_1,\dots,N_t$ les traces sur $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ des idéaux premiers homogènes de A associés à G, ne contenant pas $A_1 = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{n}.\mathcal{J}^{\mu} \big/ \mathfrak{n}^2.\mathcal{J}^{\mu}$. Ce sont des sous-$\mathcal{O}/\mathfrak{n}$-modules stricts de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. Nous voulons choisir nos ξ_i $(1 \leq i \leq l)$ de façon que la classe modulo $\mathfrak{n}^2$ de $a = \sum_{i=1}^{l} \xi_i \; a_i$ n'appartienne pas à $\bigcup_{j=1}^{t} N_j$. Si nous considérons $(\mathcal{O}/\mathfrak{n})^l \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0$ définie par $(\xi_1,\dots,\xi_l) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{l} \xi_i . a_i \bmod \mathfrak{n}^2$, qui est surjective puisque les a_i engendrent $\mathfrak{n}$, nous obtenons après tensorisation par $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}^l \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

grâce à Nakayama, les $N_i \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K}$ ont pour image dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K}$ des sous-$\mathcal{K}$-espaces vectoriels stricts $\overline{N}_i$. Notre ouvert de Zariski U est le complémentaire de la réunion des images réciproques des $\overline{N}_i$ par φ. Puisque φ est surjectif et $\mathcal{K}$ infini, U n'est pas vide.

Or, $a = \Sigma \xi_i \; a_i$ avec $\overline{\xi} \in U$ est un élément superficiel pour G, c'est-à-dire qu'il existe ν^1 tel que pour $\nu \geq \nu^1$ on ait :

$$(*) \qquad (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathcal{J}^{\mu}.M : a)_M \cap (\mathfrak{n}^{\nu^1}.\mathcal{J}^{\mu}.M) = \mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathcal{J}^{\mu}.M \; .$$

Si nous considérons la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules de longueur finie :

$$0 \to (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathcal{J}^{\mu} M : a)_M \big/ \mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathcal{J}^{\mu}.M \to M \big/ \mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathcal{J}^{\mu}.M \xrightarrow{\times a} M \big/ \mathfrak{n}^{\nu}.\mathcal{J}^{\mu} M \to$$
$$\to M \big/ \mathfrak{n}^{\nu}.\mathcal{J}^{\mu}.M + a.M \longrightarrow 0$$

il vient par l'additivité des longueurs :

$$G = \bigoplus_{\nu,\mu} \mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M / \mathfrak{n}^{\nu+1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \quad .$$

Soient $N_1,\ldots,N_t$ les traces sur $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ des idéaux premiers homogènes de A associés à G, ne contenant pas $A_1 = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{n}.\mathfrak{s}^{\mu}/\mathfrak{n}^2.\mathfrak{s}^{\mu}$. Ce sont des sous-$\mathcal{O}/\mathfrak{n}$-modules stricts de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$. Nous voulons choisir nos ξ_i $(1 \leq i \leq l)$ de façon que la classe modulo $\mathfrak{n}^2$ de $a = \sum_{i=1}^{l} \xi_i\, a_i$ n'appartienne pas à $\bigcup_{j=1}^{t} N_j$. Si nous considérons $(\mathcal{O}/\mathfrak{n})^l \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0$ définie par $(\xi_1,\ldots,\xi_l) \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{l} \xi_i . a_i \bmod \mathfrak{n}^2$, qui est surjective puisque les a_i engendrent $\mathfrak{n}$, nous obtenons après tensorisation par $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}^l \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

grâce à Nakayama, les $N_i \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K}$ ont pour image dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \underset{\mathcal{O}/\mathfrak{n}}{\otimes} \mathcal{K}$ des sous-$\mathcal{K}$-espaces vectoriels stricts $\overline{N}_i$. Notre ouvert de Zariski U est le complémentaire de la réunion des images réciproques des $\overline{N}_i$ par φ. Puisque φ est surjectif et $\mathcal{K}$ infini, U n'est pas vide.

Or, $a = \Sigma \xi_i\, a_i$ avec $\overline{\xi} \in U$ est un élément superficiel pour G, c'est-à-dire qu'il existe ν^1 tel que pour $\nu \geq \nu^1$ on ait :

$$(*) \qquad (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M \cap (\mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M) = \mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \;.$$

Si nous considérons la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules de longueur finie :

$$0 \to (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu} M : a)_M / \mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \to M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \xrightarrow{\times a} M/\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu} M \to$$

$$\to M/\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M + a.M \longrightarrow 0$$

il vient par l'additivité des longueurs :

$$(E') \qquad \lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M + a.M) = \lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M) - \lg_{\mathcal{O}}(M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M) + \lg_{\mathcal{O}}((\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M) \ .$$

Nous allons montrer que μ et ν assez grands

$$(**) \qquad (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \simeq (0 : a)_M$$

pour ν assez grand, on a, par construction de a, l'égalité $(*)$.

Soit $m \in (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M$, i.e. $a.m \in \mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \cap a.M$, par une très facile extension du lemme d'Artin-Rees, au cas de plusieurs idéaux, on trouve ν_o et μ_o tels que : $\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \cap a.M = \mathfrak{n}^{\nu-\nu_o}.\mathfrak{s}^{\mu-\mu_o}(\mathfrak{n}^{\nu_o}.\mathfrak{s}^{\mu_o}.M \cap a.M)$ $(\nu \geq \nu_o , \mu \geq \mu_o)$ et donc $a.m \in \mathfrak{n}^{\nu-\nu_o}.\mathfrak{s}^{\mu-\mu_o}.a.M$. Ecrivons $a.m = a.m'$ avec $m' \in \mathfrak{n}^{\nu-\nu_o}.\mathfrak{s}^{\mu-\mu_o}.M$ les idéaux $\mathfrak{n}_i$ étant primaires, si ν est assez grand, on a $\mathfrak{n}^{\nu-\nu_o}.M \subset \mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu_o}.M$ et donc, pour ν assez grand, $m' \in \mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M$.

Nous venons de montrer que pour $\mu \geq \mu_o$ et ν assez grand, $(\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M = (0 : a)_M + \mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M$ (en effet $m - m' \in (0 : a)_M$). Il vient :

$$(\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M/\mathfrak{n}^{\nu-1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M = (\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M : a)_M + \mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M/\mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M$$

$$= (0 : a)_M + \mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M/\mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M = (0 : a)_M/\mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \cap (0 : a)_M \ .$$

Fixons $\mu \geq \mu_o$. La longueur du dernier quotient ne dépend que de ν_1. Mais d'autre part, d'après (E'), on voit qu'elle n'en dépend pas. Comme les $\mathfrak{n}^{\nu}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \cap (0 : a)_M$ décroissent, on voit que l'on doit avoir $\mathfrak{n}^{\nu_1}.\mathfrak{s}^{\mu}.M \cap (0 : a)_M = (0)$, ce qui démontre (E). Il résulte immédiatement du lemme que si tous les ν_i sont assez grands, et $a \in \mathfrak{n}_1$ choisi comme dans le lemme :

$$(***) \quad H_M(\nu_1,\ldots,\nu_k) - H_M(\nu_1 - 1,\nu_2,\ldots,\nu_k) = H_{M/a.M}(\nu_1,\ldots,\nu_k) + \lg((0 : a)_M)$$

et $\dim M/a.M = \dim M - 1$.

Pour $\dim M = 0$, on a $H_M(\nu_1,\ldots,\nu_k) = \lg M$ si tous les ν_i sont assez grands, et l'on déduit facilement de (***) par récurrence sur d, que H_M est un polynôme en les ν_i, de degré d, dès que les ν_i sont assez grands. En regardant seulement les termes de plus haut degré, (***) nous donne

$$\overline{H}_M(\nu_1,\ldots,\nu_m) - \overline{H}_M(\nu_1 - 1,\nu_2,\ldots,\nu_m) = \overline{H}_{M/a.M}(\nu_1,\ldots,\nu_m)$$

qui se traduit par :

$$\left[n_1^{[\alpha_1]},\ldots,n_k^{[\alpha_k]};M\right] = \left[n_1^{[\alpha_1-1]},\ldots,n_k^{[\alpha_k]};M/a.M\right] ,$$

et il est bien connu (cf. [N]) que cette formule peut servir de définition par récurrence de la multiplicité.

2.2 Corollaire (Symétrie) : $\mathcal{O}$ et les n_i $(1\le i\le k)$ étant comme dans 2.1, M $\mathcal{O}$-module de type fini, on a pour des entiers $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ tels que $\Sigma\alpha_i = d = \dim M$, et $i,j \in (1,\ldots,k)$, dès que les λ_i sont assez générales :

$$e(n_i;M\big/(n_1^{[\alpha_1,\lambda_1]}+\ldots+\widehat{n_i^{[\alpha_i,\lambda_i]}}+\ldots+n_k^{[\alpha_k,\lambda_k]})M)$$

$$= e(n_i^{[\alpha_i,\lambda_i]};\text{idem}) = e(n_j;M\big/(n_1^{[\alpha_1,\lambda_1]}+\ldots+\widehat{n_j^{[\alpha_j,\lambda_j]}}+\ldots+n_k^{[\alpha_k,\lambda_k]}).M) .$$

2.3 Remarque : Il est assez facile de voir que si $M = \mathcal{O}$, on ne change pas $\overline{H}_{\mathcal{O}}(\nu_1,\ldots,\nu_k)$ en remplaçant les n_i par leur clôture intégrale dans $\mathcal{O}$ (supposé réduit).

2.4 En particulier, si $\mathcal{O}$ est un anneau local nœthérien, de Macaulay, et de corps résiduel $k = \mathcal{O}/m$ infini, et si n_1 et n_2 sont deux idéaux m-primaires de $\mathcal{O}$, l'application $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$H(\nu_1,\nu_2) = \lg \mathcal{O}/\mathfrak{n}_1^{\nu_1}\cdot\mathfrak{n}_2^{\nu_2}$$

prend les mêmes valeurs pour ν_1 et ν_2 assez grands qu'un polynôme de degré total $d = \dim\mathcal{O}$ dont la partie de plus haut degré s'écrit :

$$\overline{H}(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{d!}[\nu_1\cdot\mathfrak{n}_1 + \nu_2\cdot\mathfrak{n}_2]^{[d]}$$

$$= \frac{1}{d!}\sum_{i=o}^{d}\binom{d}{i}\underline{e}(\mathfrak{n}_1^{[d-i]},\mathfrak{n}_2^{[i]})\nu_1^{d-i}\,\nu_2^{i}$$

où
$$\underline{e}(\mathfrak{n}_1^{[d-i]},\mathfrak{n}_2^{[i]}) = e(\mathfrak{n}_1^{[d-i,\lambda_{d-i}]};\mathcal{O}/\mathfrak{n}_2^{[i,\lambda_i]})$$

$$= e(\mathfrak{n}_1,\mathcal{O}/\mathfrak{n}_2^{[i,\lambda_i]}) = e(\mathfrak{n}_2;\mathcal{O}/\mathfrak{n}_1^{[d-i,\lambda_{d-i}]})$$

$$= e(\mathfrak{n}_2^{[i,\lambda_i]},\mathcal{O}/\mathfrak{n}_1^{[d-i,\lambda_{d-i}]}) = \lg \mathcal{O}/\mathfrak{n}_1^{[d-i,\lambda_{d-i}]} + \mathfrak{n}_2^{[i,\lambda_i]}$$

(notations de ch. 0, 6.2) pourvu que les classes mod $\mathfrak{m}$ des matrices λ_i, λ_{d-i} soient dans des ouverts de Zariski convenables (noter aussi que $e(\mathfrak{n}_1^{[d]},\mathfrak{n}_2^{[o]}) = e(\mathfrak{n}_1)$ et symétriquement).

Si nous prenons $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m} = (z_o,\dots,z_n)$, nous trouvons comme coefficient de $\binom{n+1}{i}\nu_1^{d-i}.\nu_2^{i}$ la multiplicité de la restriction de $\mathfrak{n}_2$ à un i-plan "général" de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$.

2.5 En particulier, la formule précédente nous donne une expression de la multiplicité du produit de deux idéaux primaires $\mathfrak{n}_1$ et $\mathfrak{n}_2$

$$e(\mathfrak{n}_1\cdot\mathfrak{n}_2) = \sum_{i=o}^{d}\binom{d}{i}\underline{e}(\mathfrak{n}_1^{[d-i]},\mathfrak{n}_2^{[i]})$$

qui est une formule du binôme symbolique pour les $e^{1/d}(\mathfrak{n})$. Ceci suggère la question : a-t-on toujours $(\underline{e}(\mathfrak{n}_1^{[d-i]},\mathfrak{n}_2^{[i]}))^d \leq e(\mathfrak{n}_1)^{d-i}.e(\mathfrak{n}_2)^i$, i.e. l'inégalité :

$$(e(\mathfrak{n}_1\cdot\mathfrak{n}_2))^{1/d} \leq (e(\mathfrak{n}_1))^{1/d} + (e(\mathfrak{n}_2))^{1/d} \quad ?$$

(Cette inégalité résulte facilement, si $\mathcal{O}=\mathbb{C}\{z_o,z_1\}$, du Corollaire 2, p. 6 de [Ri_1]).

Nous verrons plus bas des questions connexes dans un cas particulier.

2.6 Reprenons $\mathcal{O}=\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$, $\mathfrak{n}_1=\mathfrak{m}$, et prenons pour $\mathfrak{n}_2$ l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}$ où $f=0$ $(f\in\mathcal{O})$ est une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$.

Nous trouvons une application dont l'étude avait été suggérée par Hironaka :

$$K_{X_o,x_o} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$K_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}\big/ \mathfrak{m}^{\nu_1}.j(f)^{\nu_2}$$

et avec la notation habituelle

$$\overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=o}^{n}\binom{n+1}{i}\tilde{\mu}^{(i)}\,\nu_1^{n+1-i}.\nu_2^{i}$$

où $\tilde{\mu}^{(i)}$ est la multiplicité de la restriction de l'idéal $j(f)$ à un i-plan général de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$. Nous voyons que $\tilde{\mu}^{(n+1)}$ n'est autre que le nombre de cycles évanescents $\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$, (ch. 0) et que $\tilde{\mu}^{(1)}$, multiplicité d'une combinaison linéaire générale des $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ n'est autre que $\mathfrak{M}_{x_o}(X_o)-1$, c'est-à-dire $\mu^{(1)}$. Le but de la proposition suivante est de montrer que l'on a $\tilde{\mu}^{(i)}=\mu^{(i)}$ $(1\leq i\leq n+1)$, où les $\mu^{(i)}$ sont ceux du § 1.

2.7 <u>Proposition</u> : (La version plus générale sera publiée ailleurs). Soit $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface analytique complexe à singularité isolée. Choisissons des coordonnées $(z_o,\dots,z_n)$ pour $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ et une équation $f=0$, $f\in\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ pour (X_o,x_o). Nous noterons toujours $j(f)$

(resp. J(f)) pour l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{n+1}$ (resp. $\left(f, \frac{\partial f}{\partial z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{n+1}$). Pour tout $0 \leq i \leq n+1$, il existe un ouvert dense $U^{(i)}$ de la grassmanienne $G^{(i)}$ des i-plans de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ tel que, si $H \in U^{(i)}$:

$$\overline{J(f.\mathcal{O}_{H,0})} = \overline{J(f).\mathcal{O}_{H,0}}$$

ou si l'on préfère, puisque f est toujours entier sur j(f) :

$$\overline{j(f.\mathcal{O}_{H,0})} = \overline{j(f).\mathcal{O}_{H,0}}$$

i.e. l'idéal jacobien de la restriction de f à H et la restriction à H de l'idéal jacobien de f ont même clôture intégrale dans $\mathcal{O}_{H,0}$. (Souvenons-nous que l'on a toujours $j(f.\mathcal{O}_{H,0}) \subseteq j(f).\mathcal{O}_{H,0}$).

Démonstration : Il suffit de vérifier l'assertion pour $i = n$, et une carte affine de $\mathbb{P}^n (\simeq G^{(n)})$. Tout d'abord, il existe un ouvert dense $U_1^{(n)}$ de $\mathbb{P}^n$ tel que si $H \in U_1^{(n)}$, $(X_o \cap H, x_o)$ soit à singularité isolée (ch. I, 1.3).
Soit Y l'intersection avec $U_1^{(n)}$ de l'ouvert affine $\mathbb{C}^n$ (coordonnées $a_1, \dots, a_n$) de $\mathbb{P}^n$ formé des hyperplans d'équation : $z_o - \sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0$.
Pour $g \in \mathbb{C}\{z_o, \dots, z_n\}$ nous noterons toujours g_a pour $g(\sum_{i=1}^{n} a_i z_i, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}\{a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n\}$. Considérons sur $Y \times \mathbb{C}^n$, muni des coordonnées $(a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n)$ les trois Idéaux :

$$\mathcal{J} = (z_1, \dots, z_n)\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{C}^n} \quad \text{(définissant } Y \times \{0\} \text{ dans } Y \times \mathbb{C}^n)$$

$$\mathfrak{I}_1 = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} f_a\right)\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{C}^n}$$

$$\mathfrak{I}_2 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)_a\right)\mathcal{O}_{Y\times\mathbb{C}^n}$$

définis sur un voisinage ouvert V de $Y \times \{0\}$.

Nous noterons $Y \subset Y \times \mathbb{C}^n$ pour $Y \times \{0\} \subset Y \times \mathbb{C}^n$. Remarquons que $\mathfrak{I}_1$ contient une puissance de $\mathcal{J}$, au voisinage de tout point de Y.

Soit $\omega : Z \to Y \times \mathbb{C}^n$ la flèche composée :

$$Z \xrightarrow{n} Z_o \xrightarrow{\pi} V \hookrightarrow Y \times \mathbb{C}^n$$

où π est la modification définie par $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathfrak{I}_2$, et n la normalisation de Z_o. Ainsi, $\mathcal{J}.\mathcal{O}_Z$, $\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_Z$ et $\mathfrak{I}_2.\mathcal{O}_Z$ sont des Idéaux inversibles. Soit $Y' \subset Z$ le sous-espace défini par $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_Z$. Puisque $\mathfrak{I}_1$ contient une puissance de $\mathcal{J}$, $|Y'| = |\omega^{-1}(Y)|$ et de plus, Y' étant projectif au-dessus de Y, il existe un ouvert analytique dense U de Y tel que $|Y'|_{|U} \to U$ soit plat.

Nous allons montrer que pour un hyperplan $z_o = \sum a_i z_i$ correspondant à un point $a \in U$, on a

$$\overline{j(f.\mathcal{O}_{H,0})} = \overline{j(f).\mathcal{O}_{H,0}}$$

en montrant le résultat plus fort :

$$\overline{\mathfrak{I}_{1,\{a\}\times\{0\}}} = \overline{\mathfrak{I}_{2,\{a\}\times\{0\}}}$$

(égalité des clôtures intégrales des germes de $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ en $\{a\}\times\{0\}$).
Pour cela, d'après (ch.0,0.4), il suffit de montrer qu'en tout point $z \in \omega^{-1}(\{a\}\times\{0\})$ on a :

$$\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z} = \mathfrak{I}_2.\mathcal{O}_{Z,z} ,$$

ce qui va résulter du :

<u>Lemme</u> : Pour $a \in U$, on a en tout point $z \in \omega^{-1}(\{a\}\times\{0\})$

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\right)\mathcal{O}_{Z,z} \in \mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z} \quad , \ (1 \leq i \leq n) \quad .$$

<u>Démonstration</u> : $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_Z$ étant inversible, il suffit d'après (ch. 0, 0.7) de montrer l'inclusion en un point général de chaque composante irréductible de $|Y'|_{|U} = |\omega^{-1}(U \times \{0\})|$.

Or, $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_Z$ étant inversible, et Z normal, les conditions suivantes sont réalisées sur un ouvert dense de chaque composante irréductible de $|\omega^{-1}(U \times \{0\})|$.

1) Z est lisse en z.

2) $|\omega^{-1}(Y)|$ est lisse sur Y en z (et donc lisse).

3) Le lieu des zéros de $f_a.\mathcal{O}_Z$ est contenu dans $|\omega^{-1}(Y)|$ au voisinage de z.

En effet, Z étant normal est non singulier en codimension 1, et $|\omega^{-1}(Y)|$ étant plat au-dessus de U, l'ensemble de ses points de lissité sur Y induit un ouvert dense sur chacune des composantes irréductibles de $|\omega^{-1}(Y)|_{|U}$.

Enfin, l'ensemble des points où le lieu des zéros de $f_a.\mathcal{O}_Z$ ne coïncide pas avec $|\omega^{-1}(Y)|$ induit un fermé analytique strict sur chaque composante irréductible.

En un tel point $z \in \omega^{-1}(Y)$, nous pouvons, au prix d'un changement linéaire des coordonnées $(z_o, \ldots, z_n)$ qui n'affecte pas les idéaux jacobiens, utiliser le théorème des fonctions implicites pour choisir des coordonnées locales $(a'_1, \ldots, a'_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, \pi)$ pour Z telles que :

1) $a'_i.\mathcal{O}_{Z,z} = (a_i \circ \omega)\mathcal{O}_{Z,z} \qquad (1 \leq i \leq n)$

2) $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z} = \pi^{\nu}.\mathcal{O}_{Z,z}$

3) $(f_a \circ \omega)\mathcal{O}_{Z,z} = A(a'_1, \ldots, a'_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, \pi).\pi^{\mu}$

où A est inversible dans $\mathcal{O}_{Z,z} = \mathbb{C}\{a'_1,\dots,a'_n\,,\, b_1,\dots,b_{n-1}\,,\,\pi\}$.
De 2), on déduit :

$$4)\qquad (z_i \circ \omega)\mathcal{O}_{Z,z} = \zeta_i(a'_1,\dots,a'_n\,,\, b_1,\dots,b_{n-1}\,,\,\pi).\pi^k \quad , \text{ avec } k \leq \nu.$$

Or, si nous évaluons :

$$\frac{\partial}{\partial a'_i} f_a \circ \omega = \frac{\partial A}{\partial a'_i}\,.\,\pi^{\mu} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f_a\right)\circ\omega\,.\,\frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j\circ\omega) + \left(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\right)\circ\omega$$

Nous voyons que pour montrer que $\left(\frac{\partial}{\partial a_i} f_a\right)\circ\omega.\mathcal{O}_{Z,z} \in \mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z}$, il nous suffit de montrer que $\mu \geq \nu$.

En effet, d'après 4) $\frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j\circ\omega)\mathcal{O}_{Z,z} \in \mathcal{J}.\mathcal{O}_{Z,z}$ et donc $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f_a\right)\circ\omega\,.\,\frac{\partial}{\partial a'_i}(z_j\circ\omega) \in \mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z}$. Si nous montrons que $\frac{\partial A}{\partial a'_i}\,\pi^{\mu} \in \mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z}$, nous avons gagné, et $\mu \geq \nu$ suffit pour cela. Or, d'après (ch. 0, 0.5), pour a fixé, f_a doit être entier sur $\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} f_a,\dots,z_n\frac{\partial}{\partial z_n} f_a\right)\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$, et en particulier, si nous désignons par W le sous-espace de Z défini par $a'_1 = . = a'_n = 0$, $(f_{(0)}\circ\omega)\mathcal{O}_{W,z}$ doit être entier sur l'idéal $\pi^{\nu}.\mathcal{O}_{W,z}$. Mais ce dernier est un idéal inversible d'un espace lisse, donc normal, et est donc intégralement clos. Il faut donc que $A(0,\dots,0\,,\,b_1,\dots,b_{n-1}\,,\,\pi).\pi^{\mu}$ appartienne à l'idéal $\pi^{\nu}.\mathbb{C}\{b_1,\dots,b_{n-1}\,,\,\pi\}$. Mais A est une unité. Il faut donc $\mu \geq \nu$, et nous avons le lemme.

<u>Remarque</u> : En fait, nous venons de montrer que $f_a\,.\,\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ était entier sur $\mathcal{J}.\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{U\times\mathbb{C}^n}$ au voisinage de tout point de $U\times\{0\}$.
Pour achever la démonstration de la proposition, nous allons montrer qu'en tout point $z\in\omega^{-1}(U\times\{0\})$ on a $\mathfrak{I}_1.\mathcal{O}_{Z,z} = \mathfrak{I}_2.\mathcal{O}_{Z,z}$. Pour ce faire, remarquons que grâce au Lemme, $\mathfrak{I}_2.\mathcal{O}_{Z,z}$ ne saurait être engendré par $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a\circ\omega.\mathcal{O}_{Z,z}$ à l'exclusion de tous les autres $\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)_a\circ\omega.\mathcal{O}_{Z,z}$.
Supposons en effet qu'il en soit ainsi : cela signifie que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \lambda_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$$

avec $\lambda_i \in \mathfrak{m}_{Z,z}$ $(1 \leq i \leq n)$.

On en déduit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_i} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = (a_i' + \lambda_i)\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$$

(puisque $\frac{\partial}{\partial z_i} f_a = a_i\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a + \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)_a$), et en multipliant par $z_j \circ \omega$ $(1 \leq j \leq n)$

$$\left(z_j \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = (a_i' + \lambda_i)\left(\frac{\partial}{\partial a_j} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$$

puisque $\frac{\partial}{\partial a_j} f_a = z_j\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_a$.

D'après le lemme : $\left(\frac{\partial}{\partial a_j} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} \in \mathcal{J}.\mathfrak{J}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$, et d'autre part, $\mathcal{J}.\mathfrak{J}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ est sûrement engendré par un des $\left(z_j \cdot \frac{\partial}{\partial z_i} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ (lemme de Nakayama). Il faudrait donc que l'un des $(a_i' + \lambda_i)\mathcal{O}_{Z,z}$ soit inversible, d'où la contradiction cherchée, puisque les $\lambda_i \in \mathfrak{m}_{Z,z}$. Ceci montre que $\mathfrak{J}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ est engendré par un des $\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ $(1 \leq i \leq n)$, disons $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$. Nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \mu_i\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

avec $\mu_1 = 1$.

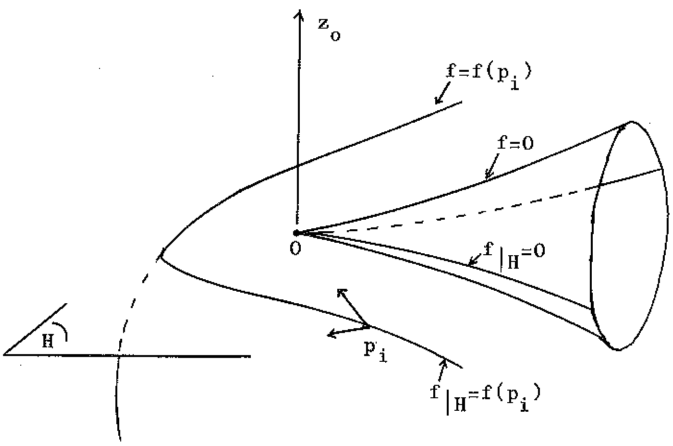
On en déduit

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_j} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = (a_j' \mu_o + \mu_j)\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_a \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$$

et $a_1' \mu_o + \mu_1 = a_1' \cdot \mu_o + 1$ est inversible : on voit que $\mathfrak{J}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$ est engendré par $\left(\frac{\partial}{\partial z_1} f_a\right) \circ \omega \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$, et que $\mathfrak{J}_1 \cdot \mathcal{O}_{Z,z} = \mathfrak{J}_2 \cdot \mathcal{O}_{Z,z}$. Q. E. D.

2.8 Interprétation géométrique :

On peut résumer la proposition précédente en disant qu'il existe un ouvert dense de $\mathbb{P}^n$, noté U, tel que si $H \in U$, et si $z_o = 0$ est une équation pour H, dans des coordonnées $(z_o, \ldots, z_n)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o}\right)_{z_o=0}$ est entier sur l'idéal $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)_{z_o=0}, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)_{z_o=0}\right)$ dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$. D'après (0.4, 6)), ceci signifie que si nous prenons une suite de points $p_i \in H$ convergeant vers l'origine, la direction de l'hyperplan H n'est pas adhérente dans $\mathbb{P}^n$ à l'ensemble des directions des hyperplans tangents aux hypersurfaces de niveau $f(z_o, \ldots, z_n) = f(p_i)$ aux points p_i .



Ou si on préfère, le vecteur "normal" à l'hypersurface de niveau $f = f(p_i)$ ne tend pas à être "orthogonal" au vecteur "normal" à l'hypersurface de niveau $f|_H = f(p_i)$ (les guillemets viennent du produit hermitien !).
Ceci montre bien pourquoi la proposition est relativement longue à démontrer : l'hyperplan H influe à la fois sur les points que l'on choisit et sur la

la condition à réaliser. Par contraste, démontrons la :

2.9 Proposition : Soit $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ une hypersurface réduite. Il existe un ouvert de Zariski dense $U'^{(n)}$ de $\mathbb{P}^n$ $(=G^{(n)})$ tel que pour $H \in U'^{(n)}$, si $z_o = 0$ est une équation de H, on a dans des coordonnées $(z_o,\dots,z_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial z_o}\cdot \mathcal{O}_{X_o,x_o} \text{ est entier sur } \left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\cdot \mathcal{O}_{X_o,x_o}\ .$$

En effet, il suffit de choisir H dans le complémentaire de l'ensemble L_{X_o,x_o} des positions limites d'hyperplans tangents aux points lisses de X_o. (§ 1.1). On aura alors au voisinage de x_o

$$\left|\left.\frac{\partial f}{\partial z_o}\right|_{X_o}\right| \leq C\ .\ \sup_{1\leq i\leq n}\left|\left.\frac{\partial f}{\partial z_i}\right|_{X_o}\right|$$

et la proposition d'après 0.6, 6).

Ici les suites de points à considérer sont sur X_o et ne dépendent pas de H.

Revenons maintenant aux conséquences de 2.7.

2.10 Proposition : Soit $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface analytique complexe, à singularité isolée. Choisissons des coordonnées $(z_o,\dots,z_n)$ pour $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ et une équation $f=0$ pour (X_o,x_o). Considérons $j(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$, $m=(z_o,\dots,z_n)$, et l'application d'Hironaka : $K(\nu_1,\nu_2)=\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/m^{\nu_1}.j(f)^{\nu_2}$, pour ν_1 et ν_2 assez grands, K prend les mêmes valeurs qu'un polynôme de degré $n+1$ dont les termes de plus haut degré s'écrivent :

$$\overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\mu^{(n+1)}\nu_2^{n+1}+\dots+\binom{n+1}{i}\mu^{(i)}\nu_1^{n+1-i}\nu_2^{i}+\dots+\mu^{(0)}\nu_1^{n+1}\right)$$

où $\mu^{(i)}=\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$ (1.5).

<u>Démonstration</u> : Ceci résulte immédiatement de 2.6 et 2.7 puisque d'après (ch. 0, 6.1) deux idéaux qui ont même clôture intégrale ont même multiplicité, et donc le $\tilde{\mu}^{(i)}$ de 2.6 est $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$. Ceci constitue la présentation algébrique de la suite $\mu^*_{x_o}(X_o)$. $\overline{K}_{X_o,x_o}$ est bien un invariant analytique de (X_o,x_o), puisqu'il ne dépend en fait que de $\overline{j(f)}$.

*
* *

CHAPITRE II

§ 1. Les formules de restriction

1.1 Soit $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée. Soient $H\in\mathbb{P}^n$ un hyperplan de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$, et $(z_o,\dots,z_n)$ un système de coordonnées locales pour $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ tel que H soit donné par $z_o=0$. On suppose H assez général pour que $(X_o\cap H,x_o)$ soit encore à singularité isolée. La restriction à (X_o,x_o) de la fonction coordonnée z_o est un morphisme plat, qui nous présente (X_o,x_o) comme déformation à 1 paramètre de $(X_o\cap H,x_o)$:

$$\begin{tikzcd}
(X_o\cap H,x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X_o,x_o) \arrow[d, "\varphi^H=z_o|X_o"] \\
\{0\} \arrow[r, hook] & (\mathbb{D},0)
\end{tikzcd}$$

φ^H a pour discriminant $0\in\mathbb{D}$ compté avec une certaine multiplicité Δ^H. (Ceci parce que (X_o,x_o) est à singularité isolée, ainsi que $(X_o\cap H,x_o)$.

1.2 <u>Proposition</u> : $\Delta^H=\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)+\mu^{(n)}_{x_o}(X_o\cap H)$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord un lemme facile : soit $(C,0)$ un germe de courbe irréductible, mais non nécessairement réduite, dans $(\mathbb{C}^{n+1},0)$, supposons que $\mathcal{O}_{C,0}$ est de Macaulay. Il existe un entier $n(C)$ tel que pour toute hypersurface F de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ on ait, en notant $(\ ,\ )_o$ la multiplicité d'intersection en 0 :

$$(F,C)_o=n(C).(F,C_{red})_o$$

en effet, C étant irréductible, l'idéal N des nilpotents de $\mathcal{O}_{C,0}$ est premier, et puisque $\mathcal{O}=\mathcal{O}_{C,0}$ est de dimension 1, $\mathcal{O}_N$ est de longueur finie $n(C)$. De plus, puisque $\mathcal{O}_{F,0}$ et $\mathcal{O}_{C,0}$ sont de Macaulay $(F,C)_0 = \lg(\mathcal{O}/g.\mathcal{O})$ où $g=0$ est une équation pour F. Et ceci est encore égal à $e(g.\mathcal{O})$ (multiplicité de $g.\mathcal{O}$), et d'après l'additivité de la multiplicité (voir [Se])
$e_{\mathcal{O}}(g.\mathcal{O}) = n(C).e_{\overline{\mathcal{O}}}(g.\overline{\mathcal{O}})$ où $\overline{\mathcal{O}}=\mathcal{O}/N$, mais $e_{\overline{\mathcal{O}}}(g.\overline{\mathcal{O}}) = (F,C_{red})_0$.
Considérons maintenant une équation $f=0$ pour (X_0,x_0) et la courbe Γ de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$ définie par : $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$. C'est bien une courbe de Macaulay puisque $j(f)$ est primaire pour l'idéal maximal. Décomposons la en ses composantes irréductibles : $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$. En fait, Δ^H n'est autre que le nombre d'intersection $(X_0,\Gamma)_0$ [puisque c'est la multiplicité de $z_0=0$ comme résultat de l'élimination de $z_1,\dots,z_n$ entre $f(z_0,\dots,z_n)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$] .
On a

$$(X_0,\Gamma)_0 = \sum_{i=1}^{k} (X_0,\Gamma_i)_0 = \sum_{i=1}^{k} n(\Gamma_i)(X_0,\Gamma_{i\ red})_0$$

mais il est facile de calculer $(X_0,\Gamma_{i\ red})_0$ par normalisation de la courbe intègre $\Gamma_{i,red}$. $(X_0,\Gamma_{i,red})_0$ n'est autre que l'ordre à l'origine de $f\circ h_i$ où $h_i : (\mathbb{D},0) \to (\Gamma_{i\ red},0)$ est la normalisation. Choisissons une coordonnée v sur $(\mathbb{D},0)$. On a :

$$\frac{d}{dv}(f\circ h_i) = \frac{\partial f}{\partial z_0}\circ h_i \cdot \frac{d}{dv}(z_0\circ h_i)$$

puisque tous les $\frac{\partial f}{\partial z_j}\circ h_i$ sont nuls $(j\geq 1)$, d'où, en regardant les ordres :

$$\nu_0(f\circ h_i) = \nu_0\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\circ h_i\right) + \nu_0(z_0\circ h_i)$$

ce qui peut s'écrire

$$(X_o,\Gamma_{i\ red})_o = (X'_o,\Gamma_{i,red})_o + (H,\Gamma_{i,red})_o$$

où X'_o est l'hypersurface d'équation : $\frac{\partial f}{\partial z_o} = 0$. En faisant la somme après multiplication par $n(C_i)$:

$$\Delta^H = (X_o,\Gamma)_o = (X'_o,\Gamma)_o + (H,\Gamma)_o$$

mais $(X'_o,\Gamma)_o$ n'est autre que $\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$ puisque les anneaux considérés sont de Macaulay, et de même

$$(H,\Gamma)_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(0,z_1,\dots,z_n),\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(0,z_1,\dots,z_n)\right)$$

c'est-à-dire $\mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H)$.

1.3 <u>Remarque</u> : Le diagramme de 1.1 nous dit que φ^H provient par changement de base de la déformation "universelle" F^H_U de $(X_o \cap H, x_o)$, c'est-à-dire :

$$\begin{tikzcd}
(X_o \cap H, x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X_o,x_o) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^H"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X^H_U, x_U) \arrow[d, "F^H_U"] \\
\{0\} \arrow[r, hook] & (\mathbb{D},0) \arrow[r, "h^H_o"] & (S^H_U, s_U)
\end{tikzcd}$$

Si nous notons D^H_U le discriminant de F^H_U , hypersurface réduite de l'espace lisse S^H_U , le discriminant de φ^H est l'image réciproque par h^H_o de D^H_U , et Δ^H n'est autre que le "nombre d'intersection du chemin h^H_o avec D^H_U en s_U ", c'est-à-dire l'ordre en 0 de $\delta^H_U \circ h^H_o$, où $\delta^H_U = 0$ est une équation pour D^H_U dans S^H_U. (Nous noterons ce nombre : (h^H_o, D^H_U). La proposition 1.2 peut alors se lire :

(F) $$\underline{\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o) = (h^H_o,D^H_U)_{s_U} - \mathfrak{M}_{s_U}(D^H_U)}$$

(formule magique) puisque l'on sait (voir la partie concernant la géométrie du discriminant ...) que la multiplicité en s_U de D_U^H, $\mathfrak{m}_{s_U}(D_U^H)$ n'est autre que $\mu_{x_o}^{(n)}(X_o \cap H)$.

Nous voyons aussi apparaître le chemin h_o^H, qui nous décrit la morphogénèse de (X_o, x_o) à partir de $(X_o \cap H, x_o)$, et (F) nous montre le nombre de Milnor comme "gain de multiplicité" lié à la position de h_o^H par rapport au discriminant D_U^H. La formule (F) prendra plus de signification lorsque nous aurons montré que toute déformation (de base $\mathbb{D}$) de (X_o, x_o) peut être réalisée par une "déformation à un paramètre de h_o^H".

1.4 Remarque : Lê Dũng Tráng me dit (à paraître) qu'il sait montrer la généralisation suivante de 1.2 par voie topologique. Si $h : (X_o, x_o) \to (\mathbb{D}, 0)$ est tel que

1) (X_o, x_o) est une intersection complète à singularité isolée.

2) il en est de même de $(h^{-1}(0), x_o)$.

Alors, la multiplicité Δ^h de $\{0\}$ comme discriminant de h est donnée par : $\Delta^h = \mu_{x_o}(X_o) + \mu_{x_o}(h^{-1}(0))$ où μ désigne toujours le nombre de cycles évanescents (mais pour une intersection complète), voir les exposés de Saito.

1.5 Corollaire : Soit $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{z_o, \ldots, z_n\}$ une équation pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $(X_o, x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, $j(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_o}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$ et $j'(f) = j(f).\mathcal{O}_{X_o, x_o}$.

$$e_{\mathcal{O}_{X_o,x_o}}(j'(f)) = \mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o) + \mu_{x_o}^{(n)}(X_o)$$

i.e. la multiplicité de $j'(f)$ dans $\mathcal{O}_{X_o, x_o}$ est obtenue en ajoutant à la multiplicité de $j(f)$ dans $\mathcal{O}_{n+1}$ la multiplicité de la restriction de $j(f)$ à un n-plan général de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

Démonstration : Choisissons $(z_o, \ldots, z_n)$ de telle façon que $\frac{\partial f}{\partial z_o}.\mathcal{O}_{X_o, x_o}$ soit entier sur $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ (2.9). D'après (ch. 0, 6.1) la multiplicité de j'(f) est alors égale à celle de $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ i.e. à Δ^H (1.2). Mais $\Delta^H = \mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o) + \mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H)$ (H est l'hyperplan $z_o = 0$). La condition imposée à H étant ouverte, et la multiplicité de j'(f) ne dépendant pas de H, ceci montre que

$$\mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H) = \mu^{(n)}_{x_o}(X_o) \quad .$$

1.6 Remarque : Pour tout hyperplan $H' \in \mathbb{P}^n$ on a, d'après la construction de 2.7, (appliquer aussi 0.6.1)

$$\mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H') \geq e_{\mathcal{O}_{H'}}(j(f).\mathcal{O}_{H'}) \geq \mu^{(n)}_{x_o}(X_o)$$

la première inégalité provenant de l'inclusion $j(f.\mathcal{O}_{H'}) \subset j(f).\mathcal{O}_{H'}$, et la seconde de 2.7 du ch. I (et de la semi-continuité des longueurs). D'après le théorème de Rees (0.6.1), appliqué deux fois, on voit que, dès que H appartient au complémentaire de l'ensemble des directions limites en x_o d'hyperplans tangents aux points lisses de X_o , on a

$$\mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H) = \mu^{(n)}_{x_o}(X_o) \quad \text{et} \quad \overline{j(f.\mathcal{O}_{H,0})} = \overline{j(f).\mathcal{O}_{H,0}}$$

et réciproquement, si $\mu^{(n)}_{x_o}(X_o \cap H) = \mu^{(n)}_{x_o}(X_o)$ la multiplicité de $j'(f).\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ est égale à Δ^H ($H : z_o = 0$) et donc $\frac{\partial f}{\partial z_o}\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ est entier sur $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{X_o,x_o}$.

Nous avons montré que l'ouvert construit en 2.7 contient un ouvert analytique, et donné une condition numérique pour que H ne soit pas limite d'hyperplans tangents aux points lisses de (X_o,x_o). Ceci précise ch. I, 1.5.

Voici maintenant le corollaire de 1.5 le plus important pour nous :

1.7 Corollaire (Formule de restriction) : (X_o,x_o), f sont comme toujours, ainsi que $j'(f)$. Nous posons $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}.\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ et considérons l'application $K' : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par

$$K'_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_o,x_o} \Big/ \mathfrak{m}'^{\nu_1}.j'(f)^{\nu_2} \; .$$

On reprend comme au (ch. I, 2.6) pour construire un polynôme homogène $\overline{K}'_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2)$ de degré n analogue au $\overline{K}_{X_o,x_o}$ de (ch. I, 2.6). La formule de restriction est :

$$\overline{K}'_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{\partial \overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2)}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2)}{\partial \nu_2}$$

ou si l'on préfère :

$$\overline{K}'_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{n!}\Big[(\mu^{(n+1)} + \mu^{(n)})\nu_2^n + \dots + \binom{n}{i}(\mu^{(i+1)} + \mu^{(i)})\nu_1^{n-i}\nu_2^i + \dots + (\mu^{(1)} + \mu^{(0)})\nu_1^n\Big]$$

où $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$.

<u>Démonstration</u> : D'après (ch. I, 2.2), le coefficient de $\binom{n}{i}\nu_1^{n-i}.\nu_2^i$ est la multiplicité de la restriction de $j'(f)$ à $X_o \cap H$, où H est un (i+1)-plan général de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$. Mais on peut prendre $j(f)$, le restreindre à H, obtenant, puisque H est général, d'après 2.7, un idéal entier sur $j(f.\mathcal{O}_H)$, et restreindre l'idéal obtenu à $X_o \cap H$. Le coefficient cherché est donc la multiplicité de $j(f.\mathcal{O}_H).\mathcal{O}_{X_o \cap H,x_o}$, c'est-à-dire $\mu^{(i+1)}_{x_o}(X_o) + \mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$ d'après 1.5 .

1.8 <u>Corollaire</u> : La multiplicité de l'idéal $\mathfrak{m}'.j'(f)$ dans $\mathcal{O}_{X_o,x_o}$ est

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\mu^{(i+1)} + \mu^{(i)})$$

et ne dépend donc que de $\mu^*_{x_o}(X_o)$.

1.9 L'autre formule de restriction est une conséquence directe de (ch. I,2.10) et est : pour un hyperplan général H de $(\mathbb{C}^{n+1},0)$:

$$\overline{K}_{X_o \cap H, x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{\partial \overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2)}{\partial \nu_1} \quad .$$

§ 2. Quelques résultats sur $\mu^*_{x_o}(X_o)$

Au chapitre I, nous avons associé à un germe d'hypersurface complexe (X_o,x_o) une suite d'entiers $\mu^*_{x_o}(X_o)$ et nous avons montré comment, si (X_o,x_o) est à singularité isolée, cette suite apparaissait de façon naturelle comme multiplicité généralisée. Dans ce paragraphe, nous supposons (X_o,x_o) à singularité isolée et cherchons à déterminer quelle information $\mu^*_{x_o}(X_o)$ contient sur (X_o,x_o). Nous avons déjà vu que μ^* nous donnait la dimension de (X_o,x_o), sa multiplicité, et bien sûr le nombre de Milnor. Remarquons que la suite $\mu^*_{x_o}(X_o)$ tronquée à gauche, i.e. $(\mu^{(i)}_{x_o}(X_o),\ldots,\mu^{(o)}_{x_o}(X_o))$ n'est autre que $\mu^*_{x_o}(X_o \cap H)$ pour un i-plan général H. Dans ce qui suit, $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ est fixée, et l'on note $\mu^{(i)}$ pour $\mu^{(i)}_{x_o}(X_o)$.

2.1 <u>Proposition</u> : $\mu^{(n+1)} \geq \mu^{(1)}.\mu^{(n)}$
(et donc $\mu^{(i+1)} \geq \mu^{(1)}.\mu^{(i)}$ $1\leq i\leq n$).

<u>Démonstration</u> : Il suffit de revenir à la démonstration de 1.1, et de remarquer que grâce aux propriétés de symétrie (ch. I, 2.2), si notre hyperplan $z_o = 0$ est suffisamment général, la multiplicité de la courbe Γ $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0\right)$ qui lui a été associée en 1.1 est $\mu^{(n)}$. Or, par les propriétés des intersections

$$(X_o\cdot\Gamma)_o \geq \mathfrak{m}_{x_o}(X_o)\cdot\mathfrak{m}(\Gamma) = (\mu^{(1)}+1)\mu^{(n)}$$

d'où $\mu^{(n+1)}+\mu^{(n)} \geq (\mu^{(1)}+1)\mu^{(n)}$ et la proposition.

2.2 <u>Question</u> : A-t-on toujours

$$\frac{\mu^{(n+1)}}{\mu^{(n)}} \geq \frac{\mu^{(n)}}{\mu^{(n-1)}} \geq \dots \geq \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(o)}} \quad ?$$

2.3 <u>Remarque</u> : Si (X_o,x_o) est un cône (à singularité isolée) on a égalité dans (2.1). En effet, si $\mathfrak{m}_{x_o}(X_o) = a+1$, disons, (X_o,x_o) a même type topologique que : $z_o^{a+1}+\dots+z_n^{a+1}=0$, donc $\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)=a^{n+1}$, et d'après 2.1 $\mu_{x_o}^{(i)}(X_o)=a^i$ $(0\leq i\leq n)$.

On peut se demander dans quels autres cas on a $\mu^{(n+1)}=\mu^{(1)^{n+1}}$ (i.e. μ^* est une dégression géométrique) :

2.4 <u>Lemme</u> : Soient $\mathcal{O}$ anneau local réduit, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ et $\mathfrak{n}_3$ trois idéaux propres de $\mathcal{O}$ tels que $\mathfrak{n}_1\subseteq\mathfrak{n}_2$. Si

$$\overline{\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{n}_3} = \overline{\mathfrak{n}_2}$$

on a :

$$\overline{\mathfrak{n}_1} = \overline{\mathfrak{n}_2}$$

En effet, d'après (ch. 0, 0.4), il existe un $\mathcal{O}$-module fidèle de type fini M tel que $\mathfrak{n}_2\cdot M\subseteq(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{n}_3)M$. Mais puisque $\mathfrak{n}_1\subseteq\mathfrak{n}_2$, on a en fait :

$$\mathfrak{n}_2\cdot M \subseteq (\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{n}_3)M \subseteq \mathfrak{n}_2\cdot M$$

i.e.

$$(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2\cdot\mathfrak{n}_3)M = \mathfrak{n}_2\cdot M$$

ou :

$$\mathfrak{n}_1\cdot M+\mathfrak{n}_3\cdot\mathfrak{n}_2\cdot M = \mathfrak{n}_2\cdot M$$

et grâce à Nakayama :

$$\mathfrak{n}_1 . M = \mathfrak{n}_2 . M \quad ,$$

d'où

$$\overline{\mathfrak{n}_1} = \overline{\mathfrak{n}_2} \quad .$$

2.5 Lemme : Pour une singularité isolée d'hypersurface $(X_o, x_o) \subseteq (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, d'équation $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{z_o, \ldots, z_n\}$, les conditions suivantes sont équivalentes (notations habituelles) :

1) $\mu^{(n+1)} = \mu^{(1)^{n+1}}$

2) $\overline{j(f)} = m^{\mu^{(1)}}$.

Il suffit de remarquer que $j(f) \subseteq m^{\mu^{(1)}}$ puisque $\mu^{(1)} = \mathfrak{M}_{x_o}(X_o) - 1$, et que la multiplicité de $m^{\mu^{(1)}}$ est $\mu^{(1)^{n+1}}$ (0, 0.6).

Le lemme en résulte grâce au théorème de Rees (0, 0.6) et au fait que toutes les puissance de l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{z_o, \ldots, z_n\}$ sont intégralement closes . (Parce que la modification de centre m est lisse).

2.6 Lemme : Posons $\mu^{(1)} = a$. Si $\overline{j(f)} = m^a$, on a : $\frac{\partial f}{\partial z_i} \in m^a - m^{a+1}$ $(0 \leq i \leq n)$.

Soit en effet j^1 l'idéal engendré par les $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ qui sont dans $m^a - m^{a+1}$. On a

a

$$j^1 \subseteq j(f) \subseteq j^1 + m^{a+1}$$

d'où

$$\overline{j^1 + m . m^a} = m^a$$

et donc

$$\overline{j^1} = m^a$$

d'après 2.3.

Mais ceci entraîne que j^1 est m-primaire, ce qui n'est possible que si $j^1 = j(f)$ puisque $j(f)$ est engendré par exactement $n+1$ éléments.

2.7 Proposition : Pour une singularité isolée d'hypersurface (X_o, x_o), les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mu^{(n+1)} = \mu^{(1)^{n+1}}$

2) $\overline{K}_{X_o,x_o}(\nu_1,\nu_2) = \frac{1}{(n+1)!}(\nu_1+\mu^{(1)}.\nu_2)^{n+1}$

3) (X_o,x_o) est isomorphe à la fibre générale d'une déformation à un paramètre, à μ^* constant, d'un cône à singularité isolée, qui n'est autre que son cône tangent.

<u>Démonstration</u> : Soit $f=0$, $f\in\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ une équation pour (X_o,x_o) et écrivons

$$f = f_{a+1}+\dots+f_{a+k}+\dots$$

où les f_i sont homogènes de degré i $(a=\mu^{(1)})$. Il résulte des lemmes précédents que si 1) (équivalent à 2) d'après 2.1) est vérifiée, la forme initiale de $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ est $\frac{\partial f_{a+1}}{\partial z_i}$ $(0\leq i\leq n)$. Notons j_2 l'idéal engendré par les $\frac{\partial f_{a+1}}{\partial z_i}$.

On a : $j(f)\subseteq j_2+m^{a+1}\subseteq m^a$, et donc en appliquant à nouveau 2.3 : $\overline{j_2}=m^a$, ce qui montre que le cône tangent à (X_o,x_o) est à singularité isolée, (et a même μ^* que (X_o,x_o)). Or, nous pouvons considérer la déformation à un paramètre du cône $f_{a+1}=0$ d'équation (dans $\mathbb{D}\times\mathbb{C}^{n+1}$)

$$F_t(z_o,\dots,z_n) = f_{a+1}(z_o,\dots,z_n)+t\,f_{a+2}(z_o,\dots,z_n)+\dots+\dots+t^{i-1}f_{a+i}(z_o,\dots,z_n)+\dots$$

Pour $t=0$, la fibre est le cône tangent à (X_o,x_o), et pour $t\neq 0$, $F_t(z_o,\dots,z_n)=t^{-(a+1)}f(t\,z_o,\dots,t\,z_n)$, ce qui montre que la fibre pour $t\neq 0$ est isomorphe à (X_o,x_o). La déformation est bien à μ^* constant. Ceci montre $2)\Leftrightarrow 1)\Rightarrow 3)$ et $3)\Rightarrow 1)$ est évident. Nous verrons au paragraphe suivant que ceci entraîne que la déformation précédente est équisingulière, et en particulier que (X_o,x_o) a même type topologique que son cône tangent, grâce au théorème de Thom-Mather. Si nous admettons que la multiplicité est un invariant du type topologique (cf. Ch. I, 1.7), le résultat précédent nous dit en particulier qu'une hypersurface à singularité isolée qui a même type topologique qu'un cône a même type topologique que son cône tangent.

2.8 <u>Question</u> : Peut-on caractériser de façon analogue à 2.6 les singularités isolées d'hypersurfaces dont le cône tangent anisotrope (ou quasi-homogène) est à singularité isolée (pour des poids convenables) ?

§ 3. μ^* et déformations

3.1 <u>Proposition</u> : Soient $G : X \to \mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} / |t| < 1\}$ un morphisme plat, $\mathfrak{I}$ un $\mathcal{O}_X$-Idéal et σ une section de G telle que $\mathrm{Supp}.\mathcal{O}_X/\mathfrak{I} = \sigma(\mathbb{D})$. Ceci signifie que nous nous donnons une famille d'idéaux $\mathfrak{I}_t = \mathfrak{I}.\mathcal{O}_{X_t}$ où $X_t = G^{-1}(t)$, telle que $\mathfrak{I}_t.\mathcal{O}_{X_t,\sigma(t)}$ soit primaire pour l'idéal maximal. Nous noterons $e_t = e(\mathfrak{I}_t)$ la multiplicité de $\mathfrak{I}_t$ dans $\mathcal{O}_{X_t,\sigma(t)}$.
Soit $\pi : X' \to X$ la modification (ou éclatement) définie par $\mathfrak{I}$. Notons Y le sous-espace de X défini par $\mathfrak{I}$, $Y' \subset X'$ le diviseur exceptionnel défini par $\mathfrak{I}.\mathcal{O}_{X'}$, et $p : Y' \to Y$ la restriction de π.
La proposition est :
Si e_t est constante $(t \in \mathbb{D})$, p est équidimensionnel, i.e. toutes ses fibres sont de dimension d-1 où $d = \dim X - 1 = \dim_{\sigma(t)} X_t \quad (t \in \mathbb{D})$.

<u>Démonstration</u> : En fait, p étant projectif, sera équidimensionnel au-dessus de $\sigma(\mathbb{D}^*)$[♦]. Il nous faut donc montrer

$$\dim p^{-1}(\sigma(0)) = d - 1 \ .$$

Or, si nous notons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,\sigma(0)}$, $I = \mathfrak{I}_{\sigma(0)}$, nous avons :

♦ quitte à remplacer $\mathbb{D}$ par un disque plus petit.

$$p^{-1}(\sigma(0)) = \mathrm{Proj.}(\oplus I^{\nu}/I^{\nu+1} \underset{\mathcal{O}/I}{\otimes} \mathbb{C})$$

($\mathbb{C}$: corps résiduel de $\mathcal{O}/I$),

et l'on sait bien que la dimension de l'espace projectif associé à une algèbre graduée est égale au degré de son polynôme de Hilbert. Il s'agit donc de montrer que

$$\dim_{\mathbb{C}} I^{\nu}/I^{\nu+1} \underset{\mathcal{O}/I}{\otimes} \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$$

(O signifie : tend vers l'infini avec ν au plus aussi vite que ...).

Mais nous avons une surjection de $\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}$-modules

$$I^{\nu}/I^{\nu+1} \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}}{\otimes} \mathbb{C} \longrightarrow I^{\nu}/I^{\nu+1} \underset{\mathcal{O}/I}{\otimes} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

et il nous suffit donc de montrer que

$$\dim_{\mathbb{C}} I^{\nu}/I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$$

(dans la suite, comme ici, $\otimes$ signifie $\underset{\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}}{\otimes}$).

Or nous pouvons considérer le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[r] & T_{\nu} \arrow[r] \arrow[d] & I^{\nu}/I^{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{I^{\nu}/I^{\nu+1}} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & F_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}/I^{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathcal{O}/I^{\nu+1}} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & F_{\nu} \arrow[r] & \mathcal{O}/I^{\nu} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\mathcal{O}/I^{\nu}} \arrow[r] & 0 \\
 & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où T_ν (resp. $F_{\nu+1}$) est le sous-module de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$-torsion de $I^\nu/I^{\nu+1}$ (resp. $\mathcal{O}/I^{\nu+1}$). Les suites écrites horizontalement et verticalement sont des suites exactes de $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$-modules , et les gens surmontés d'une barre sont $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$-libres. La tensorisation par $\mathbb{C}$ de la seconde ligne reste en particulier exacte, i.e.

$$0 \longrightarrow F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}/I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{O}/I^{\nu+1}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

mais

$$\mathcal{O}/I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} \cong \mathcal{O}_{X_o,\sigma(0)} \big/ \mathfrak{I}_o^{\nu+1}$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{O}/I^{\nu+1}} \otimes \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X_t,\sigma(t)} \big/ \mathfrak{I}_t^{\nu+1}) \qquad (t \in \mathbb{D}^*)$$

$(\overline{\mathcal{O}/I^{\nu+1}}$ étant $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$-libre , nous donne la longueur générique).

Mais par définition de la multiplicité :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_o,\sigma(0)} \big/ \mathfrak{I}_o^{\nu+1} = \frac{1}{d!}\, e_o(\nu+1)^d + \text{termes de bas degré}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_t,\sigma(t)} \big/ \mathfrak{I}_t^{\nu+1} = \frac{1}{d!}\, e_t(\nu+1)^d + \text{bas degré}$$

et il vient donc

$$\dim_{\mathbb{C}} F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = \frac{1}{d!}\,(e_o - e_t)(\nu+1)^d + \text{bas degré}$$

et donc

$$\dim_{\mathbb{C}} F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1}) \Leftrightarrow e_o = e_t \quad .$$

Nous allons donc montrer que $\dim_{\mathbb{C}} F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$ entraîne $\dim_{\mathbb{C}} I^\nu/I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$. Pour cela, nous allons d'abord montrer que $\dim T_\nu \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$.

Or, la suite exacte $0 \to T_\nu \to F_{\nu+1} \to F_{\nu+1}/T_\nu \to 0$ nous fournit une surjection :

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}}(F_{\nu+1}/T_\nu, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(T_\nu \otimes \mathbb{C} \longrightarrow F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C})$$

mais $$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{D},0}}(F_{\nu+1}/T_\nu, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} F_{\nu+1}/T_\nu \otimes \mathbb{C}$$

et est donc $O(\nu^{d-1})$. On a donc aussi

$$\dim \mathrm{Ker}(T_\nu \otimes \mathbb{C} \longrightarrow F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C}) = O(\nu^{d-1})$$

et puisque $\dim F_{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$, on a bien

$$\dim T_\nu \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1}) \; .$$

Or on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_\nu \otimes \mathbb{C} \longrightarrow I^\nu / I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \overline{I^\nu / I^{\nu+1}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

et le membre de droite nous donne la dimension générique, qui est $O(\nu^{d-1})$. On en déduit bien $\dim_{\mathbb{C}} I^\nu / I^{\nu+1} \otimes \mathbb{C} = O(\nu^{d-1})$, et la proposition.

3.2 <u>Corollaire</u> : Dans la situation de 3.1, avec l'hypothèse d'équimultiplicité, soit $f \in \mathcal{O}_X$.
Si $f_t \in \overline{\mathfrak{I}_t}$ pour $t \in \mathbb{D}^*$, $f \in \overline{\mathfrak{I}}$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de remarquer que nous venons de montrer que chaque composante irréductible de Y' domine Y, ou que $\omega^{-1}(\sigma(\mathbb{D}^*))$ induit un ouvert dense sur chaque composante irréductible de Y'. On normalise alors X', et la normalisation étant un morphisme fini, les considérations précédentes se remontent à la normalisation. Il suffit alors d'appliquer (0.4) via (0.7), en raisonnant d'abord comme dans 2.7 pour montrer que $f.\mathcal{O}_{\overline{X'},x'} \in \mathfrak{I}.\mathcal{O}_{\overline{X'},x'}$ en tout point x' se projetant dans $\sigma(\mathbb{D}^*)$.

3.3 Corollaire : Dans la même situation, $f \in \mathcal{O}_X$, si $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_o$ désigne le $\bar{\nu}$ (0.2) calculé dans $\mathcal{O}_{X,\sigma(0)}$, on a

$$\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_o = \min_{t \in \mathbb{D}^*} \bar{\nu}_{\mathfrak{I}_t}(f_t) .$$

En effet, si $\mathfrak{I}$ est équimultiple comme en 3.1, il en est de même de $\mathfrak{I}^\nu$ pour tout ν.

Si $\mu = \min_{t \in \mathbb{D}^*} \bar{\nu}_{\mathfrak{I}_t}(f_t)$, on peut trouver $\nu(i)$ tel que $f_t^i \in \overline{\mathfrak{I}_t^{\nu(i)}}$ $(t \in \mathbb{D}^*)$ et $\nu(i) > (\mu - \varepsilon)i$ pour i assez grand, $\varepsilon > 0$ étant donné. D'après 3.2, on a alors $f^i \in \overline{\mathfrak{I}^{\nu(i)}}$ d'où $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f^i) \geq \nu(i)$ (notation de 0.5). Ceci montre que $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_o > \mu - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_o \geq \mu$. Mais l'inégalité inverse est évidente. En fait, ceci montre aussi que $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}_t}(f_t)$ est constant sur $\mathbb{D}^*$, et que $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_t$ est constant sur $\mathbb{D}$, où $\bar{\nu}_{\mathfrak{I}}(f)_t$ désigne le $\bar{\nu}$ calculé dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,\sigma(t)}$.

3.4 Remarque : Il n'est pas vrai que l'on ait sous les hypothèses de 3.1 : $\nu_{\mathfrak{I}}(f) = \min_{t \in \mathbb{D}^*} \nu_{\mathfrak{I}_t}(f_t)$, il faut pour cela des conditions plus fortes. (voir "Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton, par M. Lejeune et l'auteur, ch. I, § 11, 11.2.2, p. 177, Thèses respectives, Paris VII, 1973).

3.5 Soit $(X,x) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ une hypersurface analytique complexe. Supposons que le lieu singulier Y de X soit lisse en x. Posons $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}^N} Y = n+1$. D'après (ch. I, 1.3), on peut toujours trouver des rétractions locales $R : (\mathbb{C}^N, 0) \to (Y,x)$ telles que $(R^{-1}(x) \cap X, x)$ soit une hypersurface à singularité isolée, et $G = R|X : (X,x) \to (Y,x)$ est plat. Ceci signifie que nous pouvons présenter X localement, comme déformation de $(X_o, x_o) = (R^{-1}(x) \cap X, x)$ paramétrée par Y. La donnée de R revient à une décomposition en produit locale $\mathbb{C}^N \simeq Y \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$\begin{tikzcd}
(X,x) \arrow[r, hook] \arrow[d, "G"'] & (Y \times \mathbb{C}^{n+1}, 0) \arrow[dl, "R = pr_1"] \\
(Y,x) &
\end{tikzcd}$$

de plus, G est muni d'une section, correspondant à l'inclusion de Y dans X. Choisissons des coordonnées locales $(y_1,\dots,y_k)$ sur Y, $(z_o,\dots,z_n)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$, et une équation $F(z_o,\dots,z_n, y_1,\dots,y_k) = 0$ pour $X \subset Y \times \mathbb{C}^{n+1}$. Nous considèrerons les idéaux :

$$\mathcal{J}' = \left(\frac{\partial F}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_X \; ; \; \mathcal{K}' = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial y_k}\right)\mathcal{O}_X$$

$$\mathcal{I}' = (z_o,\dots,z_n)\mathcal{O}_X \quad \text{(définit Y)}$$

3.6 <u>Proposition</u> : Le couple de strates $(X-Y,Y)$ satisfait la condition a) de Whitney en x si et seulement si

α) $\bar{\nu}_{\mathcal{J}'}(\mathcal{K}')_x > 1$.

Si la condition précédente est satisfaite, $(X-Y,Y)$ satisfait la condition b) de Whitney en x si et seulement si :

β) $\bar{\nu}_{\mathcal{I}'.\mathcal{J}'}\left(\left(\sum_{i=o}^{n} z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right)\mathcal{O}_X\right)_x > 1$.

<u>Démonstration</u> : La condition a) de Whitney est que pour toute suite de points $p_i \in X-Y$, convergeant vers x, la limite des directions des hyperplans tangents T_{X,p_i} contienne $T_{Y,x}$.

Soit $\omega : X' \to X$ la modification de centre $\mathcal{J}'$. (Nous y pensons comme adhérence dans $X \times \mathbb{P}^n$ du graphe de : $(X-Y) \to \mathbb{P}^n$ donné par $p \leadsto \left(\frac{\partial F}{\partial z_o}(p) :\dots: \frac{\partial F}{\partial z_n}(p)\right)$.

La direction de $T_{X,p}$ est : $\left(\frac{\partial F}{\partial z_o}(p) :\dots: \frac{\partial F}{\partial z_n}(p) : \frac{\partial F}{\partial y_1}(p) :\dots: \frac{\partial F}{\partial y_k}(p)\right)$.

La condition de Whitney est que l'on trouve à la limite

$(p \to x) : (b_o :\dots: b_n : 0 : \quad : 0)$.

En utilisant la description de X' comme adhérence de graphe, et en remontant par l'isomorphisme $X' - \omega^{-1}(Y) \simeq X - Y$ la suite (p_i), on voit tout de suite que la condition a) de Whitney se traduit par : $(\mathcal{J}' \mathcal{O}_{X'})^{-1}. \ \mathcal{K}'.\mathcal{O}_{X'}$ s'annule sur le diviseur exceptionnel (défini par $\mathcal{J}'.\mathcal{O}_{X'}$) de ω. D'après le théorème des zéros de Hilbert, et la propreté de ω, ceci signifie que pour j assez grand :

$$\text{(A)} \qquad ((\mathcal{J}' \mathcal{O}_{X'})^{-1}.\mathcal{K}'.\mathcal{O}_{X'})^{j} \subset \mathcal{J}'.\mathcal{O}_{X'} \ .$$

Montrons que ceci équivaut à α) :

Si α) est satisfaite, par définition de $\bar{\nu}$ on a pour i assez grand $\mathcal{K}'^{i}.\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{J}'^{i+1} \mathcal{O}_X$. Cette inclusion remontée à $\mathcal{O}_{X'}$ est exactement (A). Réciproquement, si (A) est satisfaite, en montant maintenant au normalisé $\overline{X}$ de X et en appliquant (0, 0.4) on trouve :

$$\tilde{\nu}_{\mathcal{J}'}(\mathcal{K}'^{i})_x \geq i+1 \quad \text{d'où} \quad \bar{\nu}_{\mathcal{J}'}(\mathcal{K}')_x > 1$$

car $\bar{\nu}$ est aussi le supremum des $\frac{\tilde{\nu}(i)}{i}$ de (0, 0.4) (utiliser l'inclusion $(\overline{I^i})^k \subset \overline{I^{ki}}$).

De même, la condition b) de Whitney se ramène, si a) est satisfaite, à : pour toute suite de points $p_i \in X - Y$ convergeant vers x, la limite des directions $(p_i, G(p_i))$ est contenue dans la direction limite des T_{X,p_i} . Choisissant une suite (p_i), la direction $(p_i, G(p_i))$ est $(z_o(p_i) :\ldots: z_n(p_i))$ notons-en la limite $(a_o :\ldots: a_n)$, et notons $(b_o :\ldots: b_n : 0 :\ldots: 0)$ (grâce à a)) la limite des directions des T_{X,p_i}, i.e. des $\left(\frac{\partial F}{\partial z_o}(p_i) :\ldots: \frac{\partial F}{\partial z_n}(p_i) : \frac{\partial F}{\partial y_1}(p_i) :\ldots: \frac{\partial F}{\partial y_k}(p_i)\right)$. La condition b) est que alors :

$$\Sigma a_i b_i = 0 \ .$$

Soit maintenant $\tilde{\omega} : \tilde{X} \to X$ la modification de $\mathcal{J}'.\mathcal{J}'$. En utilisant encore la description de ω comme adhérence dans $X \times \mathbb{P}^{n^2-1}$ du graphe de $X - Y \to \mathbb{P}^{n^2-1}$

$(p \rightsquigarrow$ (coordonnées homogènes $z_i(p) \dfrac{\partial F}{\partial z_j}(p))$ $(0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq n)$.

On traduit la conditions b) par :

$(\mathcal{I}'\mathcal{J}'.\mathcal{O}_{\tilde{X}})^{-1}.\left(\sum\limits_{i=0}^{n} z_i \dfrac{\partial F}{\partial z_j}\right).\tilde{\omega}$ s'annule sur le diviseur exceptionnel défini par $\mathcal{I}'.\mathcal{J}'\,\mathcal{O}_{\tilde{X}}$. On conclut comme précédemment.

3.7 <u>Remarque</u> : 3.6 est un avatar de résultats apparaissant dans ([H_2], [Z_3], [C.S]).

3.8 <u>Remarque</u> : On déduit de 3.6 que les conditions de Whitney, qui dépendent a priori du choix du plongement local en x : $X \subset Y \times \mathbb{C}^{n+1}$, n'en dépendent en fait pas.

3.9 <u>Théorème</u> : Soit $G : (X,x) \to (\mathbb{D},0)$ un représentant d'un germe de déformation d'une hypersurface à singularité isolée $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, muni d'une section σ telle que $X - \sigma(\mathbb{D})$ soit lisse sur $\mathbb{D}$. Si $\mu_t^* = \mu_{\sigma(t)}^*(X_t)$, où $X_t = G^{-1}(t)$, est indépendant de $t \in \mathbb{D}$, le couple de strates $(X - \sigma(\mathbb{D}), \sigma(\mathbb{D}))$ satisfait les conditions de Whitney en tout point de $\sigma(\mathbb{D})$.

<u>Démonstration</u> : Choisissons un plongement

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "G"'] & \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1} \arrow[dl, "pr_1"] \\ \mathbb{D} & \end{tikzcd}$$

tel que $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \times \{0\}$, et une équation $F(z_o,\ldots,z_n,t) = 0$ pour X dans $\mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1}$.

D'après 3.5, il nous faut montrer que

$$\bar{\nu}_{\mathcal{J}'}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathcal{O}_X\right)_x > 1$$

et

$$\bar{\nu}_{\mathcal{J}',\mathcal{J}'}\left(\left(\Sigma z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right)\mathcal{O}_X\right)_x > 1 \quad ,$$

où $\mathcal{J}' = \left(\frac{\partial F}{\partial z_o}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_X$

$\mathcal{J}' = (z_o, \ldots, z_n)\mathcal{O}_X$

mais pour $t \in \mathbb{D}^*$, nous aurons

$$\bar{\nu}_{\mathcal{J}'}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\mathcal{O}_X\right)_{\sigma(t)} > 1 \quad \text{et} \quad \bar{\nu}_{\mathcal{J}'.\mathcal{J}'}\left(\left(\Sigma z_i \frac{\partial F}{\partial z_i}\right)\mathcal{O}_X\right)_{\sigma(t)} > 1$$

puisque d'après un théorème de Whitney [W], les conditions de Whitney sont satisfaites à l'extérieur d'un fermé analytique strict de chaque strate. Mais puisque μ_t^* est constant $(t \in \mathbb{D})$, les idéaux $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}'.\mathcal{J}'$ sont équimultiples pour $X \to \mathbb{D}$ au sens de 3.1 (en effet, $e_t(\mathcal{J}_t') = \mu_t^{(n+1)} + \mu_t^{(n)}$ d'après 1.5, et $e_t(\mathcal{J}_t'.\mathcal{J}_t') = \sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}(\mu_t^{(i+1)} + \mu_t^{(i)})$ d'après 1.8. Il suffit maintenant d'appliquer 3.3.

3.10 <u>Remarque</u> : Soit $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_o}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{\mathbb{D}\times\mathbb{C}^{n+1}}$. Si $\mu_t^{(n+1)}$ est constant, l'idéal $\mathcal{J}$ est équimultiple. D'autre part, pour $t \in \mathbb{D}^*$, $\sigma(\mathbb{D})$ est au voisinage de $\sigma(t)$ une "bonne stratification" au sens de Lê Dũng Tráng (Thèse, Paris VII, 1971) voit aussi [H.L], c'est-à-dire que pour toute suite de points $p_i \in \mathbb{D}\times\mathbb{C}^{n+1} - \mathbb{D}\times\{0\}$ convergeant vers $\sigma(t)$, la direction limite des hyperplans tangents aux points p_i à l'hypersurface de niveau $F(z_o,\ldots,z_n,t) = F(p_i)$ contient $T_{\mathbb{D}\times\{0\},\sigma(t)}$. Ce qui peut se traduire, comme dans 3.6 par :

$$\bar{\nu}_{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{\sigma(t)} > 1$$

d'où, grâce à 3.3 :
Si $\mu_t^{(n+1)}$ est indépendant de $t \in \mathbb{D}$, $\bar{\nu}_{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_x > 1$, i.e. $\sigma(\mathbb{D})$ est une strate

d'une bonne stratification pour X. Cette implication avait été démontrée différemment par Lê Dũng Tráng et K. Saito (non publié).♦

3.11 Remarque : On renvoie à [T], ou à la partie sur la géométrie du discriminant des déformations universelles, pour des éclaircissements sur les conditions d'existence de σ.

3.12 Remarque : D'après le théorème de Thom et Mather (cf. [E. M. S.] et [Ma]), si $(X - \sigma(\mathbb{D}), \sigma(\mathbb{D}))$ satisfait les conditions de Whitney, on peut trouver un homéomorphisme compatible avec G :

$$(X, \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1}) \approx (\mathbb{D} \times X_o\,,\ \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n+1})$$

c'est-à-dire que la déformation G est topologiquement triviale.

***

♦ Lê me dit que ce résultat avait aussi été démontré par J. P. G. Henry par une autre méthode encore.

CHAPITRE III

§ 1. Sur la géométrie du discriminant de morphismes stables

Soit (X_o,x_o) un germe d'espace analytique à singularité isolée ; on rappelle qu'une déformation de (X_o,x_o) est un carré cartésien pointé :

$$\begin{tikzcd}
(X_o,x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X,x) \arrow[d, "G"] \\
\{s\} \arrow[r, hook] & (S,s)
\end{tikzcd}$$

où G est plat. Pour nous, ce sera toujours un représentant "suffisamment petit"[♦] d'un carré cartésien de germes, et de plus, par abus nous dirons souvent que G est la déformation. Un morphisme de déformations est un morphisme de carrés induisant l'identité de (X_o,x_o).

La théorie du complexe cotangent (cf. [Tj], [S], [Be]) nous permet d'associer de façon fonctorielle à une déformation des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents $T^1_{X/S}$, $T^2_{X/S}$ dont le support est le lieu critique, ou lieu de non-lissité, de G $[T^1_{X/S}(x) = T^1_{X_o,x_o}$ est l'espace vectoriel des classes d'isomorphisme de déformations infinitésimales (de base l'espace des nombres duaux) de $(X_o,x_o)]$, et un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$\theta_G : \Omega_S^{1^\vee} \to T^1_{X/S} .$$

Une déformation verselle (resp. semi-universelle, ou miniverselle) de (X_o,x_o) est une déformation telle que toute autre déformation en provienne (à isomorphisme près) par changement de base (resp. de plus, l'application

---

♦ Le lecteur n'aura aucun mal à donner un sens à cette expression pour chaque assertion.

tangente de Zariski au changement de base est uniquement déterminée). L'existence d'une déformation miniverselle pour toute singularité isolée a été démontrée par Grauert ([G]) après avoir été démontrée par G. N. Tjurina ([Tj]) dans le cas où (X_o, x_o) est une singularité isolée d'intersection complète (ce qui entraîne $T^2_{X_o,x_o} = (0)$).

Nous nous restreignons ici au cas d'intersection complète à singularité isolée. Une déformation G est alors verselle (resp. miniverselle) si et seulement si $\theta_G(s) : \Omega^{1\vee}_S(s) = E_{S,s} \to T^1_{X_o,x_o}$ est surjective (resp. un isomorphisme). Une déformation verselle dont la base est lisse est un morphisme stable et plat d'espaces lisses, produit d'une déformation miniverselle par l'identité d'un espace lisse. En particulier, une déformation miniverselle est un morphisme stable et plat d'espaces lisses et deux déformations miniverselles sont isomorphes grâce au théorème des fonctions implicites. Réciproquement, un germe de morphisme stable et plat d'espaces lisses est un germe de déformation verselle pour sa fibre, qui est alors nécessairement un germe d'intersection complète à singularité isolée*. La dimension de la base d'une déformation miniverselle est $\tau_{x_o}(X_o) = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{X_o,x_o}$.

2. Ouverture de la versalité "dans la base" :

Soit $G : (X,x) \to (S,s)$ un germe de déformation d'un germe d'intersection complète à singularité isolée (X_o, x_o). D'après le théorème de préparation de Weierstrass, pour un représentant suffisamment petit de G, le lieu critique C de G sera fini sur S.

2.1 Théorème : Si G est verselle, pour un représentant suffisamment petit, on a :

pour tout point $s' \in S$, si la fibre $X_{s'} = G^{-1}(s')$ a k point singuliers $x_i(s')$ $(1 \le i \le k)$ (i.e., $\#(G^{-1}(s') \cap C) = k$), on a au voisinage de s' une décomposition

* Ceci n'est pas du tout formel, et résulte du théorème de Mather sur l'équivalence de la stabilité infinitésimale et de la stabilité (voir [Be]).

(non canonique) de S en produit :

$$S = S_1 \times \ldots \times S_k \times \mathbb{C}^t \quad \text{où} \quad t = \dim S - \Sigma\, \tau_{x_i(s')}(X_{s'})$$

telle qu'au voisinage de $x_i(s')$, G soit isomorphe à :

$$\mathrm{id}(S_1) \times \ldots \times \mathrm{id}(S_{i-1}) \times G_i \times \mathrm{id}(S_{i+1}) \times \ldots \times \mathrm{id}(S_k) \times \mathrm{id}(\mathbb{C}^t) :$$

$$S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times X_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_k \times \mathbb{C}^t \longrightarrow S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_k \times \mathbb{C}^t$$

où $G_i : X_i \to S_i$ est déformation miniverselle de la singularité isolée d'intersection complète $(X_{s'}, x_i(s'))$.

<u>Démonstration</u> : Nous pouvons supposer le lieu critique C fini sur S, et donc $G_* T^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent grâce au théorème des images directes de Grauert. G étant verselle, $\theta_G(s)$ est surjective, donc aussi $\theta_{G,s}$ grâce à Nakayama, et enfin $\theta_G(s')$ aussi, pour tout $s' \in S$, quitte à rétrécir le représentant du germe de G en x choisi. Mais $G_*(T^1_{X/S})(s') = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} T^1_{X_{s'}, x_i(s')}$ et nous pouvons écrire une suite exacte d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \Omega_S^{1^\vee}(s') \xrightarrow{\theta_G(s')} \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} T^1_{X_{s'}, x_i(s')} \longrightarrow 0$$

où T est de dimension t.

Mais ceci nous donne une décomposition non canonique :

$\Omega_S^{1^\vee}(s') \approx T \oplus (\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} T^1_{X_{s'}, x_i(s')})$. Il suffit maintenant de remarquer que S étant lisse, une telle décomposition peut se réaliser, grâce à l'intégration de champs de vecteurs holomorphes, par une décomposition en produit de S au voisinage de s', qui aura la propriété annoncée dans le proposition, parce que $\theta_G(s')$ n'est autre que la somme directe des θ asssociés au germe de G en chacun des points $x_i(s')$.

En particulier, ceci montre que le germe de G en chacun des $x_i(s')$ est déformation verselle de $(X_{s'}, x_i(s'))$.

3. Discriminant d'une déformation :

3.1 Commençons par rappeler la construction de la déformation miniverselle d'une intersection complète à singularité isolée $(X_o, x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, (cf. [Tj]). Posons $\mathcal{O}_{X_o,x_o} = \mathcal{O}_{n+1}/(f_1, \dots, f_k)$ où $\mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{C}\{z_o, \dots, z_n\}$, et $\dim_{x_o} X_o = n+1-k$. Soit N le sous-module de $\mathcal{O}^k_{X_o,x_o}$ engendré par les éléments $\frac{\partial f}{\partial z_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_i}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right)$ (coordonnées dans la base canonique). $T^1_{X_o,x_o}$ est $\mathcal{O}^k_{X_o,x_o}/N$. C'est un espace vectoriel de dimension $\tau = \tau_{x_o}(X_o)$. On choisit dans $\mathcal{O}^k_{n+1}$ τ éléments g_i $(=(g_{i,1}, \dots, g_{i,k})$ $1 \le i \le \tau$ dont les images dans $T^1_{X_o,x_o}$ en forment une base.

On peut choisir pour les k premiers $g_i = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ $1 \le i \le k$ (-1 à la i-ème place).

On considère l'intersection complète dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\tau$ définie par

$$F_i(z_o, \dots, z_n, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_\tau) = f_i(z_o, \dots, z_n) + \sum_{j=1}^{\tau} t_j \cdot g_{j,i}(z_o, \dots, z_n) = 0$$

$(1 \le i \le k)$.

La restriction à X de la deuxième projection $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^\tau \to \mathbb{C}^\tau$ est déformation miniverselle de (X_o, x_o).

Si l'on a choisi $g_1, \dots, g_k$ comme il l'a été indiqué plus haut, on voit que l'on peut aussi écrire la déformation miniverselle de (X_o, x_o) : $G : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\tau-k}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{\tau-k}, 0)$ où G est défini par

$$\begin{cases} t_i \circ G = F_i = f_i(z_o, \dots, z_n) + \sum\limits_{j=k+1}^{\tau} t_j g_{ji}(z_o, \dots, z_n) & 1 \le i \le k \\ t_i \circ G = t_i & k+1 \le i \le \tau \end{cases} .$$

(Ceci revient à écrire G comme déploiement au sens de [Th] de l'application $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^k$ définie par les f_i $(1 \le i \le k)$).

Toute déformation $G : (X,x) \to (S,s)$ de (X_o,x_o) peut se factoriser :

$$\begin{tikzcd} (X,x) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "G"'] & (S\times \mathbb{C}^{n+1}, s\times 0) \arrow[d, "pr_1"] \\ & (S,s) \end{tikzcd}$$

X étant défini dans $S\times \mathbb{C}^{n+1}$ par k équations $F_i = 0$ ($F_i \in \mathcal{O}_{S,s}\{z_o,\ldots,z_n\}$, $1\leq i\leq k$). Le sous-espace critique C de G est par définition le sous-espace de X défini par l'idéal engendré par les $\left(\det \dfrac{\partial(F_1,\ldots,F_k)}{\partial(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})}\right)$ $(i_1,\ldots,i_k)\subset(0,\ldots,n)$. Le lieu critique est le réduit du sous-espace critique).

[Si l'on préfère, l'idéal définissant C est le $(n+1-k)$-ième idéal de Fitting de $\Omega^1_{X/S}$].

3.2 <u>Définition</u> : Soient $G : X\to S$ une déformation de (X_o,x_o) et C le sous-espace critique de G. Le discriminant de G sera défini comme suit :
Nous choisissons (pour un représentant assez petit de G, bien sûr) une présentation du $\mathcal{O}_S$-Module cohérent $G_*\mathcal{O}_C$

$$\mathcal{O}_S^q \xrightarrow{U} \mathcal{O}_S^p \longrightarrow G_*\mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

le discriminant est le sous-espace D_G de S défini par l'idéal engendré par les $p\times p$ mineurs extraits de la matrice donnant U (disons dans la base canonique de $\mathcal{O}_S^q$ et $\mathcal{O}_S^p$). On vérifie facilement que cet idéal ne dépend pas du choix de la présentation. [Si l'on préfère, nous avons défini le discriminant par le 0-ième idéal de Fitting de $G_*\mathcal{O}_C$ i.e. comme "image directe analytique" de C].

3.3 <u>Remarque</u> : La définition du discriminant est compatible au changement de base [c'est-à-dire que si l'on fait un changement de base :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "G'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "G"] \\ S' \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

le discriminant $D_{G'}$ de G' est $\varphi^{-1}(D_G)$ (comme espace analytique)]. En effet, la formation du sous-espace critique l'est, celle de G_* aussi, ainsi que celle de l'idéal de Fitting[♦].

3.4 <u>Proposition</u> : Le discriminant d'une déformation "assez petite" $G : (X,x) \to (S,s)$ est défini par un idéal principal ; si G est verselle, le discriminant est une hypersurface réduite de S.

<u>Démonstration</u> : Puisque la formation du discriminant commute au changement de base, il suffit de montrer le résultat quand G est miniverselle. On utilise le fait démontré par Saito dans son exposé "Algebraic Computation of Monodromy", que $\mathcal{O}_{C,x}$ est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module de codimension homologique $\tau - 1$ (et $\dim C = \tau - 1$). S étant lisse, $\mathcal{O}_{C,x}$ est un $\mathcal{O}_{S,s}$-module de dimension homologique 1, i.e. pour un représentant suffisamment petit de G, on a une présentation :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S^{p'} \xrightarrow{U} \mathcal{O}_S^{p} \longrightarrow G_*\mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

et puisque $\dim_{\mathcal{O}_S} G_*\mathcal{O}_C < \dim S$, $p' = p$, et l'idéal du discriminant est l'idéal de $\mathcal{O}_S$ engendré par $\delta_G = \det M$ où $M = (m_{ij})$ est la matrice décrivant U, disons dans la base canonique de $\mathcal{O}_S^p$. D_G est donc bien une hypersurface de S. Pour montrer que D_G est réduite, il suffit de voir (par exemple en appliquant la

---

♦ La définition du discriminant utilisée ici est différente de celle utilisée par Saito (voir son exposé "Algebraic Computation of Monodromy") qui elle, n'est pas compatible au changement de base, mais a d'autres avantages.

théorie des variétés de symbole de Boardman)[♦] qu'à l'extérieur d'un sous-espace analytique nulle part dense de C, les points de C sont des points singuliers du type "quadratique ordinaire" de leur fibre. (i.e. à un changement de coordonnées près, on peut prendre pour équations locales de la fibre : $z_0 = \quad = z_{k-2} = 0$ et $\sum_{i=k-1}^{n} z_i^2 = 0$). Le discriminant de la déformation semi-universelle d'une telle singularité est évidemment réduit. D'autre part, on peut faire la :

3.5 <u>Remarque</u> : Soit $G : (X,x) \to (S,s)$ une déformation verselle, et soit Σ un sous-espace analytique fermé du sous-espace critique C de G, défini par des conditions concentrées en chaque point singulier d'une fibre de G. Posons $\Delta = G_*(\Sigma)$. Si $s' \in \Delta$ est tel que la fibre $X_{s'}$ ait k points singuliers $x_i(s')$ $1 \leq i \leq k$, on a au voisinage de s' une décomposition de Δ :

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{\Delta}_i$$

où

$$\widetilde{\Delta}_i = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times \Delta_i \times S_{i+1} \times \dots \times S_k \times \mathbb{C}^t$$

(notations de 2.1)

et $\Delta_i \subset S_i$ est $G_{i*}(\Sigma_i)$ où $G_i : X_i \to S_i$ est la déformation miniverselle de $(X_{s'}, x_i(s'))$, et Σ_i le sous-espace analytique de X_i défini par les conditions définissant Σ. (G_* désigne l'image directe analytique).

Ceci résulte immédiatement de 2.1.

En particulier, il existe un ouvert analytique partout dense de Δ tel qu'au-dessus d'un point de cet ouvert il y ait un seul point de Σ, (puisque Δ doit être irréductible en tout point d'un ouvert partout dense). La proposition résulte de ce qui précède, et de la remarque 3.4 appliqué à C.

[♦] que nous ne rappellerons pas : voir [Be], [T]

4. Nous nous restreignons à partir de maintenant au cas où $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ est une hypersurface.

On peut alors écrire la déformation miniverselle de (X_o,x_o) comme suit :

$$G : (X,x) = (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0) = (S,s)$$

où, $f(z_o,\dots,z_n) = 0$ étant une équation pour (X_o,x_o), $(z_o,\dots,z_n)$ coordonnées sur $\mathbb{C}^{n+1}$, $t_1,\dots,t_m$ coordonnées sur $\mathbb{C}^m$, et t_o sur $\mathbb{C}$:

$$t_o \circ G = F(z_o,\dots,z_n,t_1,\dots,t_m) = f(z_o,\dots,z_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i \cdot g_i(z_o,\dots,z_n)$$

$$t_i \circ G = t_i \qquad 1 \le i \le m$$

où les classes des g_i dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\} \Big/ \left(f, \frac{\partial f}{\partial z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$, $(1 \le i \le m)$ jointes à 1, forment une base de ce quotient comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

$(m = \tau_{x_o}(X_o) - 1)$.

Le sous-espace critique C est défini par : $J = \left(\frac{\partial F}{\partial z_o}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m$.

4.1 Le sous-espace critique C de G est lisse, et $n : C \to D$, restriction de G, est la normalisation de D.

En effet, C n'est autre que la strate de Boardman $\Sigma^{n+1}(G)$, et G est stable (cf. [Be]), de plus, n est biméromorphe d'après 3.4 et le fait évident que le sous-espace critique d'une déformation verselle de singularité quadratique $(\sum_{i=o}^{n} z_i^2 = 0)$ est isomorphe au discriminant) C étant lisse est normal, et donc normalisation de D.

4.2 <u>Remarque</u> : C étant lisse est irréductible, et donc D est analytiquement irréductible en S.

4.3 (Brieskorn-Pham) La multiplicité $\mathfrak{M}_s(D)$ de D en s est $\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)$.

Preuve (Comparer à [P]) : Comme nous avons pris soin de définir D comme image directe analytique, nous pouvons appliquer la formule de projection des multiplicités ([Se]). La multiplicité $\mathfrak{M}_s(D)$, multiplicité de $m_{D,s}$ dans $\mathcal{O}_{D,s}$ est égale à la multiplicité de $m_{D,s}\cdot\mathcal{O}_{C,x}$ dans $\mathcal{O}_{C,x}$.
Or, $\mathcal{O}_{C,x}/m_{D,s}\cdot\mathcal{O}_{C,x} = \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\}/(f,j(f))$ et puisque C est lisse, il est facile de montrer (en construisant les deux idéaux évidents dans $\mathcal{O}_{C,x}\{z_o,\ldots,z_n\}$ qui ont des quotients isomorphes, donc même multiplicité, et qui ont d'autre part pour multiplicités respectives celle de $m_{D,s}\cdot\mathcal{O}_{C,x}$ et celle de $(f,j(f))\mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\})$ que la multiplicité de $m_{D,s}\cdot\mathcal{O}_{D,s}$ est celle de $(f,j(f))$ dans $\mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\}$, donc $\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)$. (ch. I, 1.1).

4.4 Le cône tangent $C_{D,s}$ à D en s a pour équation $T_o^{\mu}=0$ dans $gr_s S = gr_o\mathbb{C}\{t_o,\ldots,t_m\} = \mathbb{C}[T_o,\ldots,T_m]$ (où $\mu=\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)$.

Démonstration : L'ensemble sous-jacent $|C_{D,s}|$ doit être contenu dans l'image de l'application tangente à G restreinte à C. Or, si nous prenons $c'\in C$ de coordonnées $(\bar{z}_o,\ldots,\bar{z}_n, \bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_m)$ posant $s'=n(c')\in D$, l'image en question est l'hyperplan d'équation :

4.4.1 $$T_o-\bar{t}_o = \sum_{i=1}^{m} g_i(\bar{z}_o,\ldots,\bar{z}_n)(T_i-\bar{t}_i)$$

où

$$\bar{t}_o = F(\bar{z}_o,\ldots,\bar{z}_n, \bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_m) \quad .$$

Or, $g_i(z_o,\ldots,z_n)\in(z_o,\ldots,z_n)\mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_n\}$ $(1\le i\le m)$ (cf. 4), i.e. $g_i(0\,..\,0)=0$. De même, $F(0)=0$. Puisque $|C_{D,s}|$ est de dimension m, $|C_{D,s}|$ ne peut être que l'hyperplan $T_o=0$. Mais $C_{D,s}$ doit être une hypersurface de multiplicité $\mathfrak{M}_s(D) = \mu$.

4.5 Corollaire : En tout point $s' \in D$, si k est le nombre d'éléments de $n^{-1}(s')$, i.e. $x_i(s')$ $(1 \leq i \leq k)$ sont les points singuliers de $X_{s'}$, D est réunion de k composantes irréductibles $\tilde{D}_i$, indexées par $n^{-1}(s')$, la multiplicité de $\tilde{D}_i$ est $\mu^{(n+1)}_{x_i(s')}(X_{s'})$. Le cône tangent $C_{D,s'}$ est réunion de k hyperplans multiples en position générale, $C_{D,s'} = \bigcup_{i=1}^{k} C_{\tilde{D}_i,s'}$ chaque hyperplan étant compté avec la multiplicité $\mu_i = \mu^{(n+1)}_{x_i(s')}(X_{s'})$, et $\Sigma\mu_i = \mathfrak{M}_{s'}(D)$.

Démonstration : Evident d'après ce qui précède et 3.5 appliqué à C.

5. Nous allons maintenant chercher à étudier un peu les singularités de D. Remarquons que sauf dans le cas $\mu^{(n+1)}_{x_0}(X_0) = 1$, qui correspond à une singularité quadratique $\sum_{i=0}^{n} z_i^2 = 0$, D est effectivement singulier. Comme sa normalisation est lisse, D n'est pas normal, et la codimension du lieu singulier S(D) dans D est donc 1. Il est intéressant de savoir quelles singularités se présentent aux points généraux des composantes de codimension 1 dans D de S(D), parce que cela permet d'avoir des rensignements sur le groupe fondamental local de S - D en s. Or, D est enveloppe d'une famille à n+1 paramètres d'hyperplans de S, comme il est écrit en 4. Nous nous attendons donc à des arêtes de rebroussement, et à des intersections de nappes lisses, et ne serons pas surpris par la :

5.1 Proposition : Il existe un ouvert analytique partout dense U de S(D), tel que si $s' \in U$, D soit isomorphe au voisinage de s', soit au produit d'un cusp par $\mathbb{C}^{\tau-2}$ ($\tau = \dim S$), soit au produit de la réunion de deux droites en position générale de $\mathbb{C}^2$, par $\mathbb{C}^{\tau-2}$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que nous avons dans C un sous-espace de codimension 1, défini par l'idéal $H_z(F).\mathcal{O}_C$ où

$H_z(F) = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_i\, \partial z_j}\right)$ est le hessien relatif. Ce sous-espace sera noté $S^{n+1,1}$. Ce n'est autre que l'adhérence dans C de la strate de Boardman $\Sigma^{n+1,1}(G)$. $K = G(S^{n+1,1})$ nous fournira donc des composantes de codimension 1 dans D du lieu singulier S(D) (en fait, $S^{n+1,1}$, et donc K, est irréductible). Or, un point de $\Sigma^{n+1,1}$ est un point du type cusp dans sa fibre, (i.e. la fibre est localement isomorphe à une singularité d'équation : $z_o^3 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 0$) et une telle singularité a pour déformation miniverselle : $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$t_o \circ G = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + z_o^3 + t_1 z_o \quad ;$$

$$t_1 \circ G = t_1 \quad ,$$

son discriminant a pour équation $4t_1^3 + 27t_o^2 = 0$, c'est à dire encore un cusp. Au voisinage d'un point général de K (et même en tout point d'un ouvert analytique partout dense de K), D sera donc isomorphe au produit d'un cusp par un espace lisse.

Or, en un point général d'une composante irréductible de S(D) (même en tout point d'un ouvert analytique dense), ou bien D est irréductible, ou bien non. Si D est irréductible, il s'écrit localement (cf. 3.4, 4.4) $D = D_1 \times \mathbb{C}^{\tau-\tau_1}$ où $D_1 \subset \mathbb{C}^{\tau_1}$ et $S(D) = S(D_1) \times \mathbb{C}^{\tau-\tau_1}$, or si $\tau_1 \geq 3$, d'après ce qui précède, $S(D_1)$ contient des points-cusp. Si $\tau_1 = 2$, D_1 est un cusp, comme on le vérifie facilement : les seules singularités d'hypersurface pour lesquelles $\tau_{x_o}(X_o) = 2$ sont celles du type cusp. Ceci montre qu'une composante irréductible de codimension 1 de S(D), en un point général de laquelle D est irréductible, est contenue dans K, et est donc une composante de K. A l'extérieur d'un fermé analytique strict d'une telle composante, D sera donc localement isomorphe au produit d'un cusp par $\mathbb{C}^{\tau-2}$. Il nous reste à étudier les composansantes de codimension 1 de S(D) au point général desquelles D est réductible. A l'extérieur d'un fermé analytique strict d'une telle composante, D est normalement plat le long de $S(D)_{red}$ et donc l'espace tangent à $S(D)_{red}$ (de dimension τ-2) contenu dans l'intersection des cônes tangents aux différentes composantes irréductibles de D, qui sont des hyperplans en position générale (4.4). Ceci limite le nombre des composantes irréductibles de D à 2, et l'irréductibilité locale de S(D) fait le reste, en montrant que chaque composante de D doit être lisse.

5.2 <u>Corollaire</u> : (Toujours pour un représentant assez petit de G). Pour un 2-plan général H de S, (en particulier ne passant par s) $H \cap D$ est une courbe irréductible n'ayant comme singularités que des cusps et des points doubles ordinaires, (et par un argument facile de platitude, le nombre k des cusps et le nombre d des points doubles ne dépendent pas du H général choisi, et sont donc des invariants analytiques de (X_o,x_o). Nous allons chercher de l'information sur k et d. Rappelons d'abord :

5.3 <u>Proposition</u> ($\Longleftarrow$ Weierstrass) : On peut toujours écrire pour équation d'une singularité isolée d'hypersurface $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, dans des coordonnées bien choisies :

$$f(z_o,\dots,z_n) = \tilde{f}(z_o,\dots,z_k) + z_{k+1}^2 + \dots + z_n^2 = 0$$

où $\tilde{f}(z_o,\dots,z_k) \in (z_o,\dots,z_k)^3$ définit une singularité isolée d'hypersurface $(\tilde{X}_o,\tilde{x}_o) \subset \mathbb{C}^{k+1},0)$ uniquement déterminée par (X_o,x_o), appelée "singularité résiduelle".

5.4 <u>Remarque</u> : On vérifie facilement que $\tau_{\tilde{x}_o}(\tilde{X}_o) = \tau_{x_o}(X_o)$, $\mu_{\tilde{x}_o}(\tilde{X}_o) = \mu_{x_o}(X_o)$, et que le discriminant de la déformation miniverselle de $(\tilde{X}_o,\tilde{x}_o)$ est celui de celle de (X_o,x_o). Pour l'étude de ces discriminants, on peut donc toujours supposer que $f(z_o,\dots,z_n)$ est d'ordre au moins 3. On vérifie non moins facilement que si le symbole de (X_o,x_o) est $(n+1,i_2,\dots,i_s)$, celui de $(\tilde{X}_o,\tilde{x}_o)$ est $(i_2,i_2,i_3,\dots,i_s)$.

5.5 <u>Proposition</u> : Soit $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ donnée par $f(z_o,\dots,z_n)=0$. Soit $H(f)=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_j}\right)$ le hessien de f. $\overline{j(f)}$ désigne comme toujours la fermeture intégrale de $\left(\frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_{n+1}$ dans $\mathcal{O}_{n+1}$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $H(f)\notin\overline{j(f)}$

2) le symbole de (X_o,x_o) est : $(n+1,1,\dots,1)$

3) (X_o,x_o) est du type A_ℓ, i.e. isomorphe à une singularité d'équation $z_o^{\ell+1}+\sum_{i=1}^{n} z_i^2=0$.

<u>Démonstration</u> : 1) ⇒ 2) : si le symbole de (X_o,x_o) n'est pas $(n+1,1,\dots,1)$, par définition, tous les $n\times n$ mineurs de la matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_j}\right)$ s'annulent à l'origine. On applique (0,5.2) à l'application $\mathbb{C}^{n+1}\to\mathbb{C}^{n+1}$ définie par les $\frac{\partial f}{\partial z_i}$, et on en tire $H(f)\in\overline{j(f)}$.

2) ⇒ 3) résulte de 5.4 : si dans $(n+1,1,\dots,1)$ il y a $\ell-1$ fois 1, la singularité résiduelle aura pour symbole $(1,\dots,1)$ ℓ fois, et ne peut donc être que $z_o^{\ell+1}=0$.

3) ⇒ 1) est clair.

5.6 <u>Proposition</u> : Le nombre k des cusps apparaissant dans la section 2-plane générique du discriminant d'une déformation verselle de singularité isolée d'hypersurface $(X_o,x_o)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$ est la multiplicité du sous-espace K introduit en 5.1 à l'origine, si (X_o,x_o) n'est pas du type A_ℓ, $k\geq\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)$. Si (X_o,x_o) est du type A_ℓ, $k=\ell-1$ $(=\mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)-1)$.

<u>Démonstration</u> : La première partie de l'assertion résulte de 5.1 : le nombre de points de $K\cap H$, pour un 2-plan général H, n'est autre que $\mathfrak{m}_s(K)$. D'autre part, d'après 3.4, la restriction $G|S^{n+1,1}:S^{n+1,1}\to K$ est un morphis-

me biméromorphe. Comme en 4.2, la formule des projections montre que $\mathfrak{m}_S(K)$ est la multiplicité de l'idéal $j(f)\,.\,\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/H(f)$ dans $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}/H(f)$, c'est-à-dire le coefficient de $\frac{\nu^n}{n!}$ dans le polynôme avec lequel coïncide, pour ν assez grand, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{n}^{\nu} + (h)$ où l'on a posé $\mathfrak{n} = j(f)$,

$h = H(f) = \det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i\, \partial z_j}\right)$, $\mathcal{O}_{n+1} = \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$.

Or, nous pouvons considérer la suite exacte :

$$0 \longrightarrow ((\mathfrak{n}+h)^{\nu} : h)/(\mathfrak{n}+(h))^{\nu-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{n+1}/(\mathfrak{n}+(h))^{\nu-1} \xrightarrow{\times h} \mathcal{O}_{n+1}/(\mathfrak{n}+(h))^{\nu} \longrightarrow \mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{n}^{\nu}+(h) \longrightarrow 0$$

et posant $F(\nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/(\mathfrak{n}+(h))^{\nu}$, la formule d'additivité des longueurs nous donne :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+1}/\mathfrak{n}^{\nu}+(h) = F(\nu) - F(\nu-1) + \dim_{\mathbb{C}} ((\mathfrak{n}+h)^{\nu} : h)/(\mathfrak{n}+(h))^{\nu-1}$$

or, le coefficient de $\frac{\nu^n}{n!}$ dans $F(\nu) - F(\nu-1)$ n'est autre que la multiplicité de l'idéal $\mathfrak{n}+(h)$. On trouve donc bien :

$$k \geq \text{multiplicité de } (\mathfrak{n}+(h))$$

et si (X_o,x_o) n'est pas du type A_ℓ, h est entier sur $\mathfrak{n}$, (5.5), et la multiplicité de $(\mathfrak{n}+(h))$ est donc celle de $\mathfrak{n}$, i.e. $\mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$ (0,0.6 ; 0,1.1).
Si (X_o,x_o) est du type A_ℓ, un calcul direct (en se ramenant au cas $z_o^{\ell+1} = 0$ par 5.4) montre que $k = \ell - 1$.

5.7 <u>Lemme</u> : Soit $G : (\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, 0)$ déformation miniverselle de $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Soit $D \subset \mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ le discriminant de G. On peut choisir comme équation pour D :

$$\delta(t_o,\ldots,t_m) = t_o^{\mu} + a_{\mu-1}(t_1,\ldots,t_m)t_o^{\mu-1} + \ldots + a_o(t_1,\ldots,t_m) = 0$$

où $\mu = \mu_{x_o}(X_o)$.

Ceci est le théorème de préparation de Weierstrass, joint au fait que la projection de D sur $\mathbb{C}^m$ est transverse (grâce à 4.3).

5.8 De plus, pour toute suite de points $s_i \in D$ tendant vers s, les directions des hyperplans formant le cône tangent C_{D,s_i} (4.4) tendent toutes vers la direction $T_o = 0$ ($T_o = in_o t_o \in \mathbb{C}[T_o,\ldots,T_m]$). Ceci se lit en 4.3.1.

5.9 <u>Corollaire</u> : Notons $j'(\delta)$ l'idéal $\left(\frac{\partial\delta}{\partial t_o},\ldots,\frac{\partial\delta}{\partial t_m}\right)\mathcal{O}_D$,

$j'(\delta).\mathcal{O}_{C,x} = \frac{\partial\delta}{\partial t_o}.\mathcal{O}_{C,x}$ est inversible.

En effet, 5.8 signifie en particulier que les quotients $\frac{\partial\delta}{\partial t_i}\Big/\frac{\partial\delta}{\partial t_o}$ restent bornés sur D au voisinage de s. Puisque $C \to D$ est la normalisation, la propriété fondamentale des espaces normaux nous dit que ces quotients deviennent holomorphes sur C. On peut donc aussi dire que $n : C \to D$ est l'éclatement de $j'(\delta).\mathcal{O}_D$ suivi de normalisation.

5.10 <u>Lemme</u> : Soit $(D,0) \subset (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m,0)$ une hypersurface réduite, telle que $\mathbb{C}\times\{0\} \not\subset D$. Soit $\pi : (D,0) \to (\mathbb{C}^m,0)$ la projection, et soit $(\Delta,0) \subset (\mathbb{C}^m,0)$ le discriminant correspondant. (i.e. celui d'un polynôme de Weierstrass décrivant la situation). Notons $\mathfrak{M}_o'(D)$ la multiplicité d'intersection de D avec $\mathbb{C}\times\{0\}$ en 0 (i.e. le degré du polynôme de Weierstrass) et $\tilde{\mu}$ le nombre de Milnor de l'intersection de D avec un 2-plan général de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ contenant $\mathbb{C}\times\{0\}$. On a pour la multiplicité de Δ :

$$\mathfrak{M}_o(\Delta) = \tilde{\mu} + \mathfrak{M}_o'(D) - 1 \quad .$$

En particulier, si D est une courbe plane, Δ est l'origine de $\mathbb{C}$, comptée avec la multiplicité $\mu_o^{(2)}(D) + \mathfrak{M}_o'(D) - 1$. Dans le cas général, si π est transverse,

$\tilde{\mu} = \mu_0^{(2)}(D)$, au sens de ch. I, 1.5), i.e. nombre de Milnor de l'intersection de D avec un 2-plan général de $(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m,0)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de remarquer que $\mathfrak{M}_0(\Delta)$ est le nombre d'intersection de Δ en 0 avec une droite générale $(\ell,0)\subset(\mathbb{C}^m,0)$, que ceci est encore, puisque la formation du discriminant commute au changement de base, le discriminant du morphisme $((\mathbb{C}\times\ell)\cap D,0)\xrightarrow{\pi}(\ell,0)$, et d'appliquer à ce dernier (ch. II, 1.2).

5.11 <u>Exercice</u> : Montrer qu'une projection transverse d'un cusp (resp. point double ordinaire) sur une droite, donne pour discriminant l'origine comptée avec multiplicité 3 (resp. 2)

5.12 <u>Proposition</u> : Soit $D\subset\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m$ le discriminant de la déformation miniverselle $G:(X,x)\to(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m,0)$ d'une singularité isolée d'hypersurface $(X_0,x_0)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$. Soit $\pi:(D,0)\to(\mathbb{C}^m,0)$ la projection, soit $(\Delta,0)$ son discriminant. Si $\mathfrak{M}_0(\Delta)$ est la multiplicité :

$$\mathfrak{M}_0(\Delta) = 3k+2d$$

où k (resp. d) est le nombre de cusps (resp. croisements ordinaires) que l'on trouve en coupant D par un 2-plan général.

<u>Démonstration</u> : Grâce à 5.8, au voisinage de 0, les seuls points critiques de π sont les points singuliers de D. Δ est donc l'image de S(D). On peut calculer $\mathfrak{M}_0(\Delta)$ en coupant Δ par une droite générale L de $\mathbb{C}^m$ ne passant pas par l'origine, et en comptant les points d'intersection de L avec Δ (avec multiplicité). Mais $L\times\mathbb{C}$ va couper D selon une courbe n'ayant que des cusps et points doubles, et $L\cap\Delta$ est le discriminant de $(L\times\mathbb{C})\cap D\xrightarrow{\pi}L$. Or, chaque cusp contribue un point de multiplicité 3, chaque croisement multiplicité 2,

d'après 5.12 (π est transverse, grâce à 5.8).

5.13 <u>Remarque</u> : Ici, et dans 5.10, nous avons utilisé le fait que si π est transverse, une projection "voisine" le reste, et donne le même $\mathfrak{M}_o(\Delta)$; dans 5.10, pour affirmer que, si π est transverse, $\tilde{\mu} = \mu_o^{(2)}(D)$, et ici pour supposer que les cusps et croisements de $(L \times \mathbb{C}) \cap D$ ont des images distinctes dans L.

5.14 <u>Corollaire</u> : Posant $\tilde{\mu} = \mu_o^{(2)}(D)$, nombre de Milnor de la section de D par un 2-plan général de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$, et $\mu = \mathfrak{M}_o(D) = \mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o)$, on a :

$$\mathfrak{M}_o(\Delta) = 2d + 3k = \tilde{\mu} + \mu - 1 .$$

5.15 <u>Remarque</u> : Si l'on considère G comme un déploiement de $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, i.e. (cf. [Th]) $G : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ est considéré comme une famille à m paramètres de fonctions, $|\Delta|$ n'est autre que l'ensemble de bifurcation de G, (i.e. l'ensemble des valeurs $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m$ telles que $F_t : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ donnée par $t_o = F(z_o, \dots, z_n, t_1, \dots, t_m)$ n'ait pas μ points critiques quadratiques à valeurs distinctes). Il est donc intéressant à plus d'un titre d'évaluer $\mathfrak{M}_o(\Delta)$.

5.16 <u>Proposition</u> : On a l'inégalité

$$(\mathfrak{M}_o(\Delta) =)\ 2d + 3k \geq \mu^2 - 1 .$$

Il s'agit de minorer $\tilde{\mu}$. La preuve repose sur le :

5.16.1 **<u>Lemme</u>** : Soit $(\Gamma, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe de courbe plane irréductible. On a $\mu_o^{(2)}(\Gamma) \geq \mathfrak{M}_o(\Gamma)(\mathfrak{M}_o(\Gamma) - 1)$.

<u>Démonstration</u> : On choisit des coordonnées locales (z_o, z_1) sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ telles que la projection de Γ sur l'axe des z_o soit transverse, et même que la droi-

te $z_1 = 0$ soit tangente à Γ en 0. (On rappelle que $(\Gamma, 0)$ étant irréductible n'a qu'une tangente). Posons $\mu(\Gamma) = \mu_o^{(2)}(\Gamma)$, $\mathfrak{M}(\Gamma)$ désigne la multiplicité. On écrit grâce à 5.10 que le discriminant de la projection de Γ sur $(z_1 = 0)$ est l'origine comptée avec multiplicité $\delta = \mu(\Gamma) + \mathfrak{M}(\Gamma) - 1$. Si maintenant on éclate l'origine dans $\mathbb{C}^2$, la transformée stricte Γ' de Γ a un seul point dont l'image est $0 \in \Gamma$, correspondant à la direction $z_1 = 0$. On peut écrire Γ' dans les coordonnées locales $z_o' = z_o$, $z_1' = \dfrac{z_1}{z_o}$, et remarquer que la multiplicité d'intersection de Γ' avec $z_o' = 0$ est encore $\mathfrak{M}(\Gamma)$. D'autre part, le discriminant de la projection de Γ' sur $(z_1' = 0)$ (projection qui n'est plus en général transverse) est l'origine $(z_o' = z_1' = 0)$ comptée avec multiplicité $\delta' = \delta - \mathfrak{M}(\Gamma)(\mathfrak{M}(\Gamma) - 1)$. Appliquent encore 5.11 à cette projection, il vient en vertu de la remarque faite : $\delta' = \mu(\Gamma') + \mathfrak{M}(\Gamma) - 1$, et donc $\mu(\Gamma') = \mu(\Gamma) - \mathfrak{M}(\Gamma)(\mathfrak{M}(\Gamma) - 1)$ d'où l'inégalité cherchée.

Nous allons maintenant minorer $\tilde{\mu}$: Soit H un 2-plan général de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$. Ecrivons $(D \cap H, 0) = (\Gamma, 0) \subset (H, 0)$ et $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Gamma_i$, les Γ_i étant irréductibles. Notant $\mathfrak{M}_i$ la multiplicité de Γ_i, et $(\Gamma_i \cdot \Gamma_j)$ les nombres d'intersection en 0, on a la formule classique (cf. par exemple [Ri_2]) :

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{\ell} \mu(\Gamma_i) + 2 \sum_{i<j} (\Gamma_i \cdot \Gamma_j) - \ell + 1$$

puisque d'après 4.3 les courbes Γ_i ont toutes mêmes tangentes, $(\Gamma_i \cdot \Gamma_j) \geq \mathfrak{M}_i \cdot \mathfrak{M}_j + 1$, et d'après 5.16.1, $\mu(\Gamma_i) \geq \mathfrak{M}_i(\mathfrak{M}_i - 1)$. Il vient :

$$\tilde{\mu} \geq \sum_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i(\mathfrak{M}_i - 1) + 2 \sum_{i<j} \mathfrak{M}_i \cdot \mathfrak{M}_j + \ell(\ell - 1) - \ell + 1$$

d'où

$$\tilde{\mu} \geq \left(\sum_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i + \ell(\ell - 2) + 1$$

mais
$$\sum_{i=1}^{\ell} \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_o(\Gamma) = \mu$$

d'où

$$\tilde{\mu} \geq \mu^2 - \mu + \ell(\ell - 2) + 1$$

et $$\mathfrak{M}_o(\Delta) = 2d + 3k \geq \mu^2 + \ell(\ell - 2)$$

qui entraîne le résultat cherché.

5.17 Remarque : L'application directe de (ch. II, 2.1) à Γ nous donne seulement $\tilde{\mu} \geq (\mu - 1)^2$ et donc $2d + 3k \geq \mu(\mu - 1)$.

5.18 Pour terminer, remarquons que les lieux discriminants $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ étudiés ici sont saturés au sens de Zariski (voir ses exposés dans ce volume) ou au sens Lipschitzien de [P.T.]. En effet, le fait d'être saturé se décide aux points généraux de chaque composante de codimension 1 du lieu singulier (cf. [P.T.] et un cusp, ou un croisement ordinaire, est bien saturé.

§ 2. Géométrie du discriminant et équisingularité

Au paragraphe précédent, nous avons étudié les singularités "génériques" du discriminant de la déformation miniverselle d'un germe d'hypersurface à singularité isolée. En ce qui concerne les problèmes d'équisingularité, le rôle principal est au contraire tenu par les singularités "les pires" du discriminant.

2.1 Définition : Soit $(D,0) \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ le discriminant de la déformation semi-universelle de $(X_o, x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Posant $\mu = \mu_{x_o}^{(n+1)}(X_o,)$ nous avons vu que la multiplicité à l'origine de D est μ. Nous appellerons "strate à Σ_{μ_i} constant", et noterons D_μ l'espace analytique (réduit) des points de D qui sont de multiplicité μ dans D. Pour un représentant assez petit de $(D,0)$, $(D_\mu,0)$ est représenté par un sous-espace analytique fermé de D, strate de Samuel (cf. [L.T.]) (réduite) de 0 dans D.

2.2 Remarque : Il résulte de (§ 1, 4.4) que les points de D_μ sont caractérisés par la propriété suivante : si pour $s' \in D$, $x_i(s')$ $1 \leq i \leq k$ sont les points singuliers de la fibre $X_{s'}$ de la déformation miniverselle, posant $\mu_i = \mu^{(n+1)}_{x_i(s')}(X_{s'})$ on a :

$$s' \in D_\mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \mu_i = \mu \quad .$$

2.3 Définition : Soit

$$\begin{tikzcd}
(X_o,x_o) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X,x) \arrow[d, "G"] \\
\{y\} \arrow[r, hook] & (Y,y)
\end{tikzcd}$$

une déformation, à base réduite, de (X_o,x_o).

Nous dirons que G satisfait (Σ_μ) si pour tout représentant suffisamment petit, on a pour tout $y' \in Y$

$$\sum_{i=1}^{k} \mu^{(n+1)}_{x_i(y')}(X_{y'}) = \mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$$

où $x_i(y')$ sont les points singuliers de la fibre $X_{y'} = G^{-1}(y')$.

2.4 Remarque : G satisfait (Σ_μ) si et seulement si l'application $(Y,y) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ dans la base de la déformation miniverselle de (X_o,x_o) se factorise à travers $(D_\mu,0) \hookrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$.

2.5 <u>Définition</u> : Nous appellerons "strate à μ constant" et noterons D^1_μ le sous-ensemble de D_μ formé des points s' de D_μ tels que la fibre $X_{s'}$ ait un seul point singulier.

2.6 Il a été montré dans [T] que

1) D^1_μ est un sous-espace analytique de D_μ

2) Si $n : C \to D$ est la restriction de la déformation miniverselle $G : (X,x) \to (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, 0)$ a son lieu critique C, on peut écrire explicitement une section $\Sigma : D^1_\mu \to C$, i.e. $n^{-1}(D^1_\mu) \xrightarrow{n} D^1_\mu$ est un isomorphisme.

2.7 <u>Définition</u> : Reprenons comme en 2.3. Nous dirons que G satisfait (E_μ) ou que G est une déformation à μ constant, si pour tout $y' \in Y$, il existe un point singulier $x(y')$ de $X_{y'}$ tel que $\mu^{(n+1)}_{x(y)}(X_{y'}) = \mu^{(n+1)}_{x_o}(X_o)$.

2.8 <u>Remarque</u> : G satisfait (E_μ) si et seulement si le morphisme $(Y,y) \to (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, 0)$ dans la base de la déformation miniverselle de (X_o, x_o) se factorise à travers $(D^1_\mu, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, 0)$.
Autrement dit, toute déformation à μ constant, de base réduite, est obtenue par changement de base (dont l'application tangente de Zariski est uniquement déterminée) à partir de la déformation G_μ obtenue par le changement de base :

$$\begin{tikzcd} (X_\mu,x) \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, "G_\mu"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X,x) \arrow[d, "G"] \\ (D^1_\mu,s) \arrow[u, shift left, bend left, "\Sigma"] \arrow[r, hook] & (S,s) \end{tikzcd} \quad (= (\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m,0))$$

où G est la déformation miniverselle de (X_o, x_o).
De plus, la déformation "à μ constant miniverselle" G_μ est munie d'une section Σ telle que $X_\mu - \Sigma(D^1_\mu)$ soit lisse sur D^1_μ ; il en sera donc de même pour toute déformation à μ constant.

2.9 <u>Théorème</u> ("vérité non démontrée" 4.2 de [T], démontrée grâce au théorème B de $[L_2]$, voir aussi [La] et [C.H.B.]) : Les assertions suivantes sont non seulement équivalentes, mais encore vraies :

1) $D^1_\mu = D_\mu$ i.e. <u>la base de la déformation miniverselle à μ constant est la strate de Samuel (réduite) de l'origine dans $D \subset (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$</u>.

2) Toute déformation $G : (X,x) \to (Y,y)$ de l'hypersurface à singularité isolée $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, où Y est réduit, qui vérifie (Σ_μ) vérifie en fait (E_μ) (et donc possède une section σ telle que $X - \sigma(Y)$ soit lisse sur Y)

3) Le discriminant D est analytiquement irréductible en tout point $s' \in D_\mu$.

4) Le cône tangent $C_{D,s'}$ est un hyperplan compté μ fois en tout point $s' \in D_\mu$.

<u>Démonstration</u> : L'équivalence de 1), 2), 3), 4) résulte de (2.4), (2.8) et de 4.4 du § 1.

D'autre part, le théorème B de $[L_2]$ dit exactement que toute déformation de base $(\mathbb{D},0)$ qui satisfait (Σ_μ) vérifie (E_μ). Or, si $D^1_\mu \subsetneqq D_\mu$, puisque D^1_μ est un sous-espace analytique de D_μ , nous pouvons trouver un représentant $(\Gamma,0)$ d'un germe de courbe irréductible de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$ tel que $\Gamma - \{0\} \subset D_\mu - D^1_\mu$. La normalisation $(\mathbb{D},0) \to (\Gamma,0)$ de $(\Gamma,0)$ nous fournira par changement de base une déformation de base $\mathbb{D},0)$ vérifiant (Σ_μ) mais pas (E_μ), d'où la contradiction cherchée.

2.10 Le théorème de Lê et Ramanujam ([L.R.] voir aussi les exposés de Lê dans ce volume) joint au théorème de (ch. I, 1.4) nous dirait de même que D_μ est la base de la déformation miniverselle à type topologique constant, au moins si $\dim_{x_o} X_o \neq 2$. (Il faut noter ici que l'on n'a pas besoin de démontrer que l'ensemble des points de D_μ au-dessus desquels la fibre a même type topologique que (X_o,x_o) est un sous-espace analytique de D_μ. En effet, la démonstration de [L.R.] s'étend sans peine au cas d'une base lisse quelconque. On ne sait pas encore démontrer que D_μ est lisse, mais on dispose de la résolution locale des singularités $\widetilde{D}_\mu \to D_\mu$ (cf. [H_3]), et si l'on montre que la déformation obtenue par ce changement de base est à type topologique constant, c'est sûrement vrai aussi pour $X_\mu \to D_\mu$, par la surjectivité des morphismes résolvants. Ce résultat implique par contre que pour toute déformation $(X,x) \to (Y,y)$ d'une hypersurface à singularité isolée $(X_o,x_o) \hookrightarrow (\mathbb{C}^{n+1},0)$, où Y est réduit, et $\dim_{x_o} X_o \neq 2$, l'ensemble des points y' de Y tels que $(X_{y'},x(y'))$ ait même type topologique que (X_o,x_o) pour un point $x(y')$ (alors nécessairement l'unique point singulier de $X_{y'}$) est un sous-ensemble analytique de Y ; c'est en effet l'image réciproque de D_μ par le morphisme $(Y,y) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m,0)$ correspondant à la déformation donnée.

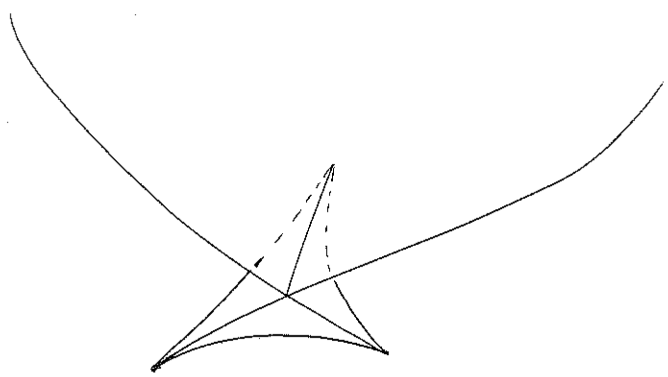
2.11 On peut fortifier la conjecture [C_1] du préambule comme suit :

Conjectures :

1) D_μ est lisse.

2) $(X_\mu - \Sigma(D_\mu), \Sigma(D_\mu))$ satisfait les conditions de Whitney.

3) D_μ est la base de la déformation miniverselle à "μ^* constant".



***

REFERENCES

[B] P. L. Bhattacharya : The Hilbert function of two ideals, Proc. Cambridge Phil. Soc. t. 53, 1957, p. 568-575 .

[Be] P. Berthelot : Classification topologique universelle des singularités, d'après F. Pham, Séminaire Douady-Verdier 1971-72, Exposé 10, E. N. S. 45, rue d'Ulm, Paris.

[C.H.B.] Cevdet Haş Bey : Application à l'équisingularité, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, p. 105-107.

[C.S] G. Canuto et J. P. Speder : Conditions d'éclatement et conditions de Whitney, Preprint Université de Nice 1971-72.

[E.M.S] R. Thom : Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969).

[G] H. Grauert formationen isolierter singulåritaten, Inventiones Math. vol. 15, Fasc. 3 (1972).

[H_1] H. Hironaka : Introduction to the theory of infinity near singular points, Publications del Instituto "Jorge Juan" de Matematicas, Université de Madrid, 1971.

[H_2] H. Hironaka : Equivalence and deformations of singularities, Woods Hale Alg. Geom. Seminar 1964.

[H_3] H. Hironaka : Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Maths., vol. 79, Nos 1-2 (1964).

[L_1] Lê Dũng Tráng : Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, ce volume.

[L_2] Lê Dũng Tráng : Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité", Preprint Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 17, rue Descartes, Paris, No A113.0273 (à paraître).

[L.R] Lê Dũng Tráng et C. P. Ramanujam : The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Preprint Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 17, rue Descartes, Paris, No M10.0573 (à paraître).

[La] F. Lazzeri : A theorem on the monodromy, ce volume.

[L_i] J. Lipman : Rational singularities, in "Volume dédié au professeur Oscar Zariski", Publ. Math. I.H.E.S. (Bures sur Yvette) 1969, No 36.

[L.T] M. Lejeune et B. Teissier : Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint Université de Warwick 1971.

[M] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies, No 61, Princeton University Press, 1968.

[Ma] J. Mather : Notes on topological stability, Harvard 1971.

[N] M. Nagata : Local rings, John Wiley and Sons Inc. (Interscience Publishers) New York 1962.

[P] F. Pham : Classification des singularités, Université de Nice (1971).

[R] D. Rees : A-transforms of ideals, and a theorem on multiplicities of ideals, Proceedings of the Cambridge Phil. Soc., vol. 57 (1961), p. 8-17.

[Ri_1] J. J. Risler : Sur les déformations équisingulières d'idéaux, Bull. Soc. Math. de France, t. 101, 1973, p. 3-16.

[Ri_2] J. J. Risler : Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, Bull. Soc. Math. de France, t. 99, 1971, p. 305-311.

[Se] J. P. Serre : Algèbre locale et multiplicité, Springer Lecture Notes in Mathematics, No 11 (1965).

[T] B. Teissier : Déformations à type topologique constant, Exposés au séminaire Douady-Verdier 1971-72, E. N. S., 45, rue d'Ulm, Paris.

[Th] R. Thom : Modèles mathématiques de la morphogénèse, Séminaire I.H.E.S. 1971.

[Tj] G. N. Tjurina : Locally semi-universal flat deformations...., Math. of the USSR Izvestija, vol. 3, No 5, p. 967-999, (1969).

[W] H. Whitney : Tangents to an analytic variety, Annals of Math., t. 81, (1965), No 3, p. 496-549.

[Z_1] O. Zariski : Studies in Equisingularity I, II, American J. of Math. t. 87, (1965), p. 507-536, et 972-1006.

[Z_2] O. Zariski : Some open questions in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc., July 1971, t. 77, No 4, p. 481-491.

[Z_3] O. Zariski : Contributions ot the problem of equisingularity, C.I.M.E. 1969 (Varenna) "Questions on algebraic varieties", Edizioni Cremonese, Roma 1970.

Références additionnelles

[H.L] H. Hamm et Lê Dũng Tráng : Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, à paraître aux Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

[$L.T_1$] M. Lejeune et B. Teissier : Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire, Ecole Polytechnique 1971-72.

[P.T.] F. Pham et B. Teissier : Fractions Lipschitziennes et saturation de Zariski, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1969.
Voir aussi : Actes du Congrès International, Nice 1970, Tome II, p. 649-654.

[S] Schlessinger : Thèse, Harvard, 1965.
