http://dx.doi.org/10.1090/pspum/040.2/713238

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 40 (1983), Part 2

CYCLES EVANESCENTS, SECTIONS PLANES ET CONDITIONS DE WHITNEY. II

LÊ D. T. ET B. TEISSIER

ABSTRACT. Given a partition $X = \cup X_\alpha$ of a complex analytic space X into nonsingular constructible subspaces, we state several local conditions of algebraic, topological and combinatorial nature which are equivalent to the fact that this partition is a Whitney stratification of X. In particular this result contains a converse to a suitable improvement of the Thom-Mather topological triviality theorem (in the complex-analytic case).

0. Introduction. Dans son article [**W1**], H. Whitney introduit la notion de stratification régulière comme outil dans l'étude des espaces analytiques complexes singuliers. En même temps, R. Thom (voir [**Th 1, 2, 3, 4**]) étend ces idées au cas différentiable, en introduisant la notion d'ensemble stratifié, et au cas relatif, introduisant en particulier la notion de morphisme sans éclatement. Il donne les théorèmes de trivialité topologique locale le long des strates d'une stratification ou d'un morphisme (premier et deuxième théorèmes d'isotopie). Le programme de R. Thom a été précisé et développé par J. Mather dans [**Ma1, Ma2**]. Dans [**Ło**] S. Łojasiewicz montre que tout ensemble semianalytique a une stratification régulière. Dans [**Sch**], M. H. Schwartz donne une définition des classes de Chern pour un espace analytique complexe muni d'une stratification régulière (voir aussi [**B-S**]).

En relation avec sa théorie de l'équisingularité O. Zariski (cf. [**Z1**]) a été amené à donner dans le cas d'hypersurfaces dont le lieu singulier est non singulier et de codimension un des conditions algébriques pour que la partie non singulière et la partie singulière de l'hypersurface forment une stratification régulière. Dans [**H6**] H. Hironaka montre que la condition de régularité de Whitney entraine l'équimultiplicité. Dans [**Te2**] B. Teissier donne un critère numérique pour la régularité de Whitney d'une hypersurface le long de son lieu singulier supposé non singulier. Dans [**Te5**], il énonce que ce critère est nécessaire et suffisant pour obtenir la condition de régularité dans cette situation géométrique. En fait la réciproque du résultat de [**Te2**] a été démontrée par J. Briançon et J. P. Spéder dans [**Br-Sp2**].

1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 32C40, 32B30, 32C42.

Du point de vue topologique, dans la situation de O. Zariski ci-dessus, i.e. une hypersurface à lieu singulier non singulier de codimension un, O. Zarsiki dans [**Z.1**] et Lê D. T. montrent que la trivialité topologique de l'hypersurface le long de son lieu singulier donne la condition de régularité (cf. [**Lê2, L-R**]). Cette situation particulière a laissé espérer que la trivialité topologique le long des strates d'une stratification implique la condition de régularité de Whitney (cf. [**Te2, Te4**]). Le résultat de B. Teissier de [**Te2**] cité ci-dessus s'interprète de la façon suivante: dans le cas d'une hypersurface à lieu singulier non singulier, on a la condition de Whitney si l'on a la trivialité topologique locale quand on coupe l'hypersurface par un "drapeau générique" de sous-espaces non singuliers contenant le lieu singulier. C'est en fait ce résultat que nous avons en particulier généralisé ici et qui contient la "bonne" réciproque du théorème de Thom-Mather (cf. §5). J. Briançon et J. P. Spéder ont en effet donné dans [**Br-Sp1**] un exemple d'une hypersurface dans $\mathbf{C}^4$ topologiquement triviale le long de son lieu singulier qui est une courbe non singulière, et ne satisfaisant pas la condition de régularité de Whitney.

L'étude de la condition de régularité amène naturellement à celle des limites d'espaces tangents et des limites de sécantes (cf. [**W2**]). C'est ainsi que H. Hironaka dans [**H6** et **H3**] (et dans des conférences à l'Inst. Hautes Etudes Sci. en 1968 non publiées) a donné des conditions algébro-géométriques impliquant la condition de régularité de Whitney. Ce type de résultat a été étendu par J. P. Spéder dans [**Sp**] et G. Canuto et J. P. Spéder [**C-S**]. L'étude géométrique des limites d'espaces tangents a été commencée dans [**He-Lê**] par J. P. G. Henry et Lê D. T. En utilisant ces concepts, V. Navarro dans [**N**] démontre dans le cas particulier où la petite strate est de dimension 1 une conjecture de B. Teissier selon laquelle la condition de régularité de Whitney se conserve par intersection par un sous-espace non singulier général contenant la petite strate, ce qui donne en particulier une autre démonstration du théorème d'Hironaka déjà cité sur l'équimultiplicité le long d'une strate d'une stratification régulière (voir aussi [**Na-Tr**]).

Par ailleurs de divers points de vue a été introduit le concept de courbe polaire locale et de variété polaire locale (cf. [**Lê3, Te3**]). Dans le cas de singularités d'intersections complètes la relation entre la multiplicité de ces variétés polaires et la topologie locale de la singularité et de ses sections linéaires génériques (cf. [**Lê3, Te3, Lê5, Lê6, Te2**]) a donné les idées nécessaires pour comprendre d'une part que les multiplicités des variétés polaires locales s'interprètent comme des invariants combinatoires de la topologie locale et d'autre part de préciser la relation entre l'obstruction d'Euler locale que R. MacPherson (cf. [**MP**]) associe à un point singulier et la géométrie locale de la singularité (cf. [**Lê-Te**]). En fait les variétés polaires locales fournissent le lien entre la structure des limites d'espaces tangents en un point singulier et la topologie locale des singularités et de leurs sections linéaires. Ce lien permet d'une part de définir numériquement une stratification naturelle qui donne une construction explicite du cycle de MacPherson-Schwartz (cf. [**Lê-Te**]) d'un espace singulier et d'autre part un critère numérique pour la condition de régularité de Whitney qui implique que cette stratification est régulière. Ce critère numérique a été énoncé par B. Teissier dans [**Te6**], mais sa démonstration, correcte dans le cas des hypersurfaces, contenait une erreur réparée par J. P. G. Henry et M. Merle dans [**He-M2**] et par B. Teissier dans [**Te1**] en utilisant l'idée de J. P. G. Henry et M. Merle.

Dans cet article nous utilisons la plupart des idées ci-dessus pour obtenir une réciproque raisonnable au théorème de Thom-Mather (cf. §5) dans le cadre analytique complexe. Cette réciproque énonce des critères algébriques, combinatoires, homotopiques et topologiques (cf. Théorème (5.3.1)) qui impliquent la condition de régularité de Whitney.

Les caractéristiques d'Euler-Poincaré locales utilisées dans la réciproque du théorème de Thom-Mather généralisent les $\mu^{(i)}$ de [**Te2**] (cf. [**Te5**, Chapter VI, §4]), et ont été introduites par M. Kashiwara [**K**] et par A. Dubson dans [**D**] pour calculer l'obstruction d'Euler locale de R. MacPherson. Ils ont a observé (cf. [loc.cit.]) que ces caractéristiques étaient constantes le long des strates d'une stratification régulière. J. P. Brasselet et M. H. Schwartz [**B-S**] ont montré la constance de l'obstruction d'Euler locale le long des strates d'une stratification régulière. Signalons d'autres travaux significatifs sur les stratifications régulières. Dans le cas réel (différentiable, sous-analytique) par D. Trotman [**Tr**], V. Navarro et D. Trotman [**Na-Tr**], J. L. Verdier [**V**], H. Hironaka [**H4**], M. Goresky [**G**] ainsi que des travaux particuliers dans le cadre analytique complexe dans le cas d'espaces analytiques dont le lieu singulier est non singulier de codimension un [**St, D-F, B-G-G, Bu-G**].

Pour pouvoir énoncer notre théorème principal (5.3.1), nous sommes amenés à des préliminaires sur l'étude de la topologie locale des singularités, en particulier nous introduisons la notion de système fondamental à un paramètre de bons voisinages, la notion de morphisme descriptible et d'équivalence d'homotopie descriptible, et nous démontrons à l'instar de [**Lê1**] une généralisation du théorème de fibration de Milnor [**Mi**]. Nous démontrons aussi que les caractéristiques d'Euler-Poincaré locales de Kasiwara et Dubson sont constantes le long des strates d'une stratification régulière.

Dans tout le texte on dira stratification de Whitney au lieu de stratification régulière et condition de Whitney au lieu de condition de régularité de Whitney.

Nous pensons qu'un travail analogue à celui que nous faisons ici devrait être fait pour la condition de Thom (comparer à [**Sa**]).

Nous remercions Claudine Harmide pour son excellent travail de frappe.

1. Rappels.

(1.1) *Variétés polaires locales* (cf. [**LêTe**, §2; **Te1**, Chapitre IV]).

(1.1.1) Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d, $x \in X$ et $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ un plongement local défini au voisinage de x.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant d-1$, notons G_k la Grassmannienne des noyaux des projections linéaires $p\colon \mathbf{C}^{N+1} \to \mathbf{C}^{d-k+1}$. Soit $\mathring{P}_k(X, p)$ l'ensemble des points de la partie non singulière X^0 de X qui sont critiques pour la restriction de p à X^0. L'adhérence $P_k(X, p)$ de $\mathring{P}_k(X, p)$ dans un représentant assez petit de (X, x) est un sous-espace analytique fermé de ce représentant.

(1.1.2) Il existe un ouvert de Zariski dense U_k de la Grassmannienne G_k tel que, pour toute projection $p: \mathbf{C}^{N+1} \to \mathbf{C}^{d-k+1}$ dont le noyau appartient à U_k, le germe $(P_k(X, p), x)$ est soit vide, soit réduit, de codimension k et sa classe d'équisingularité (donc sa multiplicité) ne dépend pas du choix de p (cf. [**Te1**, Chapitre IV, §3]). Un tel germe est appelé variété polaire locale générale de codimension k de (X, x) et est noté $(P_k(X), x)$. On a $(P_0(X), x) = (X, x)$. On note $M^*_{X,x}$ la suite $(m_x(P_0(X)), \ldots, m_x(P_{d-1}(X)))$ des multiplicités en x des variétés polaires locales générales de (X, x). Le premier terme de cette suite est la multiplicité de X en x et $(P_k(X), x) = \varnothing$ si et seulement si sa multiplicité en x est nulle. Avec les hypothèses faites, le point x de X est non singulier si et seulement si $M^*_{X,x} = (1, 0, \ldots, 0, 0)$.

(1.1.3) Dans [**Te1**, Chapitre IV, §3] on démontre

THÉORÈME (B. TEISSIER). *La suite $M^*_{X,x}$ ne dépend que de l'algèbre analytique $\mathcal{O}_{X,x}$ de (X, x).*

La définition des variétés polaires locales et les résultats généraux sur la semi-continuité de la multiplicité impliquent

(1.1.4) PROPOSITION. *Pour tout entier ν, l'ensemble des points $x \in X$ tels que $m_x(P_k(X)) \geqslant \nu$ est un sous-espace analytique fermé de X.*

(1.2) *Stratifications et condition de Whitney*. Dans ce paragraphe et la suite, nous utiliserons la notion d'ensemble sous-analytique (réel) et ses propriétés (cf. [**H1, H2, Ha**]).

(1.2.1) DÉFINITION. Soit X un ensemble sous-analytique. Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytiques non singuliers connexes de X. On dit que la famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une *stratification sous-analytique* de X si:

(1) la famille $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une partition de X;

(2) la fermeture $\overline{X}_\alpha$ de X_α dans X et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-ensembles sous-analytiques de X, pour chaque $\alpha \in A$. (Cette condition est ici pour mémoire, car en fait elle est toujours vérifiée (cf. [**H2**]).)

Les sous-ensembles X_α sont appelés *strates* de la stratification.

(1.2.2) DÉFINITION. Dans le cas d'un espace analytique complexe réduit X, si la stratification sous-analytique $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est telle que $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$, soient des sous-espaces analytiques complexes fermés de X, on dit que la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X est une *stratification analytique complexe* de X.

(1.2.3) DÉFINITION (CF. [**W1, H1, H2**]). Soit X un ensemble sous-analytique (resp. un espace analytique complexe réduit) muni d'une stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ sous-analytique (resp. analytique complexe). On dit que cette stratification satisfait *la propriété de frontière* si, pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times A$ tel que $X_\alpha \cap \overline{X}_\beta \neq \varnothing$, on a $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$.

Dans ce cas $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$, sont union de strates de la stratification donnée de X.

(1.2.4) DÉFINITION (CF. [**W1, H1**]). Soient X un ensemble sous-analytique, M un sous-ensemble sous-analytique non singulier de X, Y un sous-ensemble sous-analytique non singulier de la fermeture $\overline{M}$ de M dans X (qui est sous-analytique). On dit que *le couple* (M, Y) *satisfait la condition de Whitney en un point* $y \in Y$ s'il existe un plongement local de (X, y) dans $(\mathbf{R}^{N+1}, 0)$ tel que, pour toute suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de couples de points dans $M \times Y$ qui tend vers (y, y) et pour laquelle la direction limite T des espaces tangents $T_{x_n}M$ et la direction limite $l_\mathbf{R}$ des directions réelles de sécantes $\overline{x_n y_n}$ dans $\mathbf{R}^{N+1}$ existent, on a l'inclusion $l_\mathbf{R} \subset T$.

On vérifie que, si la condition est vérifié par un plongement local, elle est vérifiée par tous les plongements locaux.

On dit que le couple (M, Y) satisfait la condition de Whitney, si (M, Y) satisfait la condition de Whitney en tout point $y \in Y$.

(1.2.5) REMARQUE. Dans le cas où X est un espace analytique complexe réduit, on considère un sous-espace analytique complexe M non singulier dont la fermeture $\overline{M}$ dans X est aussi un sous-espace analytique complexe et un sous-espace analytique complexe non singulier Y de $\overline{M}$ contenu dans $\overline{M} - M$. On définit, comme dans (1.2.4), que le couple (M, Y) satisfait la condition de Whitney en un point $y \in Y$: on remarque que les espaces tangents $T_{x_n}M$ sont complexes, que par conséquent T est aussi un espace complexe et que, si la direction réelle $l_\mathbf{R}$ est contenue dans T, l'unique direction complexe l qu'elle définit est aussi contenue dans T.

(1.2.6) DÉFINITION. Soit X un ensemble sous-analytique (resp. un espace analytique complexe réduit) muni d'une stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ sous analytique (resp. analytique complexe). On dit que la stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une *stratification de Whitney* si:

(1) la stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ satisfait la propriété de frontière;

(2) pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times A$ tel que $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ le couple (X_β, X_α) satisfait la condition de Whitney.

Dans [**W1**], on démontre (cf. [**H1**] pour le cas sous-analytique)

(1.2.7) THÉORÈME (H. WHITNEY-H. HIRONAKA). *Soit X un ensemble sous-analytique* (*resp. un espace analytique complexe réduit*). *Soit $(\Phi_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de sous-ensembles fermés de X sous-analytiques* (*resp. analytiques complexes*). *Il existe une stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ sous-analytique* (*resp. analytique complexe*) *de X qui est une stratification de Whitney et telle que chaque Φ_i, $i \in I$, soit union de strates.*

En utilisant le premier théorème d'isotopie de Thom et Mather (cf. [**Th 1–4** et **Ma2**]), on démontre

(1.2.8) THÉORÈME (R. THOM-J. MATHER). *Soient X un ensemble sous-analytique* (*resp. un espace analytique complexe réduit*) *et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification de Whitney de X sous-analytique* (*resp. analytique complexe*). *Soit $x \in X$ et X_α la* *strate qui contient* x. *Pour tout plongement analytique local* $(X, x) \subset (\mathbf{R}^{N+1}, 0)$ (*resp.* $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$), *il existe un système fondamental de voisinages* $(U_j)_{j \in J}$ *de* 0 *dans* $\mathbf{R}^{N+1}$ (*resp.* $\mathbf{C}^{N+1}$) *et un système compatible d'homéomorphismes*

$$\varphi_j\colon U_j \rightleftarrows (X_\alpha \cap U_j) \times (H \cap U_j),$$

où H *est un sous-espace analytique réel* (*resp. complexe*) *non singulier de* $\mathbf{R}^{N+1}$ (*resp.* $\mathbf{C}^{N+1}$) *qui coupe transversalement* X_α *en* x *avec* $X_\alpha \cap U_j \cap H = \{x\}$, *et au demeurant quelconque, homéomorphismes qui induisent des homéomorphismes* $\varphi_{j,\beta}$: $U_j \cap \overline{X} \rightleftarrows (X_\alpha \cap U_j) \times (H \cap U_j \cap \overline{X}_\beta)$ *pour tout* $\beta \in A$ *tel que* $x \in \overline{X}_\beta$.

(1.2.9) REMARQUE. Dans l'énoncé précédent on peut choisir des ouverts U_j qui sont des bons voisinages au sens de Prill [**P**] de x dans chacun des $\overline{X}_\beta$ tels que $x \in \overline{X}_\beta$.

(1.3) *Caractérisation algébrique de la condition de Whitney*. Dans [**Te1** et **He-M2**] on démontre

(1.3.1) THÉORÈME (B. TEISSIER). *Soient* X *un espace analytique complexe réduit purement de dimension* d, Y *un sous-espace analytique complexe non singulier de* X *et* $x \in Y$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *la suite* $M^*_{X,y}$ (*cf.* (1.1.2)) *est indépendante de* $y \in Y$ *au voisinage de* x;

(ii) *le couple* (X^0, Y), *où* X^0 *désigne la partie non singulière de* X, *satisfait la condition de Whitney en* x.

On a aussitôt

(1.3.2) COROLLAIRE. *L'ensemble des points* $y \in Y$ *en lesquels le couple* (X^0, Y) *ne satisfait pas les conditions de Whitney est un fermé analytique strict de* Y.

Rappelons enfin comment l'on utilise ce résultat pour construire une stratification de Whitney canonique d'un espace analytique complexe réduit (cf. [**Lê-Te3**, 6.1; **Te1**, VI, §3]).

Posons $F_0 = X$, $F_1 = \operatorname{Sing} X$ (lieu singulier de X).

Supposons avoir construit $F_0, F_1, \ldots, F_{l-1}$. Soit $F_{l-1} = \bigcup_{j \in J_{l-1}} F_{l-1,j}$ la décomposition de F_{l-1} en composantes irréductibles. Pour chaque $j \in J_{l-1}$, notons B_j l'ensemble des points $x \in F_{l-1,j}$ où l'une des suites $M^*_{F_{k,j},x}$ (où $0 \leqslant k \leqslant l-2$ et $j \in J_k$) ne prend pas la valeur qu'elle prend en un point général de $F_{l-1,j}$. On définit F_l comme le sous-espace analytique fermé de F_{l-1} qui est réunion du lieu singulier de F_{l-1} et des fermés analytiques B_j ($j \in J_{l-1}$) qui forment une famille localement finie comme on le vérifie immédiatement.

Le sous-espace analytique fermé F_l est rare dans F_{l-1}, et l'on obtient ainsi une filtration

$$X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_{l-1} \supset F_l \supset \cdots$$

où, pour tout $x \in X$, $\dim_x F_l < \dim_x F_{l-1}$ et par conséquent, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U et un entier l_0 tel que $F_l \cap U = \varnothing$ quand $l \geqslant l_0$.

Il résulte du Théorème (1.3.1)

(1.3.3) COROLLAIRE. *La famille* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *des composantes connexes des différences* $F_k - F_{k+1}$ *est une stratification de Whitney analytique complexe de* X *et pour toute stratification de Whitney analytique complexe* $(Z_\gamma)_{\gamma \in C}$ *de* X, *chaque strate* Z_γ *est contenue dans une strate* X_α.

(1.3.4) REMARQUE. Etant donné une famille $(\Phi_i)_{i \in I}$ localement finie de sous-espaces analytiques complexes fermés de X (comme dans (1.2.7)), une modification de la construction précédente donne aussi une stratification de Whitney analytique complexe de X minimale parmi celles où chaque Φ_i est réunion de strates.

De (1.1.3) et (1.3.3), on obtient

(1.3.5) COROLLAIRE. *Tout espace analytique complexe réduit* X *possède une stratification de Whitney analytique complexe minimale qui ne dépend que de la structure analytique de* X; *en particulier, si* i: $U \to X$ *est une immersion ouverte, les composantes connexes des images réciproques par* i *des strates de la stratification de Whitney analytique complexe minimale de* X *donnent les strates de la stratification de Whitney analytique complexe minimale de* U.

(1.4) *Stratifications de Thom.*

(1.4.1) Soit f: $X \to Y$ un morphisme sous-analytique (resp. analytique complexe) d'ensembles sous-analytiques (resp. espaces analytiques complexes réduits). Nous dirons que f est *stratifiable* s'il existe des stratifications de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ de X et Y respectivement telles que, pour tout $\alpha \in A$, il existe $\beta(\alpha) \in B$ pour lequel f induise une submersion analytique (resp. analytique complexe) f_α: $X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}$.

(1.4.2) EXEMPLE. Un morphisme sous-analytique (resp. analytique complexe) qui est propre est stratifiable (cf. [**H3**, §3, Theorem]).

(1.4.3) Dans le cas où f: $X \to Y$ est propre, surjectif, sous-analytique (resp. analytique complexe) et stratifié, le premier théorème d'isotopie de Thom et Mather déjà invoqué dans (1.2.8) implique que, pour toute strate Y_β, $\beta \in B$, le morphimse f induit une fibration topologique localement triviale de $f^{-1}(Y_\beta)$ sur Y_β.

(1.4.4) Soit f: $X \to Y$ un morphisme sous-analytique (resp. analytique complexe) stratifiable. Soient $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ des stratifications de Whitney de X et Y respectivement telles que, pour tout $\alpha \in A$, il existe $\beta(\alpha) \in B$ pour lequel f induise une submersion analytique (resp. analytique complexe) f_α: $X_\alpha \to Y_{\beta(\alpha)}$. On dit que *le couple* (X_β, X_α) *tel que* $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ *satisfait la condition de Thom en* $x \in X_\alpha$ *relativement à* f s'il existe un plongement analytique (resp. analytique complexe) de (X, x) dans $(\mathbf{R}^{N+1}, 0)$ (resp. de (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$) et une extension analytique F de f à $(\mathbf{R}^{N+1}, 0)$ (resp. $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$) telle que la restriction de F à un voisinage de x dans X coincide avec la restriction de f à ce voisinage, et que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de X_β qui tend vers x et pour laquelle la suite des espaces tangents $T_{x_n}(F^{-1}(F(x_n)) \cap X_\beta)$ a une limite T, on ait

$$T \supset T_x\big(F^{-1}(F(x)) \cap X_\alpha\big).$$

On dit que la stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ satisfait *la condition de Thom* relativement à f si, pour tout couple (X_β, X_α) de strates telles que $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$, le couple (X_β, X_α) satisfait la condition de Thom relativement à f en tout point $x \in X_\alpha$. Dans ce cas on dit aussi que la stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ satisfait *la condition a_f de Thom* (cf. [**Th1**; **H3**, §5]).

(1.4.5) Nous dirons qu'un morphisme sous-analytique (resp. analytique complexe) $f\colon X \to Y$ est *un morphisme de Thom* sous-analytique (resp. analytique complexe) s'il est stratifiable et s'il existe une stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X qui satisfait la condition de Thom relativement à f.

2. Morphismes de Thom locaux.

(2.1) *Morphismes descriptibles.*

(2.1.1) DÉFINITION. On dit qu'un morphisme analytique complexe $f\colon X \to Y$ d'espaces analytiques complexes réduits est un *morphisme descriptible* s'il existe une stratification $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ *analytique complexe* de Y telle que, pour tout $\beta \in B$, f induise une fibration topologique localement triviale $f_\beta\colon f^{-1}(Y_\beta) \to Y_\beta$.

Si Y est irréductible, on appellera *fibre générale d'un morphisme descriptible*, la fibre en un point de la strate dense dans Y.

(2.1.2) D'après (1.4.3), si $f\colon X \to Y$ est un morphisme analytique complexe propre d'espaces analytiques comples réduits, le morphisme f est descriptible (il n'est pas nécessaire de supposer que f est surjectif!).

(2.1.3) PROPOSITION. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme descriptible tel que*:

(1) *la stratification $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ de Y telle que f induise une fibration topologique localement triviale $f_\beta\colon f^{-1}(Y_\beta) \to Y_\beta$ est finie, i.e.* Card $B < +\infty$;

(2) *les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(X)$ de X et $\chi(Y_\beta)$ des strates Y_β, $\beta \in B$, sont finies.*

Alors on a l'égalité:

$$\chi(X) = \sum_{\beta \in B} \chi(F_\beta)\chi(Y_\beta)$$

où F_β est une fibre de f_β.

PREUVE. Comme dans [**S**], on remarque qu'un espace analytique complexe réduit est triangulable d'après [**H4**] et que le bord de l'étoile, i.e. l'entrelacement, d'une réunion de strates, est de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Ceci implique que le complémentaire d'une telle réunion dans son " voisinage tubulaire" est de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. La suite de Mayer-Vietoris donne alors immédiatement la relation cherchée.

(2.1.4) REMARQUE. Dans [**MP**] le même argument que dans la preuve de (2.1.3) donne que la correspondance qui, à une variété algébrique compacte complexe X fait correspondre le groupe abélien $\mathbf{F}(X)$ des fonctions constructibles sur X et à un morphisme de tels variétés $f\colon X \to Y$ fait correspondre l'homomorphisme

$\mathbf{F}(f)$: $\mathbf{F}(X) \to \mathbf{F}(Y)$ qui, à la fonction caractéristique $\mathbf{1}_w$ d'une sous-variété W de X, fait correspondre la fonction constructible dans $\mathbf{F}(Y)$ définie par $y \mapsto \chi(f^{-1}(y) \cap W)$, est un foncteur de la catégorie des variétés algébriques compactes complexes dans la catégorie des groupes abéliens. En fait cet argument montre que l'on peut étendre ce foncteur à la catégorie des espaces analytiques réduits stratifiables par des stratifications dont les strates sont de caractéristiques d'Euler-Poincaré finies et dont les morphismes sont descriptibles avec de telles stratifications.

(2.1.5) REMARQUE. Dans le cas sous-analytique une notion similaire à celle des morphismes descriptibles ne conduit pas à une formule aussi simple que celle de (2.1.3).

(2.1.6) DÉFINITION. Soient f: $X \to Y$ et f': $X' \to Y'$ deux morphismes descriptibles. Nous dirons que l'on a un *homéomorphisme ou une équivalence topologique* (resp. *une équivalence d'homotopie*) *descriptible de f sur f'* s'il existe:

(i) des stratifications analytiques complexes $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ et $(Y'_\beta)_{\beta \in B}$ de Y et Y' respectivement telles que f et f' induisent respectivement pour tout $\beta \in B$ des fibrations f_β: $f^{-1}(Y_\beta) \to Y_\beta$ et f'_β: $f'^{-1}(Y'_\beta) \to Y'_\beta$,

(ii) des homéomorphismes (resp. équivalence d'homotopie) g: $X \to X'$, h: $Y \to Y'$ tels que $f' \circ g = h \circ f$,

tels que, pour tout $\beta \in B$, g et h induisent un isomorphisme (resp. une équivalence d'homotopie fibrée) entre les fibrations topologiques f_β et f'_β.

(2.2) *Systèmes fondamentaux à un paramètre de bons voisinages.*

(2.2.1) DÉFINITION. Soient $a > 0$ et I l'intervalle $]0, a]$. On dit que la famille $(U_t)_{t \in I}$ est *un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de* 0 *dans* $\mathbf{R}^{N+1}$ si:

(i) pour tout $t \in I$, U_t est un voisinage ouvert relativement compact sous-analytique de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$;

(ii) le couple $(\overline{U}_t, \overline{U}_t - U_t)$ est homéomorphe à $(\mathbf{B}^{N+1}, \mathbf{S}^N)$;

(iii) le sous-ensemble $\mathfrak{U} = \bigcup_{t \in I}(U_t \times \{t\})$ est un sous-ensemble sous-analytique de $\mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}$;

(iv) le sous-ensemble $\mathfrak{U}_1 = \bigcup_{t \in I}(\partial U_t \times \{t\})$ (où $\partial U_t = \overline{U}_t - U_t$) de $\mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}$ a une stratification de Whitney $(\Sigma_\beta)_{\beta \in B}$ sous-analytique et la restriction π_β à Σ_β de la projection de $\mathfrak{U}_1$ sur I est lisse pour tout $\beta \in B$;

(v) pour tout t, $t' \in I$, $t > t'$, $\overline{U}_t$ contient strictement $\overline{U}_{t'}$, $\partial U_t \cap \partial U_{t'} = \varnothing$ et $(U_t)_{t \in I}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$.

(2.2.2) REMARKQES ET EXEMPLES.

(a) D'après le (iv) de (2.2.1), pour tout $t \in I$, on a l'égalité $\pi_\beta^{-1}(t) = \Sigma_{\beta,t} \times \{t\}$ et $(\Sigma_{\beta,t})_{\beta \in B}$ est une stratification de Whitney sous-analytique de ∂U_t: en fait d'après [**Ch**], il suffit de vérifier la propriété de frontière, qui provient de ce que $\Sigma_{\beta,t}$ est dense dans $\overline{\Sigma}_\beta \cap \pi^{-1}(t)$.

(b) Pour tout $x \in \overline{U}_a - \{0\}$, il existe un $t_x \in I$ et un seul tel que $x \in \partial U_{t_x}$.

En effet une application immédiate du premier théorème d'isotopie de Thom-Mather [**Th1; Ma**, § 8] montre que $\mathfrak{U}_1$ est homéomorphe à $\partial U_a \times I$ en utilisant la condition (iv) de (2.2.1).

En fait le même argument donne un homéomorphisme de $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}_1$ avec $\overline{U}_a \times I$.

La projection sur le premier facteur donne une application continue $\mathfrak{U}_1 \to \overline{U}_a$ qui induit un homéomorphisme φ de $\mathfrak{U}_1 \cup \{0,0\}$ dans $\overline{U}_a$. Comme le bord ∂U_t, pour tout $t \in I$, est homéomorphe à $\mathbf{S}^N$, l'homéomorphisme φ est nécessairement surjectif. En effet si φ n'est pas surjectif, soit $\xi \notin \operatorname{Im}\varphi$. Evidemment $\xi \neq 0$ et dans $\overline{U}_a - \{0, \xi\}$ les images par φ de $\partial U_a \times \{a\}$ et $\partial U_t \times \{t\}$ pour t assez petit ne peuvent pas être homologues dans $\overline{U}_\alpha - \{0, \xi\}$ ce qui contredit le fait qu'ils le sont dans $\mathfrak{U}_1$. Ceci montre donc que pour tout $x \in \overline{U}_a - \{0\}$ il existe $t_x \in I$ tel que $(x, t_x) \in \mathfrak{U}_1$: si $x = 0$, on peut définir $t_0 = 0$. L'application τ: $\overline{U}_a \to \overline{I}$ définie par $\tau(x) = t_x$ est évidemment continue puisqu'elle est la composée de φ^{-1} et de la projection sur $\overline{I}$.

(c) Pour tout $a > 0$, $(B_t)_{t\in I}$, où B_t est la boule ouverte de $\mathbf{R}^{N+1}$ centrée en 0 et de rayon $t \in \,]0, a]$, est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$.

(d) Soit p: $\mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^p$ une projection linéaire et soit B'_u la boule ouverte de $\mathbf{R}^p$ de centre 0 et de rayon u. Soit r: $]0, a] \to \mathbf{R}$ une fonction sous-analytique strictement croissante telle que $r(t)$ soit majoré par $t/2$, pour tout $t \in \,]0, a] = I$. La famille $(B_t \cap p^{-1}(B'_{r(t)}))_{t\in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$.

(e) Soient ε_i: $]0, a] \to \mathbf{R}$ $(i = 0, \ldots, N)$ une famille finie de fonctions positives strictement croissantes sous-analytiques telles que $\lim_{t\to 0} \varepsilon_i(t) = 0$, pour tout $i = 0, \ldots, N$. La famille $(\prod_{i=0}^N (]-\varepsilon_i(t), +\varepsilon_i(t)[))_{t\in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$.

(2.2.3) Définition. Soient $(X, 0)$ un germe d'espace analytique complexe réduit et X un représentant de ce germe qui est fermé dans un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ et pour lequel on a une stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ analytique complexe telle que $0 \in \overline{X}_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$. Soit $(U_t)_{t\in I}$ un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ contenus dans U et dont $(Z_\beta)_{\beta\in B}$ est la stratification de Whitney sous-analytique de

$$\mathfrak{U}_1 = \bigcup_{t\in I} (\partial U_t \times \{t\}).$$

On dit que $(U_t)_{t\in I}$ est *un système fondamental à un paramètre de bons voisinages relativement à la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ si:

(i) pour tout $\alpha \in A$ et tout $\beta \in B$, la strate $X_\alpha \times I$ de $X \times I$ coupe Z_β transversalement dans $\mathbf{C}^{N+1} \times I$;

(ii) la restriction à l'intersection de $X_\alpha \times I$ et de Z_β de la projection sur I est lisse;

(iii) les composantes connexes $(S_\gamma)_{\gamma\in C}$ des intersections $(X_\alpha \times I) \cap Z_\beta$ qui sont non vides forment une stratification de Whitney sous-analytique de $(X \times I) \cap \mathfrak{U}_1$.

(2.2.4) Remarque. D'après **[Ch]**, la condition (i) n'assure pas que l'ensemble des composantes connexes des intersections $(X_\alpha \times I) \cap Z_\beta$ qui sont non vides forme une stratification de $(X \times I) \times \mathcal{U}_1$ qui satisfait la propriété de frontière (1.2.3).

Il est donc raisonnable de demander dans (iii) cette propriété.

(2.2.5) LEMME. *Soient X et sa stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ analytique complexe comme dans* (2.2.3). *On suppose en outre que l'on a une famille finie $Y_1,\dots,Y_k$ de sous-espaces analytiques complexes fermés de X qui contiennent* 0 *et qui sont unions de strates. Si $(U_t)_{t\in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages relativement à la stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, alors $(U_t \cap X)_{t\in I}$ est un système de bons voisinages de* 0 *dans $\mathbf{C}^{N+1}$ au sens de Prill* (*cf.* **[P]**) *relativement à $Y_1,\dots,Y_k$.*

PREUVE. Nous allons montrer, pour tout $t,\ t' \in I,\ t \geq t'$, que $\overline{U}_{t'} \cap X$ est un rétracte par déformation de $\overline{U}_t \cap X$ par des rétractions qui préservent les Y_j $(1 \leq j \leq k)$, ce qui montrera que $\overline{U}_{t'} \cap Y_j$ $(1 \leq j \leq k)$ et $\overline{U}_{t'} \cap (X - Y_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ sont aussi des rétractes par déformation de $\overline{U}_t \cap Y_j$ $(1 \leq j \leq k)$ et $\overline{U}_t \cap (X - Y_j)$ $(1 \leq j \leq k)$ respectivement.

Notons $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}_1$, où $\mathcal{U} = \bigcup_{t\in I}(U_t \times \{t\})$, $\mathcal{U}_1 = \bigcup_{t\in I}((\overline{U}_t - U_t) \times \{t\})$. Les hypothèses sur la famille $(U_t)_{t\in I}$ donnent une stratification de Whitney sous-analytique de $\overline{\mathcal{U}}$:

$$\overline{\mathcal{U}} = \bigcup_{\beta\in B} \Sigma_\beta \cup \mathcal{U}.$$

Nous avons aussi la stratification de Whitney triviale de $X \times I$:

$$X \times I = \bigcup_{\alpha\in A} (X_\alpha \times I).$$

Par hypothèse les composantes connexes $(S_\gamma)_{\gamma\in C}$ des intersections $(X_\alpha \times I) \cap Z_\beta$ qui sont non vides forment une stratification de Whitney sous-analytique de $(X \times I) \cap \mathcal{U}_1 = \mathcal{X}_1$. On notera $\mathcal{X} = (X \times I) \cap \overline{\mathcal{U}}$.

La restriction π à $\mathcal{X}_1$ de la projection sur I est propre et l'hypothèse faite sur le système $(U_t)_{t\in I}$ dit que la restriction π_γ de π à S_γ, pour tout $\gamma \in C$, est lisse sur I.

Le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather [**Th1–4**; **Ma2**, §8] nous donne un champ de vecteurs v continu et intégrable sur $\mathcal{X}_1 \cap \pi^{-1}([t', t])$, qui est tangent aux strates S_γ et dont la projection sur $[t', t]$ est le champ de vecteurs unité. A l'aide de ce champ de vecteurs v nous allons construire dans $\mathcal{X} \cap \pi^{-1}(]t', t])$ un champ de vecteurs qui va réaliser la déformation par rétraction cherchée.

Tout d'abord dans $\mathcal{X} \cap (\overline{U}_{t'} \times]t', t[)$ nous considérons le champ de vecteurs qui relève trivialement le champ de vecteurs unité de $]t', t]$.

Soit (x, t_1) un point de $\mathcal{X} \cap \pi^{-1}(]t', t]) - \overline{U}_{t'} \times]t', t]$. Le champ de vecteurs V est défini par

$$V_{(x,t_1)} = (V_x, V_{t_1})$$

où

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{(t_x - t')v_x}{(t_1 - t')} & \text{où } (v_x, 1) \text{ est la valeur de } v \text{ en } (x, t_x). \\ V_{t_1} = 1, & \end{cases}$$

Ce champ est bien continu et intégrable, puisque v l'est et que t_x est continu.

La projection de V sur $]t', t]$ est donc le champ de vecteurs unité. Sa restriction a $\mathcal{X}_1 \cap \pi^{-1}(]t', t])$ coincide avec v, tandis que sa restriction à

$$(\partial U_{t'} \times]t', t]) \cap (X \times I)$$

est le relèvement trivial du champ de vecteurs unités de $]t', t]$.

L'intégration de la projection du champ de vecteurs sur $\overline{U}_t$ donne pour tout $t_1 \in]t', t]$ un homéomorphisme ρ_{t,t_1} de $\overline{U}_t$ sur $\overline{U}_{t_1}$ dont la restriction à $\overline{U}_{t'}$ induit l'identité de $\overline{U}_{t'}$. L'application

$$r_{t,t'}\colon \overline{U}_t \to \overline{U}_{t'}$$

définie par $r_{t,t'}(x, t) = \lim_{t_1 \to t'} \rho_{t,t_1}(x, t)$ est la rétraction cherchée.

(2.2.6) EXEMPLE. Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique complexe. Soit X un représentant de $(X, 0)$ fermé dans le voisinage ouvert U de 0 de $\mathbf{C}^{N+1}$. Pour toute stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ analytique complexe, il existe ε_0 tel que $(B_\varepsilon)_{\varepsilon \in I}$, avec $I =]0, \varepsilon_0]$, soit un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ (cf. **[Lê1]**).

(2.2.7) REMARQUE. Nous pouvons caractériser un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$ de la façon suivante:

(2.2.7.1) PROPOSITION. *Soit $(U_t)_{t \in I}$ un système fondamental de voisinages sous-analytiques de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$ tel que, pour tout $t \in I$, le couple $(\overline{U}_t, \overline{U}_t - U_t)$ soit homéomorphe à $(\mathbf{B}^{N+1}, \mathbf{S}^N)$. Le système $(U_t)_{t \in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{R}^{N+1}$ si et seulement s'il existe une stratification de Whitney sous-analytique $(\Sigma'_\beta)_{\beta \in B}$ d'un voisinage U de $\overline{U}_a$ telle que $0 \in \overline{\Sigma}'_\beta$ et une fonction sous-analytique propre $\tau\colon U \to \mathbf{R}_+$ telle que $\tau^{-1}(0) = 0$, la restriction de τ à Σ'_β soit de rang un sauf éventuellement en 0 et $U_t = \{x \in \mathbf{R}^{N+1}, \tau(x) < t\}$.*

Nous laissons les détails de la preuve au lecteur, mais nous faisons remarquer que la fonction τ construite dans (2.2.2)(b) est sous-analytique. Par ailleurs $\mathcal{U}_1$ et Σ_β sont les graphes dans $\mathbf{R}^{N+1} \times \mathbf{R}$ de la restriction de τ à $\overline{U}_a - \{0\}$ et à $\Sigma'_\beta \cap \overline{U}_a - \{0\}$. De plus $\Sigma'_\beta \cap \tau^{-1}(t)$ est le $\Sigma_{\beta,t}$ défini dans (2.2.2)(a).

Il n'est peut-être pas nécessaire de supposer à l'avance que $(\overline{U}_t, \overline{U}_t - U_t)$ soit homéomorphe à $(\mathbf{B}^{N+1}, \mathbf{S}^N)$, mais nous ne savons pas comment nous passer de cette hypothèse.

(2.2.7.2) Ce point de vue permet également de caractériser les systèmes fondamentaux à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à une stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ analytique complexe d'un espace analytique complexe réduit X qui contient 0.

Soit $(U_t)_{t\in I}$ un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$. Reprenons les notations de (2.2.7.1) et appelons $(\Sigma'_\beta)_{\beta\in B}$ la stratification de Whitney sous-analytique du voisinage U de 0 de $\mathbf{C}^{N+1}$ qui lui est associée et $\tau\colon U \to \mathbf{R}_+$ la fonction sous-analytique qui lui correspond.

Soit X un espace analytique complexe fermé de U et $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification de Whitney analytique complexe de X telle que $0 \in \overline{X}_\alpha$. La condition (i) de (2.2.3) est équivalente à la transversalité de X_α et Σ'_β, pour tout $\alpha \in A$ et pour tout $\beta \in B$. La condition (ii) signifie que la restriction de τ aux intersections non vides $X_\alpha \cap \Sigma'_\beta$ est de rang un. Si (i) est vérifié la condition (iii) est équivalente à demander que les composantes connexes $(S'_\gamma)_{\gamma\in C}$ des intersections non vides des $X_\alpha \cap \Sigma'_\beta$ forment une stratification avec la propriété de frontière (d'après [**Ch**]). Comme dans (2.2.2)(a), on peut alors montrer que pour tout $t \in I$, $(S'_\gamma \cap \tau^{-1}(t))_{\gamma\in C} = (S'_{\gamma,t})_{\gamma\in C}$ est une stratification de Whitney de $X \cap \tau^{-1}(t) = X \cap \partial U_t$.

(2.2.8) EXEMPLE. La remarque (2.2.7) permet de donner une classe importante d'exemples de systèmes fondamentaux à un paramètre de bons voisinages.

Soit $p\colon U \to \mathbf{R}_+$ une fonction analytique *réelle* définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ et telle que $p^{-1}(0) = \{0\}$. Le théorème de Bertini-Sard (cf. [**H2**, **V**]) dans le cadre analytique réel nous permet de supposer, quitte à choisir un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$, que 0 est le seul point critique de p dans U. Soit X un sous-espace analytique complexe réduit fermé de U qui contient 0. Quitte à supposer U assez petit, X a une stratification de Whitney analytique complexe $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que $0 \in \overline{X}_\alpha$. Le théorème de Bertini-Sard appliqué à la restriction de p à X_α et le fait que A est un ensemble fini, car une stratification de Whitney est localement finie, impliquent qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout ε, $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$, $\partial U_\varepsilon = \{x \in U,\ p(x) = \varepsilon\}$ est transverse à $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Le système $U_\varepsilon = \{x \in U,\ p(x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, est donc un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ puisque la propriété de frontière exigée implicitement dans le (iii) de (2.2.3) est automatiquement satisfaite dans ce cas où ∂U_ε est non singulière et composé d'une seule strate fermée (cf. [**Ch**]).

L'exemple (2.2.6) correspond donc au cas où p est la fonction "carré de la distance à 0", i.e. $p(x) = \|x\|^2$.

(2.2.9) DÉFINITION. Soit S un ensemble sous-analytique non singulier. On dit que $(U_t)_{t\in I}$, avec $I =]0, a]$, est *un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de* $\{0\} \times S$ dans $\mathbf{R}^{N+1} \times S$ s'il existe une stratification de Whitney $(\Sigma'_\beta)_{\beta\in B}$ sous-analytique d'un voisinage ouvert sous-analytique $U(S)$ de $\{0\} \times S$ dans $\mathbf{R}^{N+1} \times S$ dans laquelle $\{0\} \times S$ est une strate notée Σ'_0 et $\{0\} \times S \subset \overline{\Sigma}'_\beta$, et une fonction $\tau\colon U(S) \to \mathbf{R}_+$ sous-analytique telle que:

(i) $\tau^{-1}(0) = \{0\} \times S$;

(ii) la restriction τ_β de τ à Σ'_β est de rang un, pour tout $\beta \in B$;

(iii) $U_t = \{(x, s) \in U(S) \times S,\ \tau(x, s) < t\}$ et $(\Sigma'_\beta \cap \tau^{-1}(t))_{\beta\in B}$ est une stratification de Whitney sous-analytique de $\partial U_t = \overline{U}_t - U_t$;

(iv) la projection p sur S est de rang maximum sur chaque Σ'_β et pour tout $s \in S$, $(U_t \cap p^{-1}(s))_{t \in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $(0, s)$ dans $\mathbf{R}^{N+1} \times \{s\}$.

(2.2.10) EXEMPLE. Soit p: $V \to \mathbf{R}_+$ une fonction analytique réelle telle que $p^{-1}(0) = \{0\}$. On a une fonction τ: $V \times S \to \mathbf{R}_+$ définie par $\tau(x, s) = p(x)$. En posant $U(S) = V \times S$ et en stratifiant trivialement par $U(S) - \{0\} \times S$ et $\{0\} \times S$, pour $a > 0$ assez petit, le système $(U_t = \{(x, s) \in U(S), \tau(x, s) < t\})_{t \in]0,a]}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $\{0\} \times S$ dans $\mathbf{R}^{N+1} \times S$.

(2.2.11) DÉFINITION. Soit S un espace analytique complexe réduit qui est sous-analytiques. Soit X un sous-espace analytique complexe réduit de $\mathbf{C}^{N+1} \times S$ qui est sous-analytique et qui contient $\{0\} \times S$. On suppose que X a une stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ analytique complexe qui contient la strate $\{0\} \times S$ notée X_0 et pour laquelle $\{0\} \times S \subset \overline{X}_\alpha$ pour $\alpha \in A$. On dit qu'un système fondamental à un paramètre de bons voisinages $(U_t)_{t \in I}$ de $\{0\} \times S$ dans $\mathbf{C}^{N+1} \times S$ est *un système de bons voisinages relativement à la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ si:

(i) les composantes connexes $(S'_\gamma)_{\gamma \in C}$ des intersections non vides de X_α et Z'_β pour $\alpha \in A$ et $\beta \in B$ forment une stratification de Whitney;

(ii) la restriction aux intersections non vides des X_α et Z'_β de la projection p sur S est de rang maximum;

(iii) le système $(U_t \cap p^{-1}(s))_{t \in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $(0, s)$ dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha \cap p^{-1}(s))_{\alpha \in A}$ pour tout $s \in S$.

(2.3) *Morphismes de Thom locaux et cycles évanescents*. En (2.1.2) nous avons vu qu'un morphisme propre est descriptible. Dans le cas d'un germe de morphisme analytique complexe f: $(X, 0) \to (Y, 0)$, en général il n'existe pas de représentants f: $X \to Y$ avec X et Y assez petits pour que f induise un morphisme descriptible. Comme R. Thom le remarque dans [**Th1**], c'est le cas quand $Z \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}^2$ est l'éclatement de 0 dans $\mathbf{C}^2$ et que l'on considère le germe de π: $(Z, x) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ avec $x \in \pi^{-1}(0)$.

Dans le cas où f: $(\mathbf{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$, J. Milnor a remarqué que f induisait un morphisme descriptible localement en choisissant convenablement un représentant de f. Dans [**Lê1**], on trouve que ce résultat s'étend à tout germe de fonction f: $(X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ défini sur un germe d'espace analytique complexe réduit quelconque. La raison invoquée dans [**Lê1**] pour qu'une telle situation apparaisse est que l'on peut stratifier un représentant X de $(X, 0)$ de telle sorte que la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de Y soit analytique complexe et satisfasse simultanément la condition de Whitney et la condition de Thom (cf. (1.4.4)). Nous allons voir dans la suite que ce type de résultat se généralise.

Enonçons dans notre cadre le résultat (Theorem 1.1) de [**Lê1**]:

(2.3.1) THÉORÈME. *Soit* f_0: $(X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *un germe de fonction analytique complexe sur le germe d'espace analytique complexe réduit* $(X, 0)$. *Soit* f: $X \to D$ *un représentant de* f_0 *tel que* X *soit un sous-espace analytique complexe de* $\mathbf{C}^{N+1}$ *et ait* *une stratification de Whitney* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *analytique complexe qui satisfait la condition* a_f *de Thom. Soit* $(U_t)_{t \in I}$ *un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{N+1}$ *relativement à* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. *Alors pour tout* $t \in I$, *il existe* η_t, *tel que, pour tout* η, $0 < \eta \leqslant \eta_t$, f *induise un morphisme descriptible*:

$$\varphi_{t,\eta}\colon X \cap U_t \cap f^{-1}(D_\eta) \to D_\eta$$

où D_η *est le disque ouvert de* $\mathbf{C}$ *de centre* 0 *et de rayon* η. *De plus pour tout* t, $t' \in I$ *et tout* η, η', $0 < \eta \leqslant \eta_t$, $0 < \eta' \leqslant \eta_{t'}$, *il existe une équivalence d'homotopie descriptible de* $\varphi_{t,\eta}$ *sur* $\varphi_{t',\eta'}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle de [**Lê1**].

Le point crucial est qu'il existe un représentant X de $(X, 0)$ qui a une stratification de Whitney $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ analytique complexe qui satisfait la condition a_f de Thom et ceci est assuré par un résultat de H. Hironaka [**H3**, §5].

Quitte à choisir un représentant X de $(X, 0)$ plus petit, on peut supposer que $0 \in \overline{X}_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

On note comme précédemment $\mathfrak{U} = \bigcup_{t \in I}(U_t \times \{t\})$, $\mathfrak{U}_1 = \bigcup_{t \in I}(\partial U_t \times \{t\})$, $\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}_1$, $(\Sigma_\beta)_{\beta \in B}$ la stratification de Whitney de $\mathfrak{U}$, $(\Sigma'_\beta)_{\beta \in B}$ la stratification d'un voisinage de $\overline{U}_a$ associée (cf. (2.2.7.1)), etc.

D'après (2.2.2)(a), on a une stratification de Whitney $(\Sigma_{\beta,t})_{\beta \in B}$ sous-analytique de $\partial U_t = \overline{U}_t - U_t$: en fait $\Sigma_{\beta,t} = \Sigma'_\beta \cap \tau^{-1}(t)$ (cf. (2.2.7.1)).

D'après l'hypothèse faite sur le système $(U_t)_{t \in I}$, pour tout $\beta \in B$ et tout $\alpha \in A$, Σ'_β coupe X_α transversalement, les composantes connexes $(S'_\gamma)_{\gamma \in C}$ des intersections non vides $X_\alpha \cap \Sigma'_\beta$ forment une stratification de Whitney sous-analytique de X, et pour tout $t \in I$, $(S'_{\gamma,t})_{\gamma \in C}$, avec $S'_{\gamma,t} = S'_\gamma \cap \tau^{-1}(t)$, est une stratification de Whitney sous-analytique de $X \cap \partial U_t$.

D'après le théorème de Bertini-Sard, il existe $\bar{\eta}$ tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \bar{\eta}$, la restriction de f à X_α, pour tout $\alpha \in A$, n'a aucune valeur critique dans $\overline{D}_\eta - \{0\}$.

Soit $t \in I$. Supposons que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x_\eta \neq 0$ tel que:

(i) $|f(x_\eta)| < \eta$;

(ii) $x_\eta \in X \cap \partial U_t$ et X_{α_η} et $\Sigma_{\beta_\eta, t}$ contiennent x_η;

(iii) $f^{-1}(f(x_\eta)) \cap X_{\alpha_\eta}$ ne coupe pas $\Sigma_{\beta_\eta,t}$ transversalement dans $\mathbf{C}^{N+1}$.

On peut alors trouver une suite de points $x_n \in X \cap \partial U_t$ telle que:

(i) $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in f^{-1}(0) \cap X \cap \partial U_t$ et $x \in X_\alpha \cap \Sigma_{\beta,t}$;

(ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in X_{\alpha'} \cap \Sigma_{\beta',t}$;

(iii) $T_{x_n}(X_{\alpha'} \cap f^{-1}(f(x_n)))$ et $T_{x_n}(\Sigma_{\beta',t})$ ne se coupent pas transversalement dans $\mathbf{C}^{N+1}$;

(iv) $\lim_{n \to \infty} T_{x_n}(X_{\alpha'} \cap f^{-1}(f(x_n))) = T$, $\lim_{n \to \infty} T_{x_n}(\Sigma_{\beta',t}) = T_1$.

Or $T \supset T_x\,(X_\alpha \cap f^{-1}(f(x)))$ d'après la condition a_f de Thom satisfaite par $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $T_1 \supset T_x\,(\Sigma_{\beta,t})$ car $(\Sigma_{\beta,t})_{\beta \in B}$ est une stratification de Whitney sous-analytique de ∂U_t.

L'hypothèse faite sur le système $(U_t)_{t\in I}$ implique la transversalité de $T_x(\Sigma_{\beta,t})$ et de $T_x(X_\alpha \cap f^{-1}(f(x)))$ ce qui contredit le (iii) ci-dessus. Par conséquent il existe $\eta_t > 0$ tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_t$, la restriction de f aux strates $S'_{\gamma,t}$ soit de rang maximum.

Ainsi, si l'on a choisi $\eta_t \leqslant \bar{\eta}$, on est assuré que la restriction de f à X_α n'a pas de valeurs critiques dans $\bar{D}_{\eta_t} - \{0\}$.

Le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather [**Th1**, **Ma2**] implique alors que f induit une fibration topologique de $X \cap \bar{U}_t \cap f^{-1}(D_{\eta_t} - \{0\})$ sur $D_{\eta_t} - \{0\}$. Ceci montre que $\varphi_{t,\eta}$ est un morphisme descriptible pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_t$. Bien évidemment pour tout η, η', $0 < \eta' \leqslant \eta \leqslant \eta_t$, on a un homéomorphisme descriptible de $\varphi_{t,\eta}$ sur $\varphi_{t,\eta'}$.

Soient t, $t' \in I$. Pour obtenir la dernière assertion de (2.3.1) il suffit de montrer que, pour η assez petit et non nul, les fibres $f^{-1}(\xi) \cap U_t$ et $f^{-1}(\xi) \cap U_{t'}$ sont homéomorphes pour $0 < |\xi| < \eta$ (cf. [**Do**]).

Pour cela on procède de façon similaire à [**Lê1**, Theorem 1.1]. Nous venons de voir que la restriction de f aux intersections non vides $S'_{\gamma,t} \cap f^{-1}(\bar{D}_{\eta_t} - \{0\})$ est de rang deux. Montrons que ceci reste vrai pour tout t_1 assez proche de t. Sinon comme ci-dessus on construit une suite de points (x_n, t_n) de $X \times I$ tels que:

(i) $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \cap \partial U_t$ et $x \in X_\alpha \cap \Sigma'_\beta$;

(ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in X_{\alpha'} \cap \Sigma_{\beta',t_n}$;

(iii) $T_{x_n}(X_{\alpha'} \cap f^{-1}(f(x_n)))$ et $T_{x_n}(\Sigma_{\beta',t_n})$ ne se coupent pas transversalement dans $\mathbf{C}^{N+1}$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} T_{x_n}(X_{\alpha'} \cap f^{-1}(f(x_n))) = T$, $\lim_{n\to\infty} T_{x_n}(\Sigma_{\beta',t_n}) = T_1$.

Or $T \supset T_x(X_\alpha \cap f^{-1}(f(x)))$ puisque $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ satisfait la condition a_f de Thom et $T_1 \supset T_x(\Sigma_{\beta,t})$ car $(\Sigma_\beta)_{\beta\in B}$ est une stratification de Whitney sous-analytique de $\mathfrak{U}$ et ceci contredit la transversalité de $T_x(\Sigma_{\beta,t})$ et $T_x(X_\alpha \cap f^{-1}(f(x)))$ dans $\mathbf{C}^{N+1}$.

Un argument de compacité montre alors qu'il existe $\tilde{\eta}$ tel que, pour tout $t_1 \in [t', t]$, la restriction de f aux intersections non vides $S'_{\gamma,t_1} \cap f^{-1}(D_{\tilde{\eta}} - \{0\})$ est de rang deux.

Soit ξ, $0 < |\xi| < \tilde{\eta}$. Les composantes connexes des intersections des S'_γ avec $f^{-1}(\xi)$ forment une stratification de Whitney sous-analytique $(S''_\delta)_{\delta\in D}$ de $f^{-1}(\xi)$.

En appliquant à nouveau le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather [**Th1**, **Ma2**] on peut construire un champs de vecteurs v différentiable sur les intersections non vides $f^{-1}(\xi) \cap S'_\gamma \cap (\bar{U}_t - U_{t'})$ qui est continu sur $f^{-1}(\xi) \cap (\bar{U}_t - U_{t'})$, intégrable et tel que en tout point $x \in f^{-1}(\xi) \cap S'_\gamma \cap (\bar{U}_t - U_{t'})$ on ait $(d\tau_\gamma)_x(v_x) < 0$. L'intégration de ce champs de vecteurs donne l'homéomorphisme cherché. (En fait en raffinant un peu cette démonstration on obtiendrait un homéomorphisme descriptible de $\varphi_{t,\eta}$ sur $\varphi_{t',\eta'}$, mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat dans cet article.)

(2.3.2) COROLLAIRE. *Soit* f_0: $(X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ *un germe de fonction analytique complexe sur le germe d'espace analytique complexe réduit* $(X, 0)$. *Soit* f: $X \to D$ *un représentant de* f_0 *tel que* X *soit un sous-espace analytique complexe de* $\mathbf{C}^{N+1}$ *et ait une stratification de Whitney* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *analytique complexe qui satisfait la condition*

a_f de Thom. Soient $(U_t)_{t\in I}$ et $(V_t)_{t\in I}$ deux systèmes fondamentaux à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$. Alors on a une équivalence d'homotopie descriptible entre les morphismes $\varphi_{t,\eta}$ et $\psi_{t,\eta}$ qui leur sont associés par le Théorème (2.3.1), *pour tout $t \in I$ et quand $0 < \eta \ll t$.*

PREUVE. Soient t_1, t_2, t_3, t_4 tels que

$$U_{t_1} \supset V_{t_2} \supset U_{t_3} \supset V_{t_4}.$$

En choisissant $\xi \neq 0$ assez petit, on a

$$\varphi^{-1}_{t_1,\eta}(\xi) \supset \psi^{-1}_{t_2,\eta}(\xi) \supset \varphi^{-1}_{t_3,\eta}(\xi) \supset \psi^{-1}_{t_4,\eta}(\xi)$$

et la dernière assertion de (2.3.1) implique que ces inclusions sont des équivalences d'homotopie ce qui donne le résultat cherché d'après [**Do**].

(2.3.3) REMARQUE. La fonction $t \mapsto \eta_t$ du Théorème peut-être choisie sous-analytique. L'ensemble $C = \{(t, \eta)$ tels que $t \in I$ et $0 < \eta \leqslant \eta_t\}$ est alors sous-analytique de dimension deux et pour tout $(t, \eta) \in C$ la classe d'équivalence d'homotopie descriptible du morphisme descriptible associé à f_0: $(X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ et au système $(U_t)_{t\in I}$ est en fait un invariant analytique (et en fait topologique) du germe f_0.

Nous avons vu que le point crucial de l'existence de morphismes descriptibles associés localement à un germe f_0: $(X, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ provient de la possibilité de trouver une stratification de Whitney *analytique complexe* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'un représentant X de $(X, 0)$ qui satisfait la condition a_f de Thom. Cette possibilité est en fait rare, mais dans cet article, nous allons nous restreindre à la situation des projections linéaires assez générales:

(2.3.4) LEMME. *Soit $(X, 0)$ un germe d'espace analytique complexe réduit. Soit $X \subset \mathbf{C}^{N+1}$ un plongement d'un représentant de ce germe dans $\mathbf{C}^{N+1}$. On supposera que X est fermé dans un voisinage ouvert U de 0 et que $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de Whitney analytique complexe de X telle que $0 \in \overline{X_\alpha}$. Il existe un ouvert dense $\Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$ de l'espace des projections linéaires de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^i$ tel que, pour tout $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$ il existe un voisinage ouvert U_p de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ tel que la stratification de Whitney analytique complexe induite par $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans U_p satisfait la condition a_p de Thom en tout point de $(p^{-1}(0) \cap X - \{0\}) \cap U_p$.*

PREUVE. Comme $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une partition localement finie et que $0 \in \overline{X_\alpha}$, l'ensemble A est fini. D'après [**Lê-Te**, (4.1.8)], pour tout $\alpha \in A$, il existe un ouvert de Zariski dense $\Omega_{i,\alpha}$ de l'espace des projections $\mathbf{C}^{N+1} \to \mathbf{C}^i$ tel que, pour tout $p \in \Omega_{i,\alpha}$, il existe un voisinage ouvert $U_{p,\alpha}$ de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ tel que le lieu critique $C(p_\alpha)$ de $p|_{X_\alpha \cap U_{p,\alpha}}$ soit vide ou de dimension $i-1$, que $\overline{C(p_\alpha)}$ soit la variété polaire locale de $\overline{X_\alpha}$ en 0 et que la restriction de p à $\overline{C(p_\alpha)}$ soit finie.

Notons $\Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A}) = \bigcap_{\alpha\in A}\Omega_{i,\alpha}$ et avec $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$, $U_p = \bigcap_{\alpha\in A} U_{p,\alpha}$. Choisissons donc $p \in \Omega_{N+1,i}$ et $x \in (p^{-1}(0) \cap X - \{0\}) \cap U_p$. Soit $x \in X_\alpha$. Comme la restriction de p à $\overline{C(p_\alpha)}$ est finie et que $x \neq 0$, l'espace tangent $T_x X_\alpha$ est transverse à $T_x(p^{-1}(0))$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de points de X qui tend vers x. On peut supposer $x_n \in X_\beta$ et $\lim_{n\to\infty} T_{x_n}(X_\beta) = T$. Comme

$(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de Whitney, on a $T \supset T_x(X_\alpha)$. Comme $\lim_{n\to\infty} T_{x_n}(p^{-1}(p(x_n)))$ est égal à $T_x(p^{-1}(0))$, on obtient aussitôt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_{x_n}\big(p^{-1}(p(x_n)) \cap X_\beta\big) &= \lim_{n\to\infty} T_{x_n}\big(p^{-1}(p(x_n))\big) \cap \lim_{n\to\infty} T_{x_n}\big(X_\beta\big)\\ &= T_x\big(p^{-1}(p(x))\big) \cap T \supset T_x\big(p^{-1}(0)\big) \cap T_x(X_\alpha).\end{aligned}$$

Ce qui démontre notre lemme.

(2.3.5) COROLLAIRE. *Considérons la situation de* (2.3.4). *Soient* $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$ *et* $(U_t)_{t\in I}$ *un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{N+1}$ *relativement à* $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ *contenus dans* U_p (*cf.* (2.3.4)). *Il existe* $\eta_{i,t} > 0$, *tel que pour tout* η, $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$, *le morphisme*

$$\varphi_{t,\eta}\colon U_t \cap p^{-1}\big(B_\eta\big) \cap X \to B_\eta,$$

où B_η *est la boule ouverte de* $\mathbf{C}^i$ *de centre* 0 *et de rayon* η, *soit descriptible et que, pour tout* t, $t' \in I$ *et tout* $\eta > 0$, $0 < \eta \leqslant \inf(\eta_{i,t}, \eta_{i,t'})$, *on ait une équivalence d'homotopie descriptible de* $\varphi_{t,\eta}$ *sur* $\varphi_{t',\eta}$.

PREUVE. Nous procédons de façon analogue à celle de [**Lê6**]. Soit donc $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$. D'après le Lemme (2.3.4), en raisonnant comme dans la démonstration du Théorème (2.3.1), on obtient qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbf{C}^i$ tel que, pour tout $\xi \in V$, la partie non singulière de $p^{-1}(\xi) \cap X_\alpha$ coupe transversalement les strates $\Sigma_{\beta,t}$ de ∂U_t dans $\mathbf{C}^{N+1}$. Soit Δ_α l'image de $\overline{C(p_\alpha)}$ par p. Le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather déjà cité implique immédiatement que p induit une fibration C^∞ localement triviale

$$\varphi^*\colon \overline{U}_t \cap p^{-1}\Big(V - \bigcup_{\alpha\in A} \Delta_\alpha\Big) \cap X \to V - \bigcup_{\alpha\in A} \Delta_\alpha.$$

Pour obtenir que p induit un morphisme descriptible $\varphi\colon \overline{U}_t \cap p^{-1}(V) \cap X \to V$, il faut modifier la stratification $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de la façon suivante: on considère la stratification $(X'_{\alpha'})_{\alpha'\in A'}$ de $p^{-1}(V) \cap X - \bigcup_{\alpha\in A}\overline{C(p_\alpha)}$ induite par $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ (cf. (1.3.5)) et on stratifie $p^{-1}(V) \cap \bigcup_{\alpha\in A}\overline{C(p_\alpha)}$ par $(X''_{\alpha''})_{\alpha''\in A''}$ de telle sorte que $(X'_{\alpha'}, X''_{\alpha''})_{\alpha'\in A', \alpha''\in A''}$ soit une stratification de Whitney analytique complexe et qu'il existe une stratification de Whitney $(Y_\delta)_{\delta\in D}$ analytique complexe de $(\bigcup_{\alpha\in A}\Delta_\alpha) \cap V$ telle que l'image d'une strate $X''_{\alpha''}$ soit une strate $Y_{\delta(\alpha'')}$ et que p induise un morphisme lisse $p_{\alpha''}$ de $X''_{\alpha''}$ sur $Y_{\delta(\alpha'')}$. Ce morphisme $p_{\alpha''}$ est en fait fini, puisque la restriction de p à $\bigcup_{\alpha\in A}\overline{C(p_\alpha)}$ est finie. En appliquant le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather au morphisme induit par p de $\overline{U}_t \cap p^{-1}(Y_\delta) \cap X$ sur Y_δ, on obtient que le morphisme φ ci-dessus est descriptible et en choisissant $\eta_{i,t}$ pour que $\overline{B}_{\eta_{i,t}} \subset V$, on obtient la première conclusion de (2.3.5). Pour prouver la seconde conclusion de (2.3.5), il faut cependant choisir $\eta_{i,t}$ de telle sorte que $\overline{B}_{\eta_{i,t}} \cap Y_\delta \neq \varnothing$ si et seulement si $0 \in \overline{Y}_\delta$ et que ∂B_η soit transverse à Y_δ pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$, ce qui est possible d'après le théorème de Bertini-Sard. On montre alors de la même façon que dans le Théorème (2.3.1) que, pour tout $\delta \in D$, tel que $B_\eta \cap Y_\delta \neq \varnothing$ les fibres $p^{-1}(\xi) \cap \overline{U}_t \cap X$ et $p^{-1}(\xi) \cap \overline{U}_{t'} \cap X$ sont homéomorphes.

Ceci démontre la deuxième assertion de (2.3.5) et achève sa preuve.

(2.3.6) REMARQUE. Dans (2.3.5) on aurait pu formuler l'équivalence d'homotopie descriptible entre $\varphi_{t,\eta}$ et $\varphi_{t',\eta'}$ si $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$ et $0 < \eta' \leqslant \eta_{i,t'}$. Pour cela il suffit de montrer que l'on a un homéomorphisme stratifié de B_η sur $B_{\eta'}$ tel que l'image de $B_\eta \cap Y_\delta$ soit $B_{\eta'} \cap Y_\delta$. Ceci se fait comme dans **[B-V]**, en utilisant encore le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather appliqué à cette stratification $(Y_\delta)_{\delta \in D}$ de $(\bigcup_{\alpha \in A} \Delta_\alpha) \cap V$ et la fonction "carré de la distance à 0" dans $\mathbf{C}^i$.

(2.3.7) REMARQUE. On a obtenu en particulier que, pour tout $t \in I$, pour tout $\xi \in B_\eta - \bigcup_{\alpha \in A} \Delta_\alpha$, $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$, les fibres générales $p^{-1}(\xi) \cap \overline{U}_t \cap X$ des morphismes descriptibles $\varphi_{t,\eta}$ sont homéomorphes.

En particulier, les morphismes $X \to \mathbf{C}^i$ induits par des projections linéaires générales d'un espace $\mathbf{C}^N$ contenant X admettent en $0 \in X$ une théorie locale des cycles évanescents, alors que ce n'est pas le cas pour un morphisme quelconque $X \to \mathbf{C}^i$ dès que $i > 1$.

Par un raisonnement analogue à celui qui nous a donné (2.3.2), on démontre

(2.3.8) COROLLAIRE. *Considérons la situation de* (2.3.4). *Soient* $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$, $(U_t)_{t \in I}$ *et* $(V_t)_{t \in I}$ *de systèmes fondamentaux à un paramètre de bons voisinages de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{N+1}$ *relativement à* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. *Soient* $\varphi_{t,\eta}$ *et* $\psi_{t,\eta}$ *les morphismes descriptibles associés à ces systèmes par* (2.3.5) *avec* $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$ *et* $0 < \eta \leqslant \eta_{i,t}$. *Alors on a une équivalence d'homotopie descriptible de* $\varphi_{t,\eta}$ *sur* $\psi_{t,\eta}$, *et leurs fibres générales sont homéomorphes.*

Nous aurons besoin dans la suite du corollaire pratique (2.3.10) suivant:

Considérons la situation de (2.3.4) et le système fondamental à un paramètre de voisinages $(B_t)_{t \in I}$ des boules de centre 0 et de rayon t de $\mathbf{C}^{N+1}$, avec $I =]0, a]$ et le nombre $a > 0$ assez petit pour que ce système soit un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ (cf. (2.2.6)).

Notons encore $(Y_\delta)_{\delta \in D}$ la stratification de $\bigcup_{\alpha \in A} \Delta_\alpha$ construite dans la preuve de (2.3.5). Pour tout $t \in I$, on peut choisir $a'_t > 0$ tel que $a'_t \leqslant \eta_{i,t}$ et que la fonction $t \mapsto a'_t$ soit sous-analytique strictement croissante et $a'_t \leqslant t/2$ et que $(B'_{t'})_{t' \in I'_t}$, avec $I'_t =]0, a'_t]$, soit un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^i$ relativement à $(Y_\delta)_{\delta \in D}$.

On a vu dans (2.2.2)(d) que le système $(B_t \cap p^{-1}(B'_{a'_t}))_{t \in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$. En choisissant convenablement la fonction $t \mapsto a'_t$ on peut supposer que ce système est aussi un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

On a le lemme suivant avec les notations de (2.3.4)

(2.3.9) LEMME. *Il existe un ouvert de Zariski dense* $\Omega'_{N+1,i} \subset \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ *de l'espace des projections linéaires de* $\mathbf{C}^{N+1}$ *sur* $\mathbf{C}^i$ *et un ouvert dense* $\Omega''_{i,j}$ *de l'espace des projections linéaires de* $\mathbf{C}^i$ *sur* $\mathbf{C}^j$ $(j \leqslant i)$ *tels que pour tout* $p \in \Omega'_i$ *et* $q \in \Omega''_{i,j}$ *on ait* $q \circ p \in \Omega_{N+1,j}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$.

Si l'on choisit $p \in \Omega'_i$ et $q \in \Omega''_{i,j} \cap \Omega_{i,j}((Y_\delta)_{\delta \in D})$ la projection $\pi = q \circ p$ induit des morphismes constructibles:

$$\theta_{t,\eta}\colon \pi^{-1}\big(B''_\eta\big) \cap B_t \cap X \to B''_\eta,$$
$$\tilde{\theta}_{t,\eta}\colon p^{-1}\Big(q^{-1}\big(B''_\eta\big) \cap B'_{a'_t}\Big) \cap B_t \cap X \to B''_\eta$$

dont les fibres générales sont $\pi^{-1}(\xi) \cap B_t \cap X$ et $\pi^{-1}(\xi) \cap B'_{a'_t} \cap B_t$, si ξ est un point assez général de B''_η. Le Corollaire (2.3.8) donne le résultat suivant dont nous aurons besoin

(2.3.10) Corollaire. *Les fibres générales de $\theta_{t,\eta}$ et $\tilde{\theta}_{t,\eta}$ ont le même type d'homotopie.*

3. Caractéristiques d'Euler-Poincaré évanescentes.

(3.1) *Résumé des résultats obtenus.*

(3.1.1) Soit $(X,0)$ un germe d'espace analytique complexe réduit équidimensionnel de dimension d. Soient X un représentant de $(X,0)$ fermé dans un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification de Whitney analytique complexe de X. Soient B_t et $B'_{t'}$ les boules ouvertes de $\mathbf{C}^{N+1}$ et $\mathbf{C}^i$ respectivement $(i \leqslant N+1)$ centrées en 0 et de rayons respectifs t et t'. D'après (2.3.5) et (2.3.7), si $p \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$, pour t assez petit non nul et $0 < t' \ll t$, le type d'homotopie de la fibre générale

$$p^{-1}(\xi) \cap B_t \cap X = F_{N+1,i}(X,0)$$

où $\xi \in B'_{t'}$ est un point assez général, ne dépend pas de t. D'après (2.3.8) ce type d'homotopie est le même en remplaçant B_t par U_t où $(U_t)_{t \in I}$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ relativement à $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

(3.1.2) Bien évidemment $F_{N+1,i}(X,0) = \varnothing$ si $i \geqslant d+1$ et, quel que soit le plongement local de $(X,0)$ dans $(\mathbf{C}^{N+1},0)$, $F_{N+1,d}(X,0)$ est un ensemble fini de $m_0(X)$ points, où $m_0(X)$ est la multiplicité de X en 0. De façon générale dim $F_{N+1,i}(X) = d - i$ si $i \leqslant d$. Le but de ce paragraphe est de montrer que le type d'homotopie de $F_{N+1,i}(X,0)$ ne dépend ni du plongement local de $(X,0)$ dans $(\mathbf{C}^{N+1},0)$, ni du choix de la stratification de Whitney analytique complexe $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X choisie, ni du choix de la projection de p dans $\Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ $(i \leqslant d)$.

Il en résultera que la famille des types d'homotopie de $F_{N+1,0}, \ldots, F_{N+1,d}$ est un invariant analytique du germe $(X,0)$. On appelle la famille de ces types d'homotopie le *type d'homotopie évanescent* de $(X,0)$. En particulier les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(F_{N+1,0}(X,0)), \ldots, \chi(F_{N+1,d}(X,0))$ (comparer à [**D**]) seront des invariants analytiques de $(X,0)$. On appellera ces caractéristiques d'Euler-Poincaré *les caractéristiques d'Euler-Poincaré évanescentes* de $(X,0)$, on notera $\chi_i(X,0)$ pour $\chi(F_{N+1,i}(X,0))$; on remarquera que l'on a : $\chi_d(X,0) = m_0(X)$, et $\chi_0(X,0) = 1$ puisque $F_{N+1,0} = X \cap B_t$ qui est contractile (cf. [**B-V**]).

On montrera aussi que, si $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une stratification de Whitney analytique complexe de X, la famille $(\chi_0(X,x),\dots,\chi_d(X,x))$ est indépendante de $x\in X_\alpha$, pour tout $\alpha\in A$.

Rappelons aussi que dans [**D**] A. Dubson utilise ces caractéristiques d'Euler-Poincaré évanescentes pour calculer le nombre d'Euler de $(X,0)$ (cf. [**MP**]). Nous donnerons dans le paragraphe suivant la relation entre les caractéristiques d'Euler-Poincaré évanescentes associées à une stratification de Whitney analytique complexe $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X et les multiplicités des variétés polaires locales en 0 des $\overline{X}_\alpha$, avec $\alpha\in A$: cette relation redonne grâce aux résultats de [**Lê-Te**, (§5)] une démonstration du résultat de A. Dubson [**D**].

(3.2) *Cas de familles paramétrées*. Nous allons considérer la situation suivante:

(3.2.1) Soient X un sous-espace analytique complexe réduit fermé d'un ouvert U de $\mathbf{C}^{N+1}$, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ une stratification de Whitney analytique complexe de X, $x\in X$ et X_{α_0} la strate qui contient x. On suppose que dans l'ouvert U la strate X_{α_0} est définie par l'idéal engendré par les fonctions analytiques $\zeta_1,\dots,\zeta_{k_0}$ définies sur l'ouvert U où le système $\{\zeta_1,\dots,\zeta_{k_0}\}$ peut s'étendre en un système $\{\zeta_1,\dots,\zeta_{N+1}\}$ de coordonnées de U qui s'annulent en x. On supposera pour simplifier que $x=0$.

Soit S un espace analytique complexe non singulier connexe. On suppose que l'on a une famille analytique complexe paramétrée par S de projections linéaires $p_s\colon \mathbf{C}^{N+1}\to\mathbf{C}^i$, i.e. définie par $P_0\colon \mathbf{C}^{N+1}\times S\to\mathbf{C}^i\times S$, telle que, pour tout $s\in S$, la projection p_s soit dans $\Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha\in A})$ (cf. (2.3.4)), que p_s soit transverse à X_{α_0} en tout point de X_{α_0} et que son noyau soit transverse aux cônes tangents en tout point de X_{α_0} des variétés polaires associées à p_s des adhérences des strates X_α de la stratification considérée de X. On note P la restriction de P_0 à $X\times S$.

Dans la suite on munira $X\times S$ de la stratification de Whitney analytique complexe définie par $(X_\alpha\times S)_{\alpha\in A}$.

D'après Chapitre V, §2 de [**Te1**], la variété polaire locale relative de la restriction P_α de P à $\overline{X}_\alpha\times S$ est la réunion des variétés polaires de $\overline{X}_\alpha\times\{s\}$ associées à p_s, pour tout $\alpha\in A$.

(3.2.2) Pour $\varepsilon>0$, on notera T_ε, l'ensemble des points (z,s) de $\mathbf{C}^{N+1}\times S$ tels que $(\Sigma_{i=1}^{k_0}|\zeta_i(z)|^2)^{1/2}\leqslant\varepsilon$. Le bord de T_ε est noté ∂T_ε.

On a vu dans (2.2.10) que, pour $\varepsilon>0$ assez petit, le système des intérieurs $\mathring{T}_\varepsilon$ est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $X_{\alpha_0}\times S$ dans $\mathbf{C}^{N+1}\times S$ si de plus U et S sont sous-analytiques. A l'aide de (2.2.8) qui assure la condition (iii) de (2.2.11), on obtient que, pour tout ouvert $S'\subset S$ qui est sous-analytique, connexe, relativement compact et tel que $\overline{S'}\subset S$, i.e. $S'\subset\subset S$, le système $(\mathring{T}_\varepsilon\cap(\mathbf{C}^{N+1}\times S'))_{\varepsilon\in I}$, avec $I=]0,\varepsilon_0]$ et $\varepsilon_0>0$ assez petit, est un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $X_{\alpha_0}\times S'$ dans $(\mathbf{C}^{N+1}\times S)$ relativement à la stratification de Whitney analytique complexe $(X_\alpha\times S')_{\alpha\in A}$ de $X\times S'$.

(3.2.3) LEMME. *Si le voisinage ouvert U de x dans $\mathbf{C}^{N+1}$ est assez petit, la stratification $(X_\alpha \times S')_{\alpha \in A}$ de $X \times S'$ satisfait la condition de Thom relativement à la projection P en tout point de $P^{-1}(P(X_{\alpha_0} \times S')) - X_{\alpha_0} \times S'$.*

PREUVE. La preuve de ce lemme est tout à fait analogue à celle de (2.3.4), car les hypothèses faites sur P montrent que, si le voisinage U est assez petit, la restriction de P aux variétés polaires relatives C_α de P_α est un morphisme fini. Nous laissons donc au lecteur le soin de faire précisément cette preuve.

Par ailleurs:

(3.2.4) LEMME. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, ∂T_ε coupe transversalement $X_\alpha \times S'$ dans $\mathbf{C}^{N+1} \times S$ pour tout $\alpha \in A$.*

PREUVE. L'ensemble des points de $X_\alpha \times S$ où $X_\alpha \times S$ n'est pas transverse à ∂T_ε est un sous-ensemble semianalytique A_α de $X_\alpha \times S$. D'autre part pour chaque $s \in S$ le théorème de Bertini-Sard montre que la restriction à $X_\alpha \times \{s\}$ de la fonction $x \mapsto (\sum_{i=1}^{k_0} |\zeta_i(x)|^2)^{1/2}$ n'a que des valeurs critiques isolées à l'intérieur de $T_\varepsilon \cap (\mathbf{C}^{N+1} \times \{s\})$.

Comme $S' \subset\subset S$, $\mathring{T}_\varepsilon \cap (\mathbf{C}^{N+1} \times S')$ ne rencontre qu'un nombre fini de strates $X_\alpha \times S'$ et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_\alpha \cap T_\varepsilon = \varnothing$, pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $\alpha \in A$.

Nous avons alors une version "à paramètre" de (2.3.5)

(3.2.5) THÉORÈME. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(x)$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$, tel que pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$, P induit un morphisme descriptible*

$$\varphi_{\varepsilon,\eta}\colon \mathring{T}_\varepsilon \cap P^{-1}(B'_\eta \times S') \cap (X \times S') \to B'_\eta \times S'.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant le fait énoncé dans (3.2.3) que l'on a la condition de Thom en tout point de $P^{-1}(P(X_{\alpha_0} \times S')) - X_{\alpha_0} \times S'$ et la transversalité dans $\mathbf{C}^{N+1} \times S'$ de $X_\alpha \times S'$ et ∂T_ε pour ε assez petit, on montre, comme dans (2.3.5), en utilisant la compacité de $\bar{S}'$, et le fait que $X_{\alpha_0} \times S'$ n'est adhérent qu'à un nombre fini de $X_\alpha \times S'$, qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe η_ε tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$, $(X_\alpha \times S') \cap P^{-1}(\xi, s')$ coupe ∂T_ε transversalement dans $\mathbf{C}^{N+1} \times S'$, pout tour $\xi \in B'_\eta$ et $s' \in S'$. Le premier théorème d'isotopie de Thom-Mather déjà cité montre alors que P induit une fibration topologique localement triviale φ^* de $T_\varepsilon \cap P^{-1}(B'_\eta \times S' - \Delta) \cap (X \times S')$ sur $B'_\eta \times S' - \Delta$, où $\Delta = \bigcup_{\alpha \in A} P(C_\alpha)$ qui est vide ou une hypersurface de $\mathbf{C}^i \times S'$, puisque la restriction de P à C_α est finie et que $C_\alpha = \varnothing$ ou est de dimension $i - 1$. Afin d'obtenir le morphisme descriptible cherché, il suffit de stratifier convenablement la restriction de P à $\bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ de façon analogue à ce que nous avons fait dans (2.3.5).

(3.2.6) LEMME. *Pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe r_ε, tel que*

$$\left(\mathring{T}_\varepsilon \cap P^{-1}(B'_{r_\varepsilon} \times S')\right)_{0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0(x)}$$

soit un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de $\{x\} \times S'$ dans $\mathbf{C}^{N+1} \times S'$ relativement à $(X_\alpha \times S')_{\alpha \in A}$.

PREUVE. Il suffit de montrer que les "coins" définis par $\partial T_\varepsilon \cap P^{-1}(\partial B'_{r_\varepsilon} \times S')$ et les "côtés" $\mathring{T}_\varepsilon \cap P^{-1}(\partial B'_{r_\varepsilon} \times S')$ sont bien transverses à $X_\alpha \times S'$, pour tout $\alpha \in A$. La transversalité des "coins" est assurée dès que $r_\varepsilon > 0$ est assez petit, car la restriction P_α de P à la variété polaire relative C_α de $\overline{X}_\alpha \times S'$ est finie et que les fibres de P_0 au-dessus de $\{0\} \times S'$ sont transverses à ∂T_ε d'après (3.2.3). La transversalité des "côtés" est assurée par la compacité de $\overline{S'}$ et le fait que, pour tout $s \in S'$, $X_\alpha \times \{S'\}$ coupe transversalement $P^{-1}(\partial B'_r)$ dès que $r > 0$ est assez petit d'après le théorème de Bertini-Sard.

(3.2.7) COROLLAIRE. *Pour tout $s \in S'$, la fibre générale du morphisme descriptible de* (2.3.5) *défini sur le germe $(X \times \{s\}, (x, s))$ par $p_s \times \{s\}$ a le même type d'homotopie.*

PREUVE. En fait toutes les fibres générales du morphisme descriptible $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ sont homéomorphes. Il suffit de constater que $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ induit au-dessus de $\mathbf{C}^i \times \{s\}$ le morphisme descriptible de (2.3.5) défini sur $X \times \{s\}$ par p_s et que la fibre générale de ce morphisme est une fibre générale de $\varphi_{\varepsilon,\eta}$.

(3.2.8) COROLLAIRE. *Si U est assez petit, pour tout $y \in X_{\alpha_0}$, et pour tout $s \in S'$, la fibre générale du morphisme descriptible de* (2.3.5) *défini sur le germe $(X \times \{s\}, (y, s))$ par $p_s \times \{s\}$ a le même type d'homotopie.*

PREUVE. Soient $y \in X_{\alpha_0}$ et $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Soit Γ un sous-ensemble compact et connexe de X_{α_0} qui contient x et y. En chaque point $z \in \Gamma$ on a un morphisme descriptible

$$\varphi_{\varepsilon,\eta}(z)\colon \mathring{T}_\varepsilon \cap P^{-1}\big(B'_\eta(z) \times S'\big) \cap X \times S' \to B'_\eta(z) \times S'$$

où $\varphi_{\varepsilon,\eta}(z)$ est défini par P comme dans (3.2.5) et $B'_\eta(z)$ une boule ouverte de $\mathbf{C}^i$ centrée en $P(z)$ et de rayon η assez petit. On trouve un nombre fini $z_1, \ldots, z_l$ de points de Γ avec $z_1 = x$ et $z_l = y$ tels que les boules $B'_{\eta_i}(z_i)$ correspondantes recouvrent $P(\Gamma)$. On trouve alors que les fibres générales des $\varphi_{\varepsilon,\eta_i}(z_i)$ sont homéomorphes, ce qui, combiné avec le Corollaire (3.2.7), donne (3.2.8).

(3.3) Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les fibres générales des morphismes constructibles considérés dans (2.3.5) ont un type d'homotopie qui est un invariant analytique de $(X, 0)$ et qu'il est constant le long des strates d'une stratification de Whitney analytique complexe. On reprend les notations de (3.2).

(3.3.1) On se ramène immédiatement à la situation suivante

$$X \subset \mathbf{C}^{N+1} \subset \mathbf{C}^{N+M+2}$$

où X est fermé dans l'ouvert U où le système de coordonnées $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{N+1}\}$ s'étend en un système de coordonnées $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_{N+1}, \xi_1, \ldots, \xi_{M+1}\}$ d'un ouvert $U \times V$ de $\mathbf{C}^{N+M+2}$. On plonge $X \times \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^{N+M+2} \times \mathbf{C}$ au moyen des restrictions à X des fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_{N+1}, t\xi_1, \ldots, t\xi_{M+1}, t$ où t est une coordonnée sur $\mathbf{C}$. La stratification donnée par $(X_\alpha \times \mathbf{C})_{\alpha \in A}$ est une stratification de Whitney analytique complexe de $X \times \mathbf{C}$. On peut supposer que $\{x\} \times \mathbf{C}$ est une strate.

Nous allons nous placer dans une situation analogue à celle décrite par (3.2.1): On appelle T_ε l'ensemble des points de $\mathbf{C}^{N+M+2} \times \mathbf{C}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N+1} |\zeta_i(z)|^2 + \sum_{j=1}^{M+1} |t\xi_j(z)|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

On supposera U assez petit pour qu'il existe q: $\mathbf{C}^{N+1} \to \mathbf{C}^r$ une projection telle que q soit transverse à X_{α_0} en tout point de X_{α_0} et que le noyau de q soit transverse aux cônes tangents en tout point de X_{α_0} des variétés polaires associées à q des adhérences strates X_α de la stratification considérée de X. Ceci est assuré si $q \in \Omega_{N+1,i}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ et U assez petit, parce que ces variétés polaires sont équimultiples le long de X_{α_0} d'après [**Te1**, Chapitre V, Théorème 1.2], puisque $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une stratification de Whitney analytique complexe de X.

On note p_0 la composée de q et de la projection $\mathbf{C}^{N+M+2} \to \mathbf{C}^{N+1}$ sur les $N+1$ premiers facteurs.

Soit p_1: $\mathbf{C}^{N+M+2} \to \mathbf{C}^i$ une projection linéaire transverse à X_{α_0} en tout point de X_{α_0} et dont le noyau Ker p_1 est transverse aux cônes tangents en tout point de X_{α_0} des variétés polaires associées à p_1 des adhérences des strates X_α de la stratification $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X.

On notera $p_t = (1-t)p_0 + tp_1$. Soit P_0: $\mathbf{C}^{N+M+2} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}^i \times \mathbf{C}$ l'application définie par $P_0(z, t) = (p_t(z), t)$. On appellera P la restriction de P_0 à $X \times \mathbf{C}$.

Puisque P_0 induit pour $t = 0$ et $t = 1$ des projections transverses p_0 et p_1 à X_{α_0} en tout point de X_{α_0} et dont les noyaux respectifs sont transverses aux cônes tangents en tout point de X_{α_0} des variétés polaires, associées à p_0 et p_1 respectivement, des adhérences $\overline{X}_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$, pour tout t sauf un nombre fini, p_t est transverse à X_{α_0} en tout point de X_{α_0} et son noyau est transverse aux cônes tangents en tout point de X_{α_0} des variétés polaires associées à p_t des espaces $\overline{X}_\alpha$. Soit S' un ouvert relativement compact sous-analytique de $\mathbf{C}$ qui contient 0 et 1 et dont l'adhérence S' ne contient que des points t pour lesquels les projections p_t vérifient les conditions de transversalité ci-dessus.

Nous sommes maintenant dans les conditions décrites dans (3.2.1) et nous pouvons appliquer les résultats de (3.2.7) et (3.2.8) qui nous permettent de conclure que le type d'homotopie des fibres générales des morphismes descriptibles considérés est indépendant des plongements locaux $(X, 0) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ et des coordonnées choisis et reste constant le long d'une strate de Whitney d'une stratification de Whitney analytique complexe.

(3.3.2) *Conclusion*. Soit X un représentant d'un germe $(X, 0)$ d'espace analytique complexe réduit et soit $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ une stratification de Whitney analytique complexe de X. Comme nous l'avons dit dans (3.1.2) le type d'homotopie des fibres $F_{N+1,i}(\overline{X}_\alpha, x)$ définies à l'aide d'un plongement local $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ est indépendant de ce plongement et du point x sur sa strate dans $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. En fait notre démonstration nous a donné un morphisme descriptible $X \cap p^{-1}(B'_\eta) \cap B_\varepsilon \to B'_\eta$ avec p dans un ouvert de Zariski dense Ω_i de l'espace des projections de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^i$ et $1 \gg \varepsilon > 0$, $\varepsilon \gg \eta > 0$. La classe d'équivalence d'homotopie descriptible de ce morphisme descriptible ne dépend ni du plongement, ni de x sur sa strate.

Ainsi ces morphismes descriptibles pour $0 \leqslant i \leqslant d$ (resp. leurs fibres générales) définissent des classes d'équivalence d'homotopie descriptible (resp. type d'homotopie) qui sont des invariants analytiques du germe (X, x), constants sur les strates d'une stratification de Whitney analytique complexe, comme on le voit en choisissant la stratification de Whitney analytique complexe canonique (cf. (1.3.3)).

La famille des types d'homotopie des $F_{N+1,i}(\overline{X}_\alpha, x)$ pour les $\overline{X}_\alpha$ contenant x est appelé le *type d'homotopie évanescent total du germe* (X, x) quand $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la stratification de Whitney analytique complexe canonique.

Soit $x \in X$ avec $x \in X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et soit $X \subset \mathbf{C}^{N+1}$ un plongement local de X en x dans $\mathbf{C}^{N+1}$. On notera $\chi_i(\overline{X}_\beta, X_\alpha)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de $F_{N+1,i}(\overline{X}_\beta, x)$ qui est constante le long de X_α. On pose $\dim X_\alpha = d_\alpha$.

Remarquons que si $i \leqslant d_\alpha$, $F_{N+1,i}(\overline{X}_\beta, x)$ est contractible et que $\chi_i(\overline{X}_\beta, X_\alpha) = 1$. On convient que $\chi_i(\overline{X}_\beta, X_\alpha) = 0$ pour $i > d_\beta$.

On notera $\chi^*(X, x) = (\chi(F_{N+1,0}(X, x)), \ldots, \chi(F_{N+1,d}(X, x)))$.

4. Interprétation topologique des multiplicités polaires.

(4.1) Dans ce paragraphe nous donnons une formule qui permet de calculer les multiplicités en chaque point des variétés polaires des adhérences des strates d'une stratification de Whitney analytique complexe en fonction des caractéristiques d'Euler-Poincaré évanescentes en ce point introduites au paragraphe précédent. Nous prenons les notations de (3.3.2).

(4.1.1) THÉORÈME. *Soit* $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *un espace analytique complexe réduit muni d'une stratification de Whitney analytique complexe* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$. *Soit* $x \in X_{\alpha_0}$. *On a l'égalité*:

$$\begin{aligned}\chi_{d_{\alpha_0}+1}(X, X_{\alpha_0}) &- \chi_{d_{\alpha_0}+2}(X, X_{\alpha_0}) \\ &= \sum_{\alpha \neq \alpha_0} (-1)^{d_\alpha - d_{\alpha_0} - 1} m_x\left(P_{d_\alpha - d_{\alpha_0} - 1}(\overline{X}_\alpha, x)\right)\left(1 - \chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha)\right).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Démontrons d'abord le théorème dans le cas où $X_{\alpha_0} = \{x\}$. Le résultat cherché est en fait local, car si $x \notin \overline{X}_\alpha$, on a $P_k(\overline{X}_\alpha, x) = \varnothing$ et $m_x(P_k(\overline{X}_\alpha, x)) = 0$. On peut donc supposer que X est fermé dans un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{C}^{N+1}$ assez petit tel que $x \in \overline{X}_\alpha$. Nous avons besoin pour notre démonstration d'adapter à notre situation les résultats (2.3.5) et (2.3.10), précisément dans le cas où $i = 2$ et $j = 1$.

(4.1.2) LEMME. *Il existe un ouvert de Zariski dense* Ω *contenu dans* $\Omega_{N+1,2}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ *tel que, pour* $p \in \Omega$:

(i) *il existe* $a > 0$ *tel que* $(B_t)_{t \in I}$, *avec* $I =]0, a]$, *soit un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de* 0 *dans* $\mathbf{C}^{N+1}$ *relativement à* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *contenus dans l'ouvert* U_p *défini dans* (2.3.4);

(ii) *il existe* $(\eta_t)_{t \in I}$ *tel que le morphisme*

$$\varphi_{t,\eta}\colon B_t \cap p^{-1}(B'_\eta) \cap X \to B'_\eta$$

induit par p sur la boule ouverte B'_η *de* $\mathbf{C}^2$ *centrée en* 0 *et de rayon* η, $0 < \eta \leqslant \eta_t$, *soit descriptible*;

(iii) *la courbe polaire* Γ_α *définie par p sur* $\overline{X}_\alpha \cap B_a \cap p^{-1}(B'_{\eta_\alpha})$ *en x est réduite et sa multiplicité en x est la multiplicité d'une courbe polaire générale de* $\overline{X}_\alpha$ *en x*;

(iv) *aucune direction limite en* 0 *de bisécantes à* $\Gamma_\alpha - \{x\}$ *n'est contenue dans* Ker p. *En particulier* Ker p *est transverse à* Γ_α *en x, le morphisme analytique p restreint à* Γ_α *induit un homéomorphisme de* Γ_α *sur son image dans* $\mathbf{C}^2$.

PREUVE. Les conditions (i) et (ii) sont réalisées si $p \in \Omega_{N+1,2}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ d'après le Corollaire (2.3.5).

Pour obtenir la propriété (iii) on procède comme dans [**Lê-Te**, (2.2.1.2)]. Considérons la modification de Nash $\nu_\alpha\colon N(\overline{X}_\alpha) \to \overline{X}_\alpha$ de $\overline{X}_\alpha$ munie du plongement naturel $N(\overline{X}_\alpha) \subset U \times G_\alpha$, où G_α est la Grassmannienne des plans de dimension $d_\alpha = \dim X_\alpha$ dans $\mathbf{C}^{N+1}$. On choisit une stratification de Whitney analytique complexe $(Z_{\alpha\beta})_{\beta \in B_\alpha}$ de $N(\overline{X}_\alpha)$ telle que $\nu_\alpha^{-1}(x)$ soit une réunion de strates. Soit Ω_α l'ouvert de Zariski dense de l'espace des projections linéaires de $\mathbf{C}^N$ sur $\mathbf{C}^2$ formé des projections p telles que la variété de Schubert $c_{d_\alpha - 1}(\operatorname{Ker} p)$ soit transverse dans G_α à la stratification de $\nu^{-1}(x)$ dans le sens de [**Lê-Te**]. D'après l'argument de [**Lê-Te**] l'espace $U \times c_{d_\alpha - 1}(\operatorname{Ker} p)$ coupe transversalement dans $U \times G_\alpha$ l'espace $N(\overline{X}_\alpha) - \nu^{-1}(\operatorname{Sing} \overline{X}_\alpha)$ selon un sous-ensemble vide ou non singulier et de dimension un si U est assez petit. Dans ce dernier cas l'adhérence de ce sous-ensemble est égale à $N(\overline{X}_\alpha) \cap (U \times c_{d_\alpha - 1}(\operatorname{Ker} p))$. Quitte à se restreindre à un ouvert $\Omega'_\alpha \subset \Omega_\alpha$ on peut supposer que la multiplicité en x de Γ_α est celle d'une courbe polaire générale de $\overline{X}_\alpha$ en x et que l'on a (iv) d'après [**Te1**, Chapitre V, lemme-clé].

On choisit alors $\Omega = \bigcap_{\alpha \in A} \Omega'_\alpha \cap \Omega_{N+1,2}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ qui est un ouvert de Zariski dense de $\Omega_{N+1,2}((X_\alpha)_{\alpha \in A})$ car l'ensemble A est fini.

Si $p \in \Omega$ et $t \in \,]0, a]$ comme dans (4.1.2), la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre générale du morphisme descriptible $\varphi_{t,\eta}$ (avec $0 < \eta \leqslant \eta_t$) de (4.1.2)(ii) est égale à $\chi_2(X, \{x\})$ avec les notations de (3.3.2). Pour calculer la différence $\chi_1(X, \{x\}) - \chi_2(X, \{x\})$ cherchée dans (3.1) avec $\{x\} = X_{\alpha_0}$, on a besoin du résultat énoncé dans 2.3.9 qui donne dans ce cas où $i = 2$ et $j = 1$:

(4.1.3) LEMME. *Il existe un ouvert de Zariski dense* Ω' *de l'espace des projections linéaires de* $\mathbf{C}^{N+1}$ *sur* $\mathbf{C}^2$ *contenu dans l'ouvert* Ω *de* (4.1.2) *et un ouvert de Zariski dense* Ω'' *de l'espace des projections linéaires de* $\mathbf{C}^2$ *sur* $\mathbf{C}$ *tels que, pour* $p \in \Omega'$ *et* $q \in \Omega''$:

(i) *il existe* $a > 0$, *tel que, pour tout* $t \in \,]0, a]$, *il existe* η_t, *tel que, avec* $0 < \eta \leqslant \eta_t$, *p induit un morphisme descriptible*

$$\varphi_{t,\eta}\colon p^{-1}(B'_\eta) \cap B_t \cap X \to B'_\eta;$$

(ii) *soit* $\Delta = \bigcup_{\alpha \in A} p(\Gamma_\alpha)$, *où* Γ_α, *défini dans* (4.1.2)(iii), *est la courbe polaire de p sur* $\overline{X}_\alpha$, *alors* Ker q *est transverse à* Δ *en* 0 *et il existe* η'_t, $0 < \eta'_t \ll \eta_t$, *tel que, pour tout* $u \in \mathbf{C}$, $0 < |u| \leq \eta'_t$, $\varphi_{t,\eta}$ *induit un morphisme descriptible*

$$\tilde{\varphi}_{t,\eta}\colon p^{-1}\big(B'_\eta \cap q^{-1}(u)\big) \cap B_t \cap X \to B'_\eta \cap q^{-1}(u).$$

Preuve. Il suffit de bien interpréter (2.3.9), en utilisant (2.3.4).

(4.1.4) Remarque. D'après (2.3.10) et (3.3.2), $p^{-1}(B'_\eta \cap q^{-1}(u)) \cap B_t \cap X$ a sa caractéristique d'Euler-Poincaré égale à $\chi_1(X, \{x\})$.

(4.2) Fin de la démonstration de (4.1.1) quand $X_{\alpha_0} = \{x\}$.

En utilisant (4.1.3), comme les fibres générales de $\varphi_{t,\eta}$ et $\tilde{\varphi}_{t,\eta}$ sont les mêmes, nous allons utiliser la Proposition (2.1.3) pour évaluer $\chi_1(X, \{x\})$.

(4.2.1) Les fibres de $\tilde{\varphi}_{t,\eta}$ qui ne sont pas générales sont précisément les fibres au-dessus des points de $B'_\eta \cap q^{-1}(u) \cap \Delta$. Posons $\Delta_\alpha = p(\Gamma_\alpha)$ et notons $\Delta_\alpha = \bigcup_{i \in A_\alpha} \Delta_{\alpha,i}$ la décomposition de Δ_α en composantes irréductibles. Les fibres de $\tilde{\varphi}_{t,\eta}$ sur les points de $B'_\eta \cap q^{-1}(u) \cap \Delta_{\alpha,i}$ sont homéomorphes, car $q \in \Omega''$ (cf. (2.3.9)) et les sous-espaces $\Delta_{\alpha,i} - \{0\}$ sont parmi les strates Y_δ introduites dans (2.3.5) car nous sommes dans le cas où $i = 2$. Par ailleurs le cardinal de l'ensemble fini $B'_\eta \cap q^{-1}(u) \cap \Delta_{\alpha,i}$ est la multiplicité de $\Delta_{\alpha,i}$ en 0 qui n'est autre que celle de la composante $\Gamma_{\alpha,i}$ de Γ_α au-dessus de $\Delta_{\alpha,i}$ d'après (4.1.2)(iv). Donc la Proposition (2.1.3) donne dans ce cas

(4.2.1.1)
$$\chi_1(X, \{x\}) = \chi_2(X, \{x\})\Big(1 - \sum_{\alpha \in A} m_x(\Gamma_\alpha)\Big) + \sum_{\alpha \in A} \sum_{i \in A_\alpha} \chi_{\alpha,i} \cdot m_x(\Gamma_{\alpha,i})$$

où $\chi_{\alpha,i}$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre "singulière" au-dessus d'un point de $B'_\eta \cap q^{-1}(u) \cap \Delta_{\alpha,i}$. En effet on a d'après (2.3.10)

$$\chi_1(X, \{x\}) = \chi\big(p^{-1}\big(B'_\eta \cap q^{-1}(u)\big) \cap B_t \cap X\big),$$
$$\chi_2(X, \{x\}) = \chi\ \ \big(\text{fibre générale de } \tilde{\varphi}_{t,\eta}\big),$$

et $1 - \sum_{\alpha \in A} m_x(\Gamma_\alpha) = \chi(B'_\eta \cap q^{-1}(u) - \Delta)$. Le calcul de $\chi_{\alpha,i}$ est assuré par

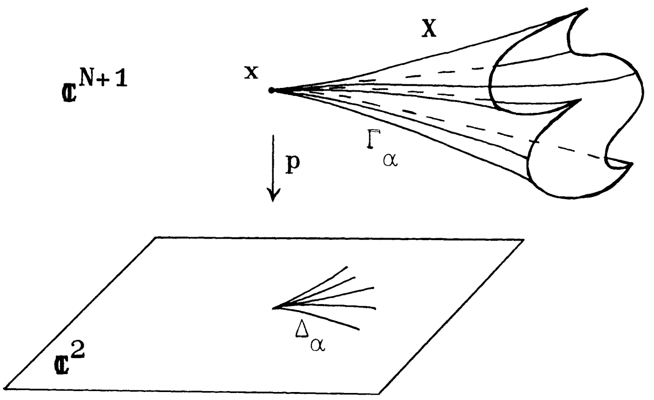
(4.2.2) Lemme. *On a l'égalité*:
(4.2.2.1)

$$\chi_{\alpha,i} = \chi_2(X, \{x\}) + (-1)^{d_\alpha}\chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha) + (-1)^{d_\alpha - 1}.$$

Preuve. Soit $\xi_{\alpha,i}$ un point de $D \cap \Delta_{\alpha,i}$ où $D = B'_\eta \cap q^{-1}(u)$. On note $x_{\alpha,i}$ l'unique point de $\Gamma_{\alpha,i}$ au-dessus de $\xi_{\alpha,i}$ (d'après (4.1.2)(iv)). Soit $B_{\alpha,i}$ une boule de $\mathbf{C}^{N+1}$ centrée en $x_{\alpha,i}$ et de rayon assez petit. Si ξ est dans D assez proche de $\xi_{\alpha,i}$, $\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi) - B_{\alpha,i}$ et $\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi_{\alpha,i}) - B_{\alpha,i}$ sont homéomorphes, par application du premier théorème d'isotopie de Thom et Mather puisque les points où $\tilde{\varphi}_{t,\eta}$ n'est pas "transverse" aux strates sont intérieurs à $B_{\alpha,i}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris et le fait déjà cité (cf. [S]) que $\chi(\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi) \cap \partial B_{\alpha,i}) = 0$ donnent l'égalité

$$(4.2.2.2) \qquad \chi_{\alpha,i} = \chi\big(\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi)\big) - \chi\big(\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi) \cap B_{\alpha,i}\big) + 1$$

puisque $\chi(\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi_{\alpha,i}) \cap B_{\alpha,i})$ vaut 1 car d'après [**B-V**], $\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi_{\alpha,i}) \cap B_{\alpha,i}$ est contractile si $B_{\alpha,i}$ est de rayon assez petit.



La preuve de (4.2.2) est terminée, si nous pouvons estimer $\chi(\tilde{\varphi}_{t,\eta}^{-1}(\xi) \cap B_{\alpha,i}) = \chi'_{\alpha,i}$.

Pour cela on utilise le Lemme (2.3.9) et on considère une projection linéaire $p_{\alpha,i}$: $\mathbf{C}^{N+1} \to \mathbf{C}^{d_\alpha+1}$ assez générale parmi celles dont le noyau $\operatorname{Ker} p_{\alpha,i}$ contient $\operatorname{Ker} p$. Soit $p'_{\alpha,i}$: $\mathbf{C}^{d_\alpha+1} \to \mathbf{C}^2$ la projection linéaire telle que $p'_{\alpha,i} \circ p_{\alpha,i} = p$. Si les choix faits sont assez généraux, comme dans (2.3.9) on peut trouver des morphismes descriptibles

$$\Psi_{\alpha,i}: p_{\alpha,i}^{-1}\big(B'_{\alpha,i} \cap p'^{-1}_{\alpha,i}(B''_{\alpha,i})\big) \cap B_{\alpha,i} \cap X \to B'_{\alpha,i} \cap p'^{-1}_{\alpha,i}(B''_{\alpha,i})$$

induit par $p_{\alpha,i}$ avec $B'_{\alpha,i}$ et $B''_{\alpha,i}$ de rayon assez petit.

Si ξ est un point assez général de $B''_{\alpha,i}$ le Corollaire (2.3.10) nous dit précisément que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $U_{\alpha,i} = p_{\alpha,i}^{-1}(B'_{\alpha,i} \cap p'^{-1}_{\alpha,i}(\xi)) \cap B_{\alpha,i} \cap X$ est égale à $\chi'_{\alpha,i}$. Le morphisme descriptible $\Psi_{\alpha,i}$ induit un morphisme descriptible $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}$ de $U_{\alpha,i}$ sur $U'_{\alpha,i}$, où $U'_{\alpha,i} = p'^{-1}_{\alpha,i}(\xi) \cap B'_{\alpha,i}$.

Par ailleurs l'image Y_α de X_α par $p_{\alpha,i}$ est une hypersurface de $\mathbf{C}^{d_\alpha+1}$ qui est non singulière en $y_{\alpha,i} = p_{\alpha,i}(x_{\alpha,i})$. Puisque p est choisi de telle sorte que $\Gamma_{\alpha,i}$ est non singulière en $x_{\alpha,i}$ la restriction de p à X_α a un point critique quadratique ordinaire en $x_{\alpha,i}$ et par conséquent, $y_{\alpha,i}$ est un point quadratique ordinaire de la restriction de $p'_{\alpha,i}$ à Y_α. Les points généraux de $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}$: $U_{\alpha,i} \to U'_{\alpha,i}$ sont ceux de $p'^{-1}_{\alpha,i}(\xi) \cap B'_{\alpha,i} - Y_\alpha$ et les fibres générales de $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}$ ont pour caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha)$, tandis que les fibres de $\tilde{\Psi}_{\alpha,i}$ au-dessus de $p'^{-1}_{\alpha,i}(\xi) \cap B'_{\alpha,i} \cap Y_\alpha$ sont homéomorphes et contractiles (cf. (3.3.2)) et la Proposition (2.1.3) donne dans ce cas

$$\chi(U_{\alpha,i}) = 1 + (-1)^{d_\alpha-2} + (-1)^{d_\alpha-1}\chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha)$$

puisque $p'^{-1}_{\alpha,i}(\xi) \cap B'_{\alpha,i} \cap Y_\alpha$ est homéomorphe à la fibre de Milnor d'une singularité quadratique ordinaire de dimension $d_\alpha - 2$. On a donc

$$\chi'_{\alpha,i} = 1 + (-1)^{d_\alpha - 2} + (-1)^{d_\alpha - 1}\chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha)$$

puisque $\chi'_{\alpha,i} = \chi(U_{\alpha,i})$ comme nous l'avons vu plus haut.

Finalement la formule de (4.2.2.1) en résulte, puisque (4.2.2.2) donne

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha,i} &= \chi_2(X, \{x\}) - \chi'_{\alpha,i} + 1\\ &= \chi_2(X, \{x\}) + (-1)^{d_\alpha}\chi_{d_\alpha+1}(X, X_\alpha) + (-1)^{d_\alpha - 1}.\end{aligned}$$

Ceci et (4.2.1.1) donnent la formule de (4.1.1) cherchée quand $\{x\} = X_{\alpha_0}$.

(4.3) Dans le cas général, soit $I_{\alpha_0,i} = \{(H_{\alpha_0}, L_i) \in G_{d_{\alpha_0}} \times G_i \mid H_{\alpha_0} \supset L_i\}$ la variété d'incidence. C'est une variété algébrique irréductible, munie des deux projections π_{α_0}: $I_{\alpha_0,i} \to G_{\alpha_0}$ et π_i: $I_{\alpha_0,i} \to G_i$. D'après les résultats généraux sur les variétés polaires [**Lê-Te**, 4.1.8; **Te1**, Chapitre IV], il existe un ouvert de Zariski dense $U \subset G_{d_{\alpha_0}}$ tel que, pour $H_{\alpha_0} \in U$, on ait $H_{\alpha_0} \cap X_{\alpha_0} = \{x\}$, et pour tout $\alpha \in A$

$$m_x\Big(P_{d_\alpha - d_{\alpha_0} - 1}\big(\overline{X}_\alpha \cap H_{\alpha_0}, x\big)\Big) = m_x\Big(P_{d_\alpha - d_{\alpha_0} - 1}\big(\overline{X}_\alpha, x\big)\Big).$$

D'autre part d'après (2.3.9), il existe un ouvert de Zariski dense $V \subset G_i$ tel que, pour $L \in V$, on ait l'égalité: $\chi(X \cap B_t \cap (L + u)) = \chi_i(X, X_{\alpha_0})$, pour $u \in \mathbf{C}^{N+1} - L$ assez petit. Comme $I_{\alpha_0,i}$ est irréductible, l'ouvert $\pi_{\alpha_0}^{-1}(U) \cap \pi_i^{-1}(V)$ est dense dans $I_{\alpha_0,i}$ et l'application du théorème dans le cas particulier où $X_{\alpha_0} = \{x\}$ à l'intersection $X \cap H_{\alpha_0}$ fournit l'égalité cherchée dans le cas général.

5. Les réciproques du théorème de Thom-Mather.

(5.1) Soient X un espace analytique complexe réduit et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification analytique complexe de X.

Rappelons les diverses conditions d'incidence utilisées:

(5.1.1) (**Whitney en x**) Le couple de strates (X_β, X_α) satisfait la condition de Whitney (cf. (1.2.4)) en un point x de X_α.

(5.1.2) (**Whitney au voisinage de x**) Le couple de strates (X_β, X_α) satisfait la condition de Whitney en tout point d'un voisinage de x dans X_α. Dans ce cas on écrira que (X_β, X_α) vérifie $W_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.3) (**Whitney au voisinage de x**)* Pour tout plongement local de (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ et, pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant N - d_\alpha$, il existe un ouvert dense U_i de la Grassmannienne des plans de codimension i de $\mathbf{C}^N$ contenant $T_x X_\alpha$ tel que, pour tout espace non singulier H de $\mathbf{C}^{N+1}$ contenant X_α et tel que $T_x H \in U_i$, on ait $W_x(X_\beta \cap H, X_\alpha)$. Dans ce cas on dira que (X_β, X_α) satisfait $W_x^*(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.4) (**Equimultiplicité polaire**) L'application de X_α dans $\mathbf{N}^{d_\beta}$, qui, à $x \in X_\alpha$, associe la suite $M^*_{\overline{X}_\beta, x}$ des multiplicités en x des variétés polaires locales générales de $\overline{X}_\beta$, est constante au voisinage de x dans X_α. Dans ce cas on dira que (X_β, X_α) satisfait $(M^* \text{ constant})_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.5) (**Equiévanescence**) Pour tout plongement local de (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ et, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant d_\alpha$, il existe un ouvert Ω_j de l'espace des projections linéaires de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^j$ tel que, pour tout $p \in \Omega_j$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe η_ε, tel que pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$, le morphisme $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}\colon \overline{X}_\beta \cap B_\varepsilon \cap p^{-1}(B'_\eta) \to B'_\eta$, induit par p, est une fibration topologique localement triviale dont les fibres sont contractiles. Dans ce cas on dira que (X_β, X_α) satisfait la condition $EV_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.6) (**Equiévanescence**)* Pour tout plongement local de (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ et, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant d_\alpha$ et pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant N - d_\alpha$, il existe un ouvert dense $V_{i,j}$ de l'espace produit de celui des projections linéaires de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^j$ et de la Grassmannienne des plans de codimension i de $\mathbf{C}^{N+1}$ contenant $T_x X_\alpha$ tel que, pour toute projection p et tout espace non singulier H de $\mathbf{C}^{N+1}$ contenant X_α et tels que le couple $(p, T_x H) \in V_{i,j}$, on ait la condition d'équiévanescence de (5.1.5) de $X_\beta \cap H$ le long de X_α en x. Dans ce cas on dira que (X_β, X_α) satisfait la condition $EV^*_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.7) (**Equiévanescence numérique**)* Pour tout plongement local (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant d_\alpha$ et pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant N - d_\alpha$, il existe un ouvert dense $W_{i,j}$ de l'espace produit de celui des projections linéaires de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^j$ et de la Grassmannienne des plans de codimension i de $\mathbf{C}^N$ contenant $T_x X_\alpha$ tel que, pour toute projection p et tout espace non singulier H de $\mathbf{C}^{N+1}$ contenant X_α et tels que le couple $(p, T_x H) \in W_{i,j}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$, tel que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe η_ε, tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$, les fibres du morphisme $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta,H}\colon \overline{X}_\beta \cap H \cap B_\varepsilon \cap p^{-1}(B'_\eta) \to B'_\eta$ induit par p, aient une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à un. Dans ce cas on dira que le couple (X_β, X_α) satisfait la condition $EVN^*_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.8) (**χ^* constant**) Soient (X_β, X_α) un couple de strates, et $x \in X_\alpha$. Pour tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$, l'application $\chi^*_{\overline{X}_\beta}$ qui à tout point $z \in X_\alpha$ au voisinage de x associe la suite $\chi^*(\overline{X}_{\beta,z}) = (\chi_1(\overline{X}_\beta, \{z\}), \ldots, \chi_{N-d_\beta}(\overline{X}_\beta, \{z\})) \in \mathbf{Z}^{N-d_\beta}$ (cf. (3.3.2)), est constante sur X_α au voisinage de x. On dira que X_β satisfait la condition "χ^* constant" le long de X_α en x, ou que (X_β, X_α) satisfait la condition $(\chi^* \text{ constant})_x\, (X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.9) (**Equisingularité topologique**) Pour tout couple de strates (X_β, X_α), soit $x \in X_\alpha$; pour tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$, il existe une rétraction locale $r\colon (\mathbf{C}^{N+1}, 0) \to (X_\alpha, x)$ et $\varepsilon_0 > 0$, tels que, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe η_ε tel que, pour tout η, $0 < \eta \leqslant \eta_\varepsilon$, on ait un homéomorphisme de $B_\varepsilon \cap r^{-1}(B_\eta \cap X_\alpha)$ sur $(r^{-1}(x) \cap B_\varepsilon) \times (X_\alpha \cap B_\eta)$ compatible avec la rétraction r et qui induit un homéomorphisme de $\overline{X}_\beta \cap B_\varepsilon \cap r^{-1}(B_\eta \cap X_\alpha)$ sur $(\overline{X}_\beta \cap r^{-1}(x) \cap B_\varepsilon) \times (X_\alpha \cap B_\eta)$. On dira que l'espace $\overline{X}_\beta$ est topologiquement équisingulier le long de X_α en x: dans ce cas on notera $TT_x(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.10) (**Equisingularité topologique**)* Pour tout couple de strates (X_β, X_α), soit $x \in X_\alpha$; pour tout plongement local $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant N - d_\alpha + 1$, il existe un ouvert dense $\mathfrak{U}_j$ de la Grassmannienne des sous-espaces de codimension j de $\mathbf{C}^{N+1}$ contenant $T_x X_\alpha$ tel que, pour tout sous-espace non singulier H, contenant X_α et tel que $T_x H \in \mathfrak{U}_j$, on a que $\overline{X_\beta} \cap H$ est topologiquement équisingulier le long de X_α en x. Dans ce cas l'on dira que (X_β, X_α) satisfait la condition $TT_x^*(X_\beta, X_\alpha)$.

(5.1.11) *Notations*. Etant donnée une condition d'incidence $C_x(X_\beta, X_\alpha)$ où $C = W$ ou W^* ou EV etc., nous dirons qu'une stratification $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ satisfait la condition (C) si $C_x(X_\beta, X_\alpha)$ est réalisée pour tous les triplets (X_β, X_α, x) tels que $x \in X_\alpha$.

(5.2) *Le théorème de Thom-Mather* (cf. [**Th**, **Ma1**, **Ma2**]). On a

(5.2.1) THÉORÈME (THOM-MATHER). *Avec les notations de* (5.1), *si tout couple de strates* (X_β, X_α) *satisfait la condition* $W_x(X_\beta, X_\alpha)$ *de* (5.1.2) *ci-dessus, alors tout couple de strates* (X_β, X_α) *satisfait la condition* $TT_x(X_\beta, X_\alpha)$ *de* (5.1.9) *en tout point* x *de* X_α.

(5.2.2) REMARQUE. Si $\overline{X_\beta}$ est topologiquement équisingulier le long de X_α en x, le couple (X_β, X_α) satisfait la condition $EV_x(X_\beta, X_\alpha)$ de (5.1.5).

En résumé on peut noter

$$(W) \Rightarrow (TT) \Rightarrow (EV)$$

où la propriété (P) signifie que l'on a $P_x(X_\beta, X_\alpha)$ pour tout couple de strates (X_β, X_α) d'une stratification donnée $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X en tout point x de X_α.

(5.2.3) D'après [**Te1**, Chapitre V, Remarque 1.3], soit (X_β, X_α) un couple de strates qui satisfait $W_x(X_\beta, X_\alpha)$ en $x \in X_\alpha$ (cf. (5.1.2)), alors (X_β, X_α) satisfait $W_x^*(X_\beta, X_\alpha)$. On a donc en fait:

$$\begin{tikzcd}
(W) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] & (W^*) \arrow[r, Rightarrow] & (TT^*) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (EV^*) \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & (TT) \arrow[r, Rightarrow] & (EV)
\end{tikzcd}$$

De plus d'après [**Te1**, Chapitre V, Théorème 1.2] on a: $(W) \Leftrightarrow (M^* \text{ constant})$.

(5.3) *Les réciproques du théorème de Thom-Mather*. Il est faux que (TT) implique (W) (cf. [**B-S**]). Par conséquent le théorème de Thom-Mather (5.2.1) n'admet pas de réciproque. Ce que nous appellerons réciproque du théorème de Thom-Mather est l'implication $(TT^*) \Rightarrow (W)$ que nous allons maintenant démontrer. Nous allons en fait démontrer plus:

(5.3.1) THÉORÈME. *Soient X un espace analytique complexe réduit et $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une stratification analytique complexe de X. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de* X *satisfait la propriété de frontière et pour tout couple de strates* (X_β, X_α) *et tout point* $x \in X_\alpha$, *le couple* (X_β, X_α) *satisfait la condition de Whitney en* x;

(ii) *on a* (W^*) *pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$;

(iii) *on a* (TT^*) *pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$;

(iv) *on a* (EV^*) *et la propriété de frontière pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$;

(v) *on a* (EVN^*) *et la propriété de frontière pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$;

(vi) *on a* $(\chi^* \text{ constant})$ *pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$;

(vii) *on a* $(M^* \text{ constant})$ *pour la stratification* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.

DÉMONSTRATION. Comme nous avons vu plus haut que (i) $\Leftrightarrow$ (vii) d'après [**Te1**, Chaptire V, Théorème (1.2)] et que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). il nous reste à montrer que (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii).

Or, (iv) $\Rightarrow$ (v) est évident.

Montrons l'implication (v) $\Rightarrow$ (vii).

Soit (X_β, X_α) un couple de strates telles que $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et soit $x \in X_\alpha$. Nous allons montrer que les variétés polaires en x de l'adhérence $\overline{X}_\beta$ sont équimultiples le long de X_α au voisinage de x. Ceci donnera (vii) d'après [**Te1**, Chapitre V, (1.1.2)].

(5.3.1.1) Soit $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ un plongement local de X en x. En utilisant (2.3.9), il existe un ouvert de Zariski dense Ω de l'espace des projections linéaires de $\mathbf{C}^{N+1}$ sur $\mathbf{C}^{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant d_\beta)$ tel que, pour $p \in \Omega$, il existe un ouvert dense Ω' de l'espace des projections linéaires de $\mathbf{C}^{i+1}$ sur $\mathbf{C}^i$ tel que, pour un choix convenable de $(\eta', \eta, \varepsilon)$, et $q \in \Omega'$ on ait:

(1) le morphisme $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}$: $B_\varepsilon \cap p^{-1}(B'_\eta) \cap \overline{X}_\beta \to B'_\eta$ induit par p est descriptible. Soit Δ l'image par p de l'union des variétés polaires relativement à p des fermetures de strates $\overline{X}_{\beta'}$ telles que $X_\alpha \subset \overline{X}_{\beta'} \subset \overline{X}_\beta$; Nous appellons Δ le *discriminant* de $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}$;

(2) la projection linéaire q restreinte à $\Delta \cap B'_\eta \cap q^{-1}(B'_\eta)$, induit un morphisme descriptible $\Psi_{\eta,\eta',\beta}$ au-dessus de $B''_{\eta'} \subset \mathbf{C}^i$;

(3) le morphisme $\theta_{\varepsilon,\eta,\eta',\beta}$: $B_\varepsilon \cap p^{-1}(B'_\eta \cap q^{-1}(B''_{\eta'})) \cap \overline{X}_\beta \to B''_{\eta'}$ induit par $q \circ p$ est descriptible.

Considérons d'abord le cas où $1 \leqslant i \leqslant d_\alpha$. Dans ce cas on choisit $(\eta', \eta, \varepsilon)$ de telle sorte que:

(4) pour un point ξ de B''_η assez général pour $\theta_{\varepsilon,\eta,\eta',\beta}$, la fibre $q^{-1}(\xi) \cap B'_\eta$ coupe transversalement Δ et la fibre de $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}$ au-dessus de tout point de $\varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}(X_\alpha) \cap B'_\eta$ ainsi que $\varphi^{-1}_{\varepsilon,\eta,\beta}(q^{-1}(\xi) \cap B'_\eta)$ sont de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 d'après l'hypothèse (v) de (5.3.1).

Fixons $(\eta', \eta, \varepsilon)$.

Posons $\varphi = \varphi_{\varepsilon,\eta,\beta}$, $\Psi = \Psi_{\eta',\eta,\beta}$, $\theta = \theta_{\varepsilon,\eta,\eta',\beta}$.

Notons $Z = \varphi^{-1}(q^{-1}(\xi) \cap B'_\eta)$ et $\chi(Z) = 1$, $S = q^{-1}(\xi) \cap B'_\eta$ et φ_S: $Z \to S$ le morphisme descriptible induit par φ. Soit $\Delta_S = \Delta \cap S$.

Montrons par récurrence sur $\dim X_\beta - \dim X_\alpha$ que $\Delta = \varnothing$. Ceci est évident si $\dim X_\beta = \dim X_\alpha$, puisque X_α est non singulier en x. Supposons donc que, $\dim X_\beta - \dim X_\alpha = k + 1$ et pour tout β', tels que $\dim X_{\beta'} - \dim X_\alpha \leqslant k$ avec $k \geqslant 0$, le discriminant (défini comme dans (5.3.1.1)(1)) de la restriction à $\overline{X}_{\beta'}$ d'une projection sur $\mathbf{C}^{i+1}$ assez générale, telle que p, soit vide. Le discriminant Δ est alors l'image par φ de la variété polaire de dimension i de $\overline{X}_\beta \cap B_\varepsilon \cap p^{-1}(B'_\eta)$ relativement à la projection linéaire p.

Si $1 \leqslant i \leqslant d_\alpha - 1$, la fibre générale de φ_S est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1 et on a, pour tout $s \in \Delta_S$

$$\chi(\varphi_S^{-1}(s)) = 1 + (-1)^{d_\beta - i}$$

car au-dessus de s, il n'y a qu'un point critique de φ_S quand p est assez général (cf. (4.1.2)(iv)) et ce point critique est un point critique quadratique ordinaire de la restriction de φ_S à $Z \cap X_\beta$. La Proposition (2.1.3) donne, si Δ est non vide, avec $\mathrm{Card}(S \cap \Delta) = m_0 \neq 0$;

$$\chi(Z) = 1 - m_0 + m_0\big(1 + (-1)^{d_\beta - i}\big) = 1 + m_0(-1)^{d_\beta - i}$$

ce qui est contradictoire avec $\chi(Z) = 1$. Il faut donc que $m_0 = 0$, d'où le résultat cherché pour les variétés polaires de $\overline{X}_\beta$ en x qui sont de dimension $i < d_\alpha$, puisqu'elles sont vides!

Si $i = d_\alpha$, la fibre générale de φ_s est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à un certain entier χ_0 et on a, pour tout $s \in \Delta_s$

$$\chi\big(\varphi^{-1}(s)\big) = \chi_0 + (-1)^{d_\beta - d_\alpha}$$

pour les mêmes raisons que ci-dessus. La fibre au-dessus d'un point de $S \cap p(X_\alpha)$ est de caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1. La Proposition (2.1.3) donne dans ce cas

$$\chi(Z) = (1 - m_0 - 1)\chi_0 + m_0\big(\chi_0 + (-1)^{d_\beta - d_\alpha}\big) + 1 = 1 + m_0(-1)^{d_\beta - d_\alpha}$$

et on conclut, comme ci-dessus, que la variété polaire de $\overline{X}_\beta$ en x de dimension d_α est vide.

Si $i \geqslant d_\alpha + 1$, d'après [**Te1**, Chapitre I, 5.5], pour montrer que la variété polaire de dimension i de $\overline{X}_\beta$ en x est équimultiple le long de X_α au voisinage de x, il suffit de montrer qu'un espace non singulier H de codimension $i - d_\alpha$ qui contient X_α et dont l'espace tangent $T_x H$ est assez général, intersecte cette variété polaire exactement selon X_α au voisinage de x, si cette variété polaire n'est pas vide.

Puisque la projection p est assez générale, l'image inverse par p d'un sous-espace H' non singulier de $\mathbf{C}^{i+1}$ et de dimension $d_\alpha + 1$ qui contient $p(X_\alpha)$ et dont l'espace tangent $T_{p(x)}\, H'$ est assez général est un espace non singulier H de codimension $i - d_\alpha$ qui contient X_α et dont le plan tangent $T_x H$ est assez général. Puisque $(W) \Rightarrow (W^*)$, la situation du couple $(X_\beta \cap H, X_\alpha)$ est analogue à la situation précédente où $i = d_\alpha$. On en déduit que l'on a $(P_{d_\beta - i}(\overline{X}_\beta, x) - X_\alpha) \cap H = \varnothing$ d'où l'équimultiplicité cherchée.

Ceci achève la démonstration de (v) $\Rightarrow$ (vii).

Il nous reste à montrer (vi) $\Leftrightarrow$ (vii).

L'implication (vii) $\Rightarrow$ (vi) provient de ce que (vii) et (i) sont équivalents d'après [**Te1**, Chapitre V, Théorème (1.2)] et que (i) implique (vi) d'après (3.3.2).

Pour établir que (vi) implique (vii), considérons un couple de strates (X_β, X_α) tel que $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et soit $\overline{X}_\beta = \bigcup_{\beta' \in B} X_{\beta'}$ la stratification de $\overline{X}_\beta$ induite par celle de X. Il suffit de montrer que cette stratification est une stratification de Whitney. Pour cela nous procédons par récurrence sur $\dim X_\beta - \dim X_\alpha$.

Si $\dim X_\beta - \dim X_\alpha = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons l'implication (vi) $\Rightarrow$ (vii) démontrée pour les couples $(X_{\beta'}, X_{\alpha'})$ avec $X_{\alpha'} \subset \overline{X}_{\beta'}$ tels que $\dim X_{\beta'} - \dim X_{\alpha'} < \dim X_\beta - \dim X_\alpha$. Ceci implique d'une part que $\bigcup_{\beta' \in B, \beta' \neq \beta} \overline{X}_{\beta'}$ est une stratification de Whitney analytique complexe et d'autre part que $\bigcup_{\beta' \in B, \beta' \neq \alpha} X_{\beta'}$ est aussi une stratification de Whitney. Il nous reste à démontrer que X_β satisfait la condition de Whitney le long de X_α en tout point de X_α. D'après [**Te1**, Chapitre V, Théorème (1.2)] ceci revient à démontrer que l'on a $(M^* \text{ constant})_x (X_\beta, X_\alpha)$ en tout point $x \in X_\alpha$.

Soit $Z \subset X_\alpha$ le sous-ensemble analytique formé des points de X_α où (X_β, X_α) ne satisfait pas la condition de Whitney, i.e. où $(M^* \text{ constant})_x (X_\beta, X_\alpha)$ n'est pas satisfaite (cf. [**Te1**, Chapitre VI, (2.1)] et comparer à [**Lê-Te**, (6.1.5)]). Nous pouvons stratifier $Z = \bigcup_{\gamma \in C} Z_\gamma$ de telle façon que la stratification

$$\overline{X}_\beta = \bigcup_{\substack{\beta' \in B \\ \beta' \neq \alpha}} X_{\beta'} \cup (X_\alpha - Z) \bigcup_{\gamma \in C} Z_\gamma$$

soit une stratification de Whitney analytique complexe. Soit $x \in Z$ et soit Z_γ une strate de dimension maximum parmi celles auxquelles x est adhérent. Nous allons montrer que $Z_\gamma = \varnothing$, ce qui impliquera que $Z = \varnothing$.

Supposons $Z_\gamma \neq \varnothing$ et soit $y \in Z_\gamma$. Posons pour simplifier $Z_\gamma = X_{\alpha'}$. Considérons un voisinage U de y dans $\overline{X}_\beta$ tel que $U \cap Z_{\gamma'} = \varnothing$, pour tout $\gamma' \in C$, $\gamma' \neq \gamma$. Nous allons montrer que, si U est assez petit,

$$(M^* \text{ constant})_z \big(X_\beta, X_\alpha\big)$$

est satisfaite en tout point $z \in U$, ce qui impliquera $U \cap Z_\gamma = \varnothing$ et donc $Z = \varnothing$. Puisque le couple $(X_\beta \cap U, X_{\alpha'} \cap U)$ satisfait la condition de Whitney, on a $P_k(\overline{X}_\beta, z) = \varnothing$ pour tout $k \geqslant d_\beta - d_\alpha$, et tout $z \in X_{\alpha'} \cap U$ et donc en tout point $z \in X_\alpha \cap U$ puisque $d_\alpha > d_{\alpha'}$ (cf. [**Te1**, Chapitre V, Théorème (1.2)]).

Pour établir la constance de $m_z(P_k(\overline{X}_\beta, z))$ pour tout $z \in X_\alpha \cap U$, nous utilisons la formule du Théorème (4.1.1) appliquée à la stratification de Whitney analytique complexe

$$\overline{X}_\beta \cap U = \bigcup_{\substack{\beta' \neq \alpha \\ X_{\beta'} \cap U \neq \varnothing}} (X_{\beta'} \cap U) \cup ((X_\alpha - X_{\alpha'}) \cap U) \cup (X_{\alpha'} \cap U)$$

quand U est assez petit:

(5.3.1.2)

$$\begin{cases} \chi_{d_{\alpha'}+1}\big(\overline{X}_\beta \cap U, X_{\alpha'} \cap U\big) - \chi_{d_{\alpha'}+2}\big(\overline{X}_\beta \cap U, X_{\alpha'} \cap U\big) \\ = \displaystyle\sum_{\substack{\beta' \neq \alpha' \\ X_{\beta'} \cap U \neq \varnothing}} (-1)^{d_{\beta'} - d_{\alpha'} - 1} m_z\Big(P_{d_{\beta'} - d_{\alpha'} - 1}\big(\overline{X}_{\beta'}, z\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'}+1}\big(\overline{X}_\beta, X_{\beta'}\big)\Big) \end{cases}$$

pour tout $z \in X_{\alpha'} \cap U$. D'après l'hypothèse (vi)

$$\chi_{d_{\alpha'}+i}\big(\overline{X}_\beta \cap U, X_{\alpha'} \cap U\big) = \chi_{d_{\alpha'}+i}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big) \quad \text{pour tout } i.$$

Donc si $d_{\alpha'} + i \leqslant d_\alpha$ on a

$$\chi_{d_{\alpha'}+i}\big(\overline{X}_\beta \cap U, X_{\alpha'} \cap U\big) = 1$$

puisque

$$\chi_k\big(\overline{X}_\beta \cap U, X_\alpha \cap U\big) = 1,$$

pour $0 \leqslant k \leqslant d_\alpha$. Par ailleurs $m_z(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}(\overline{X}_{\beta'}, z))$ est constant sur $U \cap X_\alpha$ pour tout $\beta' \neq \beta$.

Choisissons $z \in U - X_{\alpha'}$ et soit $(X_{\alpha''}, z)$ un germe en z de sous-espace non singulier contenu dans X_α et de dimension $d_{\alpha'}$. Dans un ouvert V de z dans $\mathbf{C}^{N+1}$ assez petit, la stratification analytique complexe

$$\overline{X}_\beta \cap V = \bigcup_{\substack{\beta' \in B - \{\alpha\} \\ X_{\beta'} \cap V \neq \varnothing}} (X_{\beta'} \cap V) \cup ((X_\alpha - X_{\alpha''}) \cap V) \cup (X_{\alpha''} \cap V)$$

est de Whitney et le Théorème (4.1.1) donne

(5.3.1.3)

$$\begin{cases} \chi_{d_{\alpha'}+1}\big(\overline{X}_\beta \cap V, X_{\alpha''} \cap V\big) - \chi_{d_{\alpha'}+2}\big(\overline{X}_\beta \cap V, X_{\alpha''} \cap V\big) \\ = \displaystyle\sum_{\substack{\beta' \neq \alpha' \\ X_{\beta'} \cap V \neq \varnothing}} (-1)^{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1} m_{z'}\Big(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_{\beta'}, z'\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'+1}}\big(\overline{X}_\beta, X_{\beta'}\big)\Big) \end{cases}$$

pour tout $z' \in X_{\alpha''} \cap V$.

L'hypothèse (vi) donne $\chi_{d_{\alpha'}+i}(\overline{X}_\beta \cap V, X_{\alpha''} \cap V) = \chi_{d_{\alpha'}+i}(\overline{X}_\beta, X_\alpha)$.

Si $d_{\alpha'} + 1 < d_\alpha$, $m_{z'}(P_{d_\alpha - d_{\alpha'}-1}(X_\alpha, z')) = 0$ puisque X_α est non singulier en z' et de plus on a

$$\chi_{d_{\alpha'}+1}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big) = \chi_{d_{\alpha'}+2}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big) = 1.$$

Les formules (5.3.1.2) et (5.3.1.3) donnent respectivement:

$$\begin{aligned} &(-1)^{d_\beta - d_{\alpha'}} m_z\Big(P_{d_\beta - d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_\beta, z\big)\Big) \\ &\quad = \sum_{\substack{\beta' \neq \beta \\ \beta' \in B - \{\alpha\}}} (-1)^{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1} m_z\Big(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_{\beta'}, z\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'}+1}\big(\overline{X}_\beta, X_{\beta'}\big)\Big) \end{aligned}$$

où $B = \{\beta', X_{\beta'} \cap U \neq \varnothing\}$, pour tout $z \in X_{\alpha'} \cap U$, et

$$\begin{aligned} &(-1)^{d_\beta - d_{\alpha'}} m_z\Big(P_{d_\beta - d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_{\beta'} z'\big)\Big) \\ &\quad = \sum_{\substack{\beta' \neq \beta \\ \beta' \in B' - \{\alpha\}}} (-1)^{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1} m_{z'}\Big(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_{\beta'}, z'\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'}+1}\big(\overline{X}_{\beta'}, X_{\beta'}\big)\Big) \end{aligned}$$

où $B' = \{\beta', X_{\beta'} \cap V \neq \varnothing\}$, pour tout $z' \in X_{\alpha''} \cap V$.

Pour un choix convenable de U on a $B = B'$ et la comparaison entre les deux formules donne

$$m_z\Big(P_{d_\beta - d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_\beta, z\big)\Big) = m_{z'}\Big(P_{d_\beta - d_{\alpha'}-1}\big(\overline{X}_\beta, z'\big)\Big)$$

pour tout $z \in X_{\alpha'} \cap U$ et tout $z' \in X_{\alpha''} \cap V$, parce que l'hypothèse de récurrence a donné $m_z(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}(\overline{X}_{\beta'}, z))$ égal à $m_{z'}(P_{d_{\beta'}-d_{\alpha'}-1}(\overline{X}_{\beta'}, z'))$ quand $\beta' \neq \beta$ et

$\beta' \in B - \{\alpha\}$. On en déduit que la valeur de $m_z(P_{d_\beta - d_{\alpha'} - 1}(\overline{X}_\beta, z))$ est constante sur $X_\alpha \cap U$, puisque z' est un point général de X_α.

Si $d_{\alpha'} + 1 = d_\alpha$, $m_{z'}(P_{d_\alpha - d_{\alpha'} - 1}(X_\alpha, z')) = 1$ pour $z' \in X_\alpha \cap V$ puisque X_α est non singulier en z'. La formule (5.3.1.2) donne

$$\begin{aligned}1 - \chi_{d_\alpha+1}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big) &= (-1)^{d_\beta - d_\alpha} m_z\Big(P_{d_\beta - d_\alpha}\big(\overline{X}_\beta, z\big)\Big) \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta' \neq \beta \\ \beta' \in B - \{\alpha\}}} (-1)^{d_{\beta'} - d_\alpha} m_z\Big(P_{d_{\beta'} - d_\alpha}\big(\overline{X}_{\beta'}, z\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'}+1}\big(\overline{X}_\beta, X_{\beta'}\big)\Big) \\ &\quad + m_z(P_0(X_\alpha, z))\Big(1 - \chi_{d_\alpha+1}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big)\Big)\end{aligned}$$

pour tout $z \in X_{\alpha'} \cap U$.

La formule (5.3.1.3) donne

$$\begin{aligned}1 - \chi_{d_\alpha+1}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big) &= (-1)^{d_\beta - d_\alpha} m_{z'}\Big(P_{d_\beta - d_\alpha}\big(\overline{X}_\beta, z'\big)\Big) \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta' \neq \beta \\ \beta' \in B - \{\alpha\}}} (-1)^{d_\beta - d_\alpha} m_{z'}\Big(P_{d_{\beta'} - d_\alpha}\big(\overline{X}_{\beta'}, z'\big)\Big)\Big(1 - \chi_{d_{\beta'}+1}\big(\overline{X}_\beta, X_{\beta'}\big)\Big) \\ &\quad + m_{z'}(P_0(X_\alpha, z'))\Big(1 - \chi_{d_\alpha+1}\big(\overline{X}_\beta, X_\alpha\big)\Big)\end{aligned}$$

pour tout $z' \in X_{\alpha''} \cap V$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence comme ci-dessus, on conclut que $m_z(P_{d_\beta - d_\alpha}(\overline{X}_\beta, z))$ est constant sur $X_\alpha \cap U$.

Ceci montre que, pour tout $k \geqslant d_\beta - d_{\alpha'} - 1$ les multiplicités $m_x(P_k(\overline{X}_\beta, x))$ sont constantes sur $X_\alpha \cap U$ (en fait on a remarqué qu'elles sont nulles si $k \geqslant d_\beta - d_{\alpha'}$).

Soient $x \in X_{\alpha'} \cap U$ et un plongement local de (X, x) dans $(\mathbf{C}^{N+1}m, 0)$. Quitte à rétrécir U on peut choisir un sous-espace non singulier Y_α de dimension $d_{\alpha'} + 1$ de X_α contenant $X_{\alpha'}$. La stratification

$$(5.3.1.3) \qquad \begin{aligned}\overline{X}_\beta \cap U = \bigcup_{\beta' \in B - \{\alpha\}} &(X_{\beta'} \cap U) \cup ((X_\alpha - Y_\alpha) \cap U) \\ &\cup ((Y_\alpha - X'_\alpha) \cap U) \cup (X'_\alpha \cap U)\end{aligned}$$

est une stratification de Whitney analytique complexe.

Soit H un sous-espace non singulier de U de dimension l, $d_{\alpha'} + 1 \leqslant l \leqslant N$ assez général qui contient Y_α.

Quitte à rétrécir encore U, la stratification induite sur $\overline{X}_\beta \cap H \cap U$ par la stratification (5.3.1.3) satisfait encore la condition (χ^* constant) de (vi). D'après ce qui précède et le fait déjà utilisé dans (5.2.3) que $(W) \Rightarrow (W^*)$, tous les couples de strates de la stratification précédente sauf peut-être $(\overline{X}_\beta \cap H \cap U, X_{\alpha'} \cap U)$ satisfont les conditions de Whitney. En remplaçant U par un voisinage d'un point général de $X_{\alpha'}$, d'après le théorème de Whitney **[W1]**, on peut enfin supposer que cette stratification est de Whitney. Le raisonnement ci-dessus montre alors que la multiplicité $m_z(P_{d_\beta - d_{\alpha'} - 1 - N + l}(\overline{X}_\beta \cap H, z))$ est constante lorsque z parcourt

$Y_\alpha \cap U$: la multiplicité $m_z(P_{d_\beta - d_{\alpha'} - 1 - N + l}(\overline{X}_\beta, z))$ est constante sur $X_\alpha \cap U$, puisque, d'après [**Lê-Te**, (4.1.8)] elle est égale à la multiplicité précédente en tout point de $\overline{X}_\beta \cap H \cap U$ et est constante sur $(X_\alpha - X'_\alpha) \cap U$ qui rencontre $Y_\alpha \cap U$. Comme on peut choisir $d_{\underline{\alpha}'} + 1 \leqslant l \leqslant N$, on obtient l'équimultiplicité de toutes les variétés polaires de $\overline{X}_\beta$ le long de $X_\alpha \cap U$, ce qui contredit l'hypothèse $X_{\alpha'} \neq \varnothing$.

Ceci montre que (vi) entraine (vii) et achéve la démonstration du Théorème (5.3.1).

(5.3.2) COROLLAIRE. *Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in D}$ une stratification analytique complexe d'un espace analytique complexe réduit X. C'est une stratification de Whitney si et seulement si pour chaque $\alpha \in A$, let type d'homotopie évanescent total* (*cf.* 3.3.2) *du germe (X, x) est constant pour $x \in X_\alpha$.*

BIBLIOGRAPHIE

[**B-S**] J. P. Brasselet et M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Astérisque **82–83** (1981), 93–147.

[**B-G-G**] J. Briançon, A. Galligo et J. M. Granger, *Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **1** (1980).

[**B-H-S**] J. Briançon, J. P. G. Henry et J. P. Speder, *Les conditions de Whitney en un point sont analytiques*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **282** (1976), 279.

[**Br-Sp1**] J. Briançon, et J. P. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **280** (1975), 365.

[**Br-Sp2**] ______, *Les conditions de Whitney impliquent* μ^* *constant*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976), 153–163.

[**Bu**] R. O. Buchweitz, *On Zariski's criterion for equisingularity and non-smoothable monomial curves*, Thèse d'Etat, Paris VII (1981), voir aussi ce volume.

[**Bu-G**] R. O. Buchweitz and G. M. Greuel, *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980), 241.

[**B-V**] D. Burghelea and A. Verona, *Local homological properties of analytic sets*, Manuscript Math. **7** (1972), 55–66.

[**Ch**] D. Cheniot, *Sur les sections transversales d'un ensemble stratifié*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **275** (1972), 915–916.

[**C-S**] G. Canuto et J. P. Speder, *Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **27** (1973).

[**D-F**] R. Draper and K. Fischer, *Derivations into the integral closure*, Preprint, George Mason University, 1981.

[**D**] A. Dubson, *Classes caractéristiques des variétés singulières*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **287** (1978), 237.

[**Do**] A. Dold, *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 223–255.

[**G**] M. Goresky, *Triangulation of stratified objects*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978).

[**Ha**] R. M. Hardt, *Stratification of real analytic mappings and images*, Invent. Math. **28** (1975).

[**H1**] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Volume in Honour of K. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973.

[**H2**] ______, *Introduciton to real-analytic sets and real analytic maps*, Quaderni del gruppo... Instituto L. Tonelli Via Buonarrotti, Pisa.

[**H3**] ______, *Stratification and flatness in "Real and complex singularities"*, Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Netherlands 1977.

[**H4**] ______, *Triangulation of algebraic sets*, Proc. Amer. Math. Soc. Sympos. on Algebraic Geometry, Arcata, 1974, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1975 pp. 165–185.

[**H5**] ______, *Equivalence and deformations of isolated singularities*, Woods Hole Seminar on Algebraic Geometry, 1964. (multigraphiè)

[H6] ______, *Normal cones in analytic Whitney stratifications*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **36** (1970), (volume dédié à Zariski).

[He-Lê] J. P. G. Henry et Lê D. T., *Limites d'espaces tangents*, Sém. Norguet, Lecture Notes in Math., vol. 482, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[He-M1] J. P. G. Henry et M. Merle, *Limites d'espaces tangents et transversalité de variétés polaires*, Actes Conf. sur les Singularités de La Rabida, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin and New York (à paraitre).

[He-M2] ______, *Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka*, Prépublication, Centre de Math. Ecole Polytechnique, Avril 1982.

[K] M. Kashiwara, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 803–804. Voir aussi: Cours de Kashiwara à Paris-Nord, 1976–77.

[Lê1] Lê D. T., *Some remarks on relative monodromy*, In "Real and Complex Singularities", Nordic Summer School, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff, 1977.

[Lê2] ______, *Sur un critère d'équisingularité*, Note C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), 138–140.

[Lê3] ______, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), 261–270.

[Lê4] ______, *Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète*, Funkcional Anal. i Priložen. **8** (1974), 45–52.

[Lê5] ______, *Topological use of polar curves*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974, pp. 507–512.

[Lê6] ______, *Vanishing cycles on analytic sets*, Proc. Conf. on Algebraic Analysis, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, July 1975.

[L-R] Lê D. T. and C. P. Ramanujam, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, Amer. J. Math. **98** (1976), 67–78.

[Lê-Te] Lê D. T. et B. Teissier, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 457–491.

[Ło] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques* (Mimeographie Inst. Hautes Etudes Sci. 1965).

[Ma1] J. Mather, *Notes on topological stability*, Harvard Univ. Preprint, July 1970.

[Ma2] ______, *Stratifications and mappings*, Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1973.

[MP] R. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 423–432.

[Mi] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[Na] V. Navarro, *Conditions de Whitney et sections planes*, Invent. Math. **61** (1980), 199–266.

[Na-Tr] V. Navarro and D. Trotman, *Whitney regularity and generic wings*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **31** (1981), 87–111.

[P] D. Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 375–386.

[Sa] C. Sabbah, *Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents*, Conf. de Luminy sur Algèbre et Analyse sur les Espaces Singuliers, Astérisque (a paraitre).

[Sch] M. H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **260**, 3262–3264 et 3535–3537.

[S] D. Sullivan, *Combinatorial invariants of analytic spaces*, Proc. Liverpool Singularities Sympos. I, Lecture Notes in Math., vol. 192, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, pp. 165–168.

[Sp] J. P. Speder, *Equisingularité et conditions de Whitney*, Amer. J. Math. **97** (1975), 571–588.

[St] J. Stutz, *Analytic sets as branched coverings*, Trans. Amer. Math. Soc. **166** (1972), 241–259.

[Te1] B. Teissier, *Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Actes de la Conf. de La Rabida, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin and New York (a paraitre).

[Te2] ______, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Singularités à Cargèse, 1972, Astérisque **7-8** (1973).

[Te3] ______, *Variétés polaires*. I, *Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. **40** (1977), 267–292.

[Te4] ______, *Introduction to equisingularity problems*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 29, Arcata 1974, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[**Te5**] ______, *Cycles évanouissants et conditions de Whitney*, Note C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **276** (1973), 1051–1054.

[**Te6**] ______, *Variétés polaires locales et conditions de Whitney*, Note aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290** (1980), 799.

[**Th1**] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 240–284.

[**Th2**] ______, *Local differential properties of analytic varieties*, Bombay Colloquium, Oxford Univ. Press, 1967.

[**Th3**] ______, *Proprietés différentielles locales des ensembles analytiques*, Sem. Bourbaki **281** (1964–65).

[**Th4**] ______, *La stabilité topologique des applications polynomiales*, L'enseignement Math. **8** (1962).

[**Tr**] D. Trotman, Thèse, Orsay, 1980.

[**V**] J. L. Verdier, *Stratifications de Whitney et Théorème de Bertini Sard*, Invent. Math. **36** (1976), 295–312.

[**W1**] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. (2) **81** (1964), 496–549.

[**W2**] ______, *Local properties of analytic sets*, Differential and Combinatorial Topology, Sympos. Honour of M. Morse (S. S. Cairns, Editor), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, p. 205.

[**Z1**] O. Zariski, *Studies in equisingularity*. I, II, III, Amer. J. Math. **87** (1965); **90** (1968).

[**Z2**] ______, *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481–491.

[**Z3**] ______, *Collected papers*. vol. IV. *Equisingularity on algebraic varieties*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1979.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE