Astérisque

BERNARD TEISSIER

Déformations à type topologique constant I et II

Astérisque, tome 16 (1974), p. 215-249

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__215_0>

DEFORMATIONS A TYPE TOPOLOGIQUE CONSTANT I

par Bernard TEISSIER

§ 1. Introduction.

1.1. On se propose d'étudier les petites déformations "à type topologique constant" ou "équisingulières" d'un germe d'hypersurface à singularité isolée. En particulier, on montrera l'existence d'une déformation équisingulière semi-universelle. Comme l'a montré Pham (voir [1] ou [13]) ce problème ne coïncide pas avec l'étude de la stratification de Thom d'un morphisme stable dont la fibre est une hypersurface, puisque cette étude est celle des petites déformations à "type topologique universel" constant. Néanmoins, ce problème est intéressant en soi, d'une part comme approximation du problème étudié par Pham, et d'autre part parce que c'est l'analogue local (dans la fibre) de l'étude de l'espace des modules locaux (dans la base !) (par exemple : espace des modules locaux des courbes projectives planes lisses de genre g ; puisque fixer le genre revient à fixer la topologie).

DEFINITION 1.2.- <u>On dit que deux germes d'hypersurfaces analytiques complexes</u> (X_1,x_1) <u>et</u> (X_2,x_2) , <u>de même dimension</u> n <u>ont même type topologique s'il existe des plongements de germes</u> $(X_i,x_i)\subset(\mathbb{C}^{n+1},0)$, $i=1,2$ <u>tels qu'il existe un germe en</u> 0 <u>d'homéomorphisme de paires</u> $(\mathbb{C}^{n+1},X_1)\approx(\mathbb{C}^{n+1},X_2)$.

1.3. <u>Remarque</u>.- Une telle définition n'a de sens que pour des hypersurfaces. On peut montrer facilement que si (Γ_1,x_1) (Γ_2,x_2) sont des germes de courbes irréductibles dans $(\mathbb{C}^3,0)$, il existe toujours un germe d'homéomorphisme de $(\mathbb{C}^3,0)$ dans lui-même qui envoie homéomorhiquement Γ_1 sur Γ_2 .

DEFINITION 1.4.- <u>On appelle déformation équisingulière d'un germe d'hypersurface à singularité isolée</u> (X_o, x_o) <u>un carré cartésien de germes d'espaces analytiques</u>

$$\begin{array}{ccc} (X_o,x_o) & \hookrightarrow & (X,x) \\ \downarrow & \square & \downarrow G \\ \{s\} & \hookrightarrow & (S,s) \end{array}$$

<u>où</u> G <u>est plat, tel que tout représentant suffisamment petit de</u> G <u>possède la propriété suivante : pour tout</u> $s' \in S$, <u>il existe un point</u> $x(s')$ <u>dans la fibre</u> $X_{s'}$ <u>tel que</u> $(X_{s'}, x(s'))$ <u>ait même type topologique que</u> (X_o, x_o) .

1.5. <u>Remarque</u>.- Nous verrons que le point $x(s')$ est alors nécessairement l'unique point singulier de $X_{s'}$ (dans un voisinage suffisamment petit de x , bien sûr) et est même donné par une section analytique de G .

Avant d'étudier les déformations équisingulières, on va étudier des problèmes analogues mais un peu plus simples.

§ 2. Déformations "à type analytique constant".

On se propose d'étudier les déformations $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ de (X_o,x_o) possédant la propriété suivante : pour tout représentant suffisamment petit de G , et tout $s' \in S$, il existe $x(s') \in X_{s'}$ tel que $(X_{s'}, x(s'))$ soit un germe d'espace analytique isomorphe à (X_o,x_o) . La réponse est :

THEOREME 2.1.(Seidenberg [15] et [16]).- <u>Une telle déformation est analyti-</u>

<u>quement triviale</u>.

(Comparer à Grauert-Fischer [3]).

En fait, Seidenberg démontre le résultat en géométrie algébroïde. Nous allons esquisser une autre démonstration qui s'appuie sur les résultats de Mather ([10] et [11]). Plus précisément on a

PROPOSITION 2.2.- <u>Soit</u> $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>un représentant suffisamment petit</u> δ' <u>germe de morphisme stable d'espaces lisses</u>. <u>L'ensemble</u> $E'(G)$ <u>des points de</u> X <u>en lesquels le germe de</u> G <u>a le même type analytique qu'en</u> x <u>est un sous-espace analytique lisse de</u> X <u>et</u> $\dim_x E'(G) = \dim_s S - \dim_{\mathbb{C}} T^1_{G^{-1}(s),x}$.

Le schéma de la démonstration est le suivant : (les ingrédients se trouvent dans les articles cités de Mather) le type analytique d'un morphisme stable en un point est déterminé par son jet à un ordre fini (borné sur X) en ce point. Ceci montre qu'il existe un entier l tel que $E' = j^l(G)^{-1}(V_x)$ où $V_x \subset J^l(X,S)$ est une certaine orbite, sans variété lisse de $J^l(X,S)$, à laquelle $J^l(G)$ est transverse (puisque G est stable). Ceci montre que E' est un sous-espace lisse de X . Comme de plus le symbole de Boardman est un invariant du type analytique de G , E' doit être contenu dans la variété de symbole de Boardman de G passant par x , ce qui montre que $G|E'$ est une immersion. Ceci permet de calculer $\dim_x E'$ en appliquant ([11], p. 247 (*)).

Il nous reste à remarquer que le type analytique d'un morphisme stable en un point est uniquement déterminé par le type analytique de sa fibre, et donc qu'en vertu de la proposition 2.2, la démonstration du théorème 2.1 se ramène à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.3.- Soit $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ un morphisme stable, déformation semi-universelle de $(G^{-1}(s),x)$ (cf. [1] et [17]). Alors $E(G) = \{x\}$.

En effet, si $E(G) = \{x\}$, il est clair que toute petite déformation à type analytique constant de $(G^{-1}(s),x)$ sera analytiquement triviale, puisque par la semi-universalité de G , la base de notre déformation devra aller toute entière sur $\{s\}$. Réciproquement, le théorème 2.1 nous dit que la déformation $G^{-1}(G(E(G)) \longrightarrow G(E(G))$, étant à type analytique constant, doit être triviale, ce qui entraîne que l'on doit avoir $G(E(G)) = \{s\}$ par la semi-universalité, d'où certainement $E(G) = \{x\}$.

Mais si G est déformation semi-universelle de sa fibre, $\dim_s S = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{G^{-1}(s),x}$, donc $\dim_x E(G) = 0$ Q.E.D.

Remarque 1.- Le raisonnement précédent s'applique à toute singularité isolée d'intersection complète.

Remarque 2.- On peut trouver des déformations "à dimension de $T^1_{X_t,x_t}$ constant" qui ne sont pas analytiquement triviales. Par exemple la famille des quatre droites à birapport variable $x^4 + y^4 + tx^2y^2 = 0$.

Remarque 3.- La proposition 2.3 nous dit que la déformation semi-universelle de (X_o,x_o) est bien l'objet dans lequel on doit chercher l'espace des modules locaux de (X_o,x_o) .

§ 3. Déformations équimultiples.

Nous avons deux raisons de nous intéresser à la multiplicité : d'une part l'équimultiplicité est une version (très) faible de l'équisingularité : en fait on a la

3.1. Conjecture (Zariski [22]). Soient (X_1,x_1) et (X_2,x_2) deux germes d'hypersurfaces ayant même type topologique. On a $\mathfrak{m}_{x_1}(X_1) = \mathfrak{m}_{x_2}(X_2)$.

3.2. <u>Remarque</u>.- La conjecture est démontrée si $\dim_{x_1} X_1 = \dim_{x_2} X_2 = 1$ (voir par exemple Zariski [19]).

D'autre part, Zariski a montré que l'équisingularité d'une famille de courbes planes (à base lisse) était équivalente à l'équimultiplicité de toutes les "familles infiniment voisines" i.e. obtenues par éclatements successifs des lieux singuliers (le lieu singulier de la famille est supposé isomorphe à la base par la projection) (cf. Zariski [19]).

3.3. Que faut-il entendre par déformation équimultiple : contrairement à ce qui se passe pour les déformations équisingulières (remarque 1.5) une même fibre d'une déformation peut contenir plusieurs points ayant même multiplicité que la fibre spéciale : considérons par exemple la famille de courbes définie par

$$f(x,y,t) = y^3 + (x-t)^2((x+t)^2y + (x-t)^3\ (x+t)^3 = 0$$

la fibre spéciale X_o est la courbe réduite d'équation $y^3 + x^4y + x^6 = 0$ qui a l'origine pour singularité de multiplicité 3. Mais pour $t \neq 0$, la fibre X_t a deux points singuliers donnés par $y = 0$, $x = \pm t$, tous deux de multiplicité 3 . On a envie de dire que la famille est équimultiple de deux façons différentes.

D'autre part, l'expérience enseigne que la bonne généralisation, au cas non hypersurface de la multiplicité, est la fonction de Samuel.

DEFINITION 3.4.- <u>Soit</u> X <u>un espace analytique</u>. <u>On appelle fonction de Samuel</u>

de X en un point $x \in X$ l'application $H^1_{X,x} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :
$H^1_{X,x}(\nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^{\nu+1}_{X,x}$.

3.5. Il existe un polynôme $P_{X,x}(T) \in \mathbb{Q}[T]$ de degré $d = \dim_x X$ tel que pour ν assez grand $H^1_{X,x}(\nu) = P_{X,x}(\nu)$.(Hilbert). Le coefficient du terme de plus haut degré T^d de ce polynôme peut s'écrire $\frac{\mathfrak{m}_x(X)}{d\,!}$ où $\mathfrak{m}_x(X) \in \mathbb{N}$. $\mathfrak{m}_x(X)$ est (par définition) la multiplicité de X en x (Samuel).

3.6. Si (X,x) est un germe d'hypersurface de $\mathbb{C}^{n+1}$ défini par $f(Z_o,\dots,Z_n) = 0$, $H^1_{X,x}$ est complètement déterminée par $\dim_x X = n$ et $\mathfrak{m}_x(X)$. Dans ce cas $\mathfrak{m}_x(X)$ n'est autre que le degré du polynôme homogène de plus bas degré apparaissant dans le développement en série de f. Ceci est bien facile à voir : écrivons $f(Z_o,\dots,Z_n) = f_{\mathfrak{m}_o}(Z_o,\dots,Z_n) + \dots$ où $f_{\mathfrak{m}_o}(Z_o,\dots,Z_n)$ est un polynôme homogène de degré $\mathfrak{m}_o = \mathfrak{m}_x(X)$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow (f_{\mathfrak{m}_o}(T_o,\dots,T_m)) \longrightarrow \mathbb{C}[T_o,\dots,T_n] \longrightarrow gr_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow (0)$$

de $\mathbb{C}[T_o,\dots,T_m]$ -modules gradués. Ceci permet de calculer facilement $\dim_{\mathbb{C}} gr^{\mu}_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x}$ en fonction de $\mathfrak{m}_o$ et n et le résultat vient de ce que

$$H^1_{X,x}(\nu) = \sum_{\mu=o}^{\nu} \dim_{\mathbb{C}} gr^{\mu}_{\mathfrak{m}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \quad .$$

Ce qui précède motive la

DEFINITION 3.7.- <u>Une déformation</u> $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ <u>de</u> (X_o,x_o) <u>est dite équimultiple, si pour tout représentant suffisamment petit de</u> G , <u>il existe une section</u> σ <u>de</u> G <u>telle que l'on ait, pour tout</u> $s' \in S$,

$$H^1_{X_{s'},\sigma(s')} = H^1_{X_o,x_o}$$

et le premier résultat de ce paragraphe est le

THEOREME 3.8.- Si (X_o,x_o) est un germe d'espace analytique à singularité isolée, il existe une déformation équimultiple semi-universelle de (X_o,x_o), c'est-à-dire une déformation équimultiple

$$G_M : (X_M,x_M) \underset{\longrightarrow}{\overset{\Sigma_M}{\longleftarrow}} (S_M,s_M)$$

telle que toute autre déformation équimultiple s'en déduise par changement de base unique au second ordre près.

La démonstration repose sur le résultat suivant :

THEOREME 3.8. bis (Lejeune-Teissier cf. [7] ou [8]).- Soit $G : X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques. Il existe une partition localement finie $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ de X en sous-espaces analytiques et une famille $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

a) $x \in X_\alpha$ si et seulement si (posant $s = (x)$), $H^1_{X_s,x} = H_\alpha$.

b) Pour tout $\alpha \in A$, $\bar{X}_\alpha$ et $\bar{X}_\alpha - X_\alpha$ sont des sous-espaces analytiques fermés de X .

La partition $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ s'appelle, par abus de langage, la partition de X en strates de Samuel relatives. Cette partition ne vérifie pas la propriété de frontière en général (i.e. il est faux que $X_\beta \cap \bar{X}_\alpha \neq \emptyset \Rightarrow X_\beta \subset \bar{X}_\alpha$) mais on a le résultat suivant :

Si $x \in X_\alpha$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X en tout point x' duquel on a (posant $s = G(x)$, $s' = G(x')$) $H^1_{X_{s'},x'} \leqslant H^1_{X_s,x}$ (pour l'ordre total).

3.9. Remarque.- Il résulte du théorème 3.8 et de 3.5 que l'on peut, si l'on y tient absolument, parler de la stratification par l'équimultiplicité relative : une strate d'équimultiplicité relative sera en effet une réunion localement finie de strates de Samuel relatives.

Pour achever la démonstration du théorème 3.9., il suffit d'appliquer le théorème 3.8 à la déformation semi-universelle de (X_o,x_o). Si nous notons $(X_U,x_U) \xrightarrow{G_U} (S_U,s_U)$ celle-ci, notons S_M l'unique strate de Samuel relative de G_U contenant x et faisons le changement de base par le morphisme composé de G_U et de l'inclusion de S_M dans X_o :

$$\begin{tikzcd}
(X_M,x_U) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "G_M"'] & (X_U,x_U) \arrow[d, "G_U"] \\
(S_M,x_U) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\Sigma_M"'] \arrow[ur] & (S_U,s_U)
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons ainsi une section Σ_M, et il est immédiat de constater que (G_M, Σ_M) est la déformation équimultiple semi-universelle cherchée.

3.10. Ce qui précède est bien formel ! En particulier, on n'obtient aucun renseignement sur la lissité de S_M. Mais on le

THEOREME 3.11.- *Si* (X_o,x_o) *est un germe d'hypersurface analytique à singularité isolée,* S_M *est lisse, et sa dimension se calcule par une formule universelle à partir de* $\dim_{x_o} X_o$, $\mathfrak{m}_{x_o}(X_o)$ *et* $\tau_{x_o}(X_o) = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{X_o,x_o}$.

3.12. *Remarque*.- La première partie du théorème 3.11 a été établie par J. Wahl (Berkeley) dans sa thèse [18] pour les courbes planes.

3.13. *Démonstration*.- La démonstration utilise la théorie du symbole de Boardman ([2], [9], [1], [12]) dont nous rappelons certains points (en recopiant [14]) par souci d'être complet : soit I un idéal de $\mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}$, disons $I = (f_1,\dots,f_m)$. On note $\Delta^k I$ l'idéal $I + \Delta^{(k)} I$, où $\Delta^{(k)} I$ désigne l'idéal engendré par tous les $(n-k+1)\times(n-k+1)$ mineurs de la matrice $\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\right)_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ o\leqslant i\leqslant n}}$. On pose de plus $\Delta^k I = I$ si $k \leqslant \operatorname{Sup}(0, n-m)$, et $\Delta^k I = \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}$ si $k > n$. Il est facile de vérifier que $\Delta^k I$ ne dépend que de k et de I, et que $k \leqslant k'$ entraîne $\Delta^k I \subset \Delta^{k'} I$. On note : $A = \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}/I$ et $\nabla^k A = \mathbb{C}\{Z_1,\dots,Z_n\}/\Delta^k I$ obtenant ainsi une suite finie de surjections :

$$A \longrightarrow \nabla' A \longrightarrow \nabla^2 A \;\dots\dots\dots\; \nabla^{k_1} A \longrightarrow (0)$$

où k_1 est le plus grand entier k $(\leqslant n)$ tel que $\Delta^{k_o} I \neq \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}$. On peut appliquer le même processus à l'un quelconque des $\nabla^j A$ et, pour toute suite $(j_1,\dots,j_s)$ d'entiers, obtenir un quotient jacobien de A : $\nabla^{j_s}\dots\nabla^{j_1}A$. En fait, bien souvent $\nabla^{j_s}\dots\nabla^{j_1}A$ sera (0). Mais ce qui nous intéresse est le résultat suivant :

THEOREME 3.14. (Boardman).- Si $G : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ est un morphisme "transverse à la stratification de Boardman de l'espace $J(X,S)$" (en particulier un représentant suffisamment petit d'un germe de morphisme stable), si pour tout $x' \in X$, $A(x')$ désigne l'algèbre analytique correspondant au germe $(G^{-1}(G(x')),x')$, pour toute suite d'entiers $(j_1,\dots,j_s)$, l'ensemble $\Sigma^{j_1,\dots,j_s}(G)$ des points $x' \in X'$ tels que $\nabla^{j_s}\dots\nabla^{j_1}A(x') \neq (0)$ est un sous-espace analytique lisse de X, et $\nabla^{j_s}\dots\nabla^{j_1}A(x')$ est l'algèbre analytique correspondant à $(G^{-1}(G(x'))\cap\Sigma^{j_1,\dots,j_s}(G),\, x')$.

3.15. Or, on peut remarquer que si $I = f(Z_o,\dots,Z_n).\mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}$ on a :

$$\underbrace{\nabla^{n+1} \cdots \nabla^{n+1}}_{m-1} \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}/(f) \neq 0$$

si et seulement si l'ordre de $f(Z_o,\dots,Z_n)$ à l'origine est au moins égal à m.

En effet, en appliquant les définitions, on voit que

$\underbrace{\Delta^{n+1} \cdots \Delta^{n+1}}_{m-1}(f)$ est l'idéal de $\mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}$ engendré par

f et les $\dfrac{\partial^{\alpha} f}{\partial Z_o^{\alpha_o} \cdots \partial Z^{\alpha_n}}$ pour $|\alpha| \leqslant n-1$,

et que

$$\underbrace{\nabla^{n+1} \cdots \nabla^{n+1}}_{m-1} \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}/(f) = \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}\Big/\underbrace{\Delta^{n+1} \cdots \Delta^{n+1}}_{m-1}(f) \; :$$

Pour achever la démonstration du théorème 3.11, on applique ce qui précède à la déformation semi-universelle $G_U : (X_U, x_U) \longrightarrow (S_U, s_U)$ du germe d'hypersurface à singularité isolée (X_o, x_o). On obtient immédiatement comme corollaire de 3.14 et 3.15 :

COROLLAIRE 3.16.- <u>L'ensemble</u> $X_U(M)$ <u>des points de</u> X_U <u>qui sont de multiplicité supérieure ou égale à un entier</u> m <u>dans leur fibre est</u>

$$\Sigma^{\overbrace{n+1,\dots,n+1}^{m-1}}(G_U)$$

<u>qui est un sous-espace analytique lisse de</u> X_U.

3.17. De plus, Boardman donne une formule pour la codimension de ses strates, qui, dans notre cas particulier, donne :

$$\dim X_U^{(m)} = n + \dim_{s_U} S_U - \mu(n+1\; ;\; m-1)$$

où $\mu(n+1\; ;\; m-1)$ désigne le nombre de suites d'entiers $(j_1 \geqslant j_2 \geqslant \cdots \geqslant j_{m-1})$ telles que $1 \leqslant j_1 \leqslant n+1$.

3.18. Il résulte de la semi-continuité de la multiplicité relative (3.8) que si (X_o, x_o) est un germe d'hypersurface de multiplicité $\mathfrak{m}_o = \mathfrak{m}_{x_o}(X_o)$, la base de la déformation semi-universelle équimultiple est $S_M = X_U^{(\mathfrak{m}_o)^o}$ qui est donc lisse, et de dimension donnée par :

3.19. $$\dim S_M = \dim_{x_o} X_o + \tau_{x_o}(X_o) - \mu(\dim_{x_o} X_o + 1 \,;\, \mathfrak{m}_o - 1) .$$

Mais d'autre part, d'après la remarque faite par Morin [12] du fait que "l'ensemble des symboles est égal à l'ensemble des multiindices" on peut calculer facilement $\mu(d\,;\,m) = \binom{d+m}{m} - 1$. Ainsi, si nous posons

$$d_o = \dim_{x_o} X_o + 1 = \operatorname{imdim}_{x_o} X_o ,$$

la formule "universelle" cherchée est

3.20. $$\dim S_M = \tau_{x_o}(X_o) + d_o - \begin{pmatrix} d_o + \mathfrak{m}_o - 1 \\ \mathfrak{m}_o - 1 \end{pmatrix} .$$

3.21. Exemples.- Si l'on regarde les singularités de courbes planes données par $x^{\mathfrak{m}_o} + y^{\mathfrak{m}_o} = 1$, on trouve $\dim S_M = \dfrac{(\mathfrak{m}_o - 2)(\mathfrak{m}_o - 3)}{2}$, résultat qui est facile à vérifier directement (il s'agit de $\mathfrak{m}_o$ points distincts de $\mathbb{P}^1$).

3.22. Remarque.- Si X_o est une hypersurface de multiplicité $\mathfrak{m}_o$, d'équation $f(Z_o, \dots, Z_n) = 0$, tous les monômes de $\mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\}$ de degré au plus $\mathfrak{m}_o - 2$ sont certainement linéairement indépendants modulo $(f, \frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n})$. Comparer à 3.20.

3.23. Remarque.- Revenons au cas général. On peut démontrer (voir [7]) que X_M est normalement plat le long de l'image de la section Σ_M. C'est-à-dire que le cône normal $C_{X_M, \Sigma_M(S_M)}$ est plat sur $\Sigma_M(S_M)$.

REFERENCES

[1] P. BERTHELOT - Exposés sur les travaux de Pham, Séminaire Douady-Verdier à l'E.N.S., Publ. Secr. Math. E.N.S. 1972 (à paraître).

[2] J. M. BOARDMAN - Singularities of differentiable maps, Publ. Math. I.H.E.S., n° 33 (1967), pp. 21-57.

[3] FISCHER W. und GRAUERT H.- Lokal- riviale Familien kompacter komplexer mannigfaltigheiten, Nach. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. K I, II, 89-94 (1965).

[4] H. HIRONAKA - Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint, Warwick, England, 1971.

[5] LE DUNG TRANG - Thèse Paris VII, Déc. 1971.

[6] LE DUNG TRANG - C.P. RAMANUJAM - B. TEISSIER - Sur un critère d'équisingularité (à paraître).

[7] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint Warwick (1971) et Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques.

[8] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques, Paris 1972.

[9] J.N. MATHER - On Thom-Boardman singularities, Preprint 1971.

[10] J.N. MATHER - Stability of C^{∞} mappings III, Publ. I.H.E.S., n° 35 (1968), pp. 127 - 156.

[11] J.N. MATHER - Stability of C^{∞} mappings IV, Publ. I.H.E.S., n° 37, (1969), pp. 223-248.

[12] B. MORIN - Thèse Orsay, Juin 1972.

[13] F. PHAM - Remarque sur l'équisingularité universelle, Preprint, Univ. de Nice, 1970.

[14] F. PHAM - Classification des singularités, Preprint, Univ. de Nice, 1971.

[15] SEIDENBERG - Report on analytic products, C.I.MME. (1969), Editioni Cremonese, Roma 1970.

[16] SEIDENBERG - "Analytic products", Amer. Journ. of Math. 1969.

[17] G.N. TJURINA - Locally semiuniversal flat deformation, Transl. Amer. Math. Soc., 1971.

[18] Jonathan WAHL - Deformation of branched covers and equisingularity, Thesis Havard, 1971.

[19] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity I, Amer. Journ. Math., 87, (1965), pp. 507-536.

[20] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity II, Amer. Journ. Math., 87, (1965), pp. 972-1006.

[21] Oscar ZARISKI - Studies in equisingularity III, Amer. Journ. Math., 90 (1968), pp. 961-1023.

[22] Oscar ZARISKI - Some open question in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc., July 1971, 77, n° 4, pp. 481-491

DEFORMATIONS A TYPE TOPOLOGIQUE CONSTANT II

par Bernard TEISSIER

§ 4. Introduction.

Nous allons maintenant exhiber dans le lieu discriminant de la déformation semi-universelle d'une hypersurface à singularité isolée, la base de la déformation semi-universelle à type topologique constant de ladite hypersurface. Après ce qui a été dit au paragraphe 2 de l'exposé précédent, cette base mérite le nom "d'espace des modules local" pour le type topologique.

§ 5. Rappels sur l'ouverture de la versalité.

Rappelons (cf. [19], [21]) que si (X_o, x_o) est un germe d'espace analytique à singularité isolée, à toute déformation $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ de (X_o, x_o) est associé un morphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules

$$\theta_F : \Omega_S^{1\vee} \longrightarrow F_* T^1_{X/S}$$

où $F_* T^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent puisque le rapport de $T^1_{X/S}$ est le lieu critique de F , fini sur S d'après le théorème de préparation de Weierstrass parce que (X_o, x_o) est à singularité isolée. $T^1_{X/S}$ étant cohérent, il en est de même de $F_* T^1_{X/S}$ d'après le théorème des images directes de Grauert. De plus si $T^2_{X_o,x_o} = (0)$ (cf. [19], [21], F est une déformation verselle (resp. semi-universelle) pour (X_o, x_o) si et seulement si $\theta_F(S) : E_{S,s} \longrightarrow T^1_{X_o,x_o}$ est surjective (resp. un isomorphisme). Si nous supposons F semi-universelle, il résulte de Nakayama que $\theta_{F,s} : \Omega^{\vee}_{S,s} \longrightarrow (F_* T^1_{X/S})_s$ sera surjective et donc que pour tout $s' \in S$ (i.e. d'un représentant suffisamment petit de (S,s) ...), $\theta_{G,s'}$ sera surjective.

C'est ainsi que l'on démontre l'ouverture de la versalité dans le cas où $T^2_{X_o,x_o} = (0)$ (qui est le seul où l'on sache le faire pour le moment cf. [2]). Mais remarquons que nous obtenons un résultat plus précis : soit $s' \in S'$ et supposons que la fibre $X_{s'}$ ait k points singuliers $x_i(s')$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Alors $(F_* T^1_{X/S})(s') = \bigoplus_{i=o}^{k} T^1_{X_{s'},x_i(s')}$ et cela nous donne une suite exacte :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \Omega^1_{S,s}(s') \longrightarrow \bigoplus_{i=o}^{k} T^1_{X_{s'},x_i(s')} \longrightarrow 0$$

où, si l'on a posé $\tau_o = \dim_{\mathbb{C}} T^1_{X_o,x_o}$, $\tau_i = \dim_{\mathbb{C}} T_{X_{s'},x_i(s')}$, on a $\dim T = \tau_o - \sum\limits_{i=1} \tau_i$ (rappelons que F est supposée semi-universelle en x) et ceci nous donne une décomposition de S au voisinage de s', c'est-à-dire la

5.1. Remarque.- Si $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ est semi-universelle, et si pour $s' \in S$, la fibre $X_{s'}$ a k points singuliers, on a au voisinage de s' une décomposition de s' en produit (non canonique) $S = S_1 \times \ldots \times S_k \times \mathbb{C}^{\tau - \Sigma\tau_i}$ qui a la propriété qu'au voisinage du point singulier $x_i(s') \in X_{s'}$, F est isomorphe au morphisme :

$$S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times X_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_k \times \mathbb{C}^{\tau_o - \sum_{i=1}^{k} \tau_i} \longrightarrow S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_i \times S_{i+1} \times \ldots \times S_{i-1} \times \mathbb{C}^{\tau_o - \sum_{i=1}^{k} \tau_i}$$

qui est

$$\mathrm{id}_{S_1} \times \ldots \times \mathrm{id}_{S_{i-1}} \times F_i \times \mathrm{id}_{S_{i+1}} \times \ldots \times \mathrm{id}_{S_k} \times \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\, \tau - \Sigma\tau_i$$

où $F_i : X_i \longrightarrow S_i$ est la déformation semi-universelle de $(X_{s'}, x_i(s'))$ $((S_i,s) \simeq (\mathbb{C}^{\tau_i},0))$.

5.2. Soit $F_U : (X_U, x_U) \longrightarrow (S_U, s_U)$ déformation semi-universelle d'une hypersurface à singularité isolée (X_o, x_o). Alors le lieu critique (ou lieu de non-lissité) C de F est un sous-espace analytique lisse de X, et $\dim_x C = \tau_o - 1$ $(= \dim_s S - 1)$. En effet, avec les notations de l'exposé précédent (3.16) $C = X_U^{(2)}$. L'image directe est, d'après Grauert, un sous-espace analytique de S. C'est à la géométrie de D que nous allons nous intéresser.

5.3. D est une hypersurface réduite de S, analytiquement irréductible en S. En effet, D est sans composantes immérgées (puisque C est lisse et $F_U|C$ étant fini, $R^2(F_U|C)_* \mathcal{O}_C = (0)$ pour $i \geqslant 1$) et donc au pire $D = l . D_{red}$ $(l \in \mathbb{N})$ où D_{red} est (par raison de dimension) une hypersurface réduite de S. Nous allons montrer que $l = 1$. Pour cela, considérons la strate de Boardman $\Sigma^{n+1,1}(F_U)$ où $n = \dim_{x_o} X_o$, et arrêtons-nous un moment pour écrire explicitement F_U. Soit $f(Z_o, \dots, Z_n) = 0$ une équation pour (X_o, x_o) dans $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Choisissons dans $\mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\}$ des monômes pour (simplifier) $s_o = -1$, $s_1(\underline{Z}), \dots, s_m(\underline{Z})$ (où $m = \tau_o - 1$) dont les images modulo $(f(\underline{Z}), \frac{\partial f}{\partial Z_o}(\underline{Z}), \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}(\underline{Z}))$ forment une base de

$$\mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\} \Big/ (f(\underline{Z}), \frac{\partial f}{\partial Z_o}(\underline{Z}), \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}(\underline{Z})) \cong T^1_{X_o, x_o}$$

. On peut décrire F_U comme le morphisme

$$F_U : (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, 0)$$

où si $Z_o, \dots, Z_n$ sont les coordonnées sur $\mathbb{C}^m$, et t_o la coordonnée sur $\mathbb{C}$.

5.3.1. $$\begin{cases} t_o \circ F_U = f(Z_o, \dots, Z_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i s_i(Z_o, \dots, Z_n) \\ t_i \circ F_U = t_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

Posons $f(\underline{Z},\underline{t}) = f(Z_o,\ldots,Z_n) + \sum_{i=1}^{m} t_i s_i(Z_o,\ldots,Z_n)$ d'après 3.14 de l'exposé I, $\Sigma^{n+1,1}(F_U)$ est l'ensemble des points de C où $\det(\frac{\partial^2 f(\underline{Z},\underline{t})}{\partial Z_i\, \partial Z_j}) = 0$ c'est-à-dire l'ensemble des points de C où le hessien en $\underline{Z}$ de $f(\underline{Z},t)$ est nul. Ou encore, grâce à Morse, l'ensemble des points de C qui ne sont pas des points singuliers quadratiques ordinaires de leur fibre. Mais, d'après les formules de codimension de Boardman, $\dim \Sigma^{n+1,1}(F_U) < \dim C$ (on peut bien sûr le voir facilement à la main, mais nous devons essayer de préparer les généralisations). Ainsi, à l'extérieur d'un sous-espace analytique strict de C, les points de C sont des points quadratiques ordinaires de leur fibre. Mais d'après 5.1, pour nous assurer que $l = 1$, il suffit de le vérifier pour la déformation semi-universelle d'un point quadratique ordinaire, i.e. d'une singularité de la forme $\sum_{i=o}^{n} Z_i^2 = 0$, et dans ce cas c'est évident.

L'irréductibilité de D en s vient de ce que D est l'image de C, qui est lisse, donc irréductible.

5.4. Il existe un sous-espace analytique fermé S de D, tel que $D - S$ soit dense dans D, et que F_U induise un isomorphisme $C - n^{-1}(S) \xrightarrow{\sim} D - S$ (on a noté $n = F_U|C$). Ceci résulte de 5.1 et 5.3. En effet, D étant réduite est lisse à l'extérieur de son lieu singulier S. Mais si au-dessus d'un point de $D - S$ il y avait plus d'un point de C, D ne saurait être lisse en ce point, en vertu de 5.1. (*)

5.5. $n : C \longrightarrow D$ est la normalisation de D. En effet, d'après 5.4 n est biméromorphe. D'autre part, n est fini et C étant lisse est normal. Cela suffit.

5.6. Remarque.- Le fait que le lieu critique C soit lisse est bien particulier au cas des hypersurfaces : considérons par exemple la déformation semi-universelle de la courbe de $\mathbb{C}^3(x,y,z)$ définie par $x^2 - y^2z = y^2 - z^3 = 0$. C'est le morphisme stable $F_U : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^9 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^9$ (coordonnées x,y,z sur $\mathbb{C}^3$, t_o, v_o sur $\mathbb{C}^2$, t_1, $t_2,\ldots,t_5$, $u_1,\ldots,u_4$ sur $\mathbb{C}^q$) donné par :

$$t_o \circ F_U = x^2 - y^2z + t_1z + t_2z^2 + t_3y + t_4yz + t_syz^2$$
$$u_o \circ F_U = y^2 - z^3 + u_1z + u_2z^2 + u_3x + u_4x^2$$
$$t_i \circ F_U = t_i \quad , \qquad 1 \leqslant i \leqslant 5$$
$$u_j \circ F_U = U_j \quad , \qquad 1 \leqslant j \leqslant 4$$

et il est facile de voir que le lieu critique n'est pas lisse : il a pour équations :

$$0 = 4xy - t_3u_3 + 3\text{e ordre}$$
$$0 = 2xu_1 - t_1u_3 + 3\text{e ordre}$$
$$0 = t_3u_1 - 2t_1y + 3\text{e ordre}.$$

Mais en général, C provenant de variétés déterminantielles dans l'espaces de jets, dans le cas des déformations semi-universelles de singularités isolées d'intersection complète, C sera Cohen-Macaulay, normal, et normalisation de son image.

5.7. La multiplicité de D en s est

$$\mathfrak{m}_s(D) = \mu_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{Z_o,\ldots,Z_n\} \Big/ \frac{\partial f}{\partial Z_o},\ldots,\frac{\partial f}{\partial Z_n} \quad .$$

Démonstration (Pham [16]).

On applique la formule de projection qui nous dit exactement que $\mathfrak{m}_S(D)$ est la multiplicité de l'idéal $(f, \frac{\partial f}{\partial Z_o},\ldots,\frac{\partial f}{\partial Z_n})$ dans $\mathbb{C}\{Z_o,\ldots,Z_n\}$. Mais l'on dispose d'un critère valuatif de dépendance intégrale (voir par exemple [12] ou [17]) qui nous dit que pour vérifier que f est entier sur l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}\right)$, il suffit de vérifier que pour tout morphisme $h : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ où $\mathbb{D}$ est le disque unité, tel que $h(0) = 0$, on a $\nu_o(f \circ h) \geqslant \min(\nu_o(\frac{\partial f}{\partial Z_i} \circ h))$, or ce dernier point est clair ; si t est une coordonnée locale de $\mathbb{D}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ h) = \Sigma\ \frac{\partial f}{\partial Z_i} \circ h)\ \frac{(Z_i \circ h)}{\partial t}$$

d'où

$$\nu_o(f \circ h) - 1 \geqslant \min(\nu_o\ (\frac{\partial h}{\partial Z_i} \circ h) - 1\ .$$

Ainsi, l'idéal $(f, \frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n})$ a même fermeture intégrale dans $\mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\}$ que l'idéal $(\frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n})$. Un théorème de Samuel nous dit qu'alors ces deux idéaux ont même multiplicité (ceci résulte de la caractérisation asymptotique de la relation de dépendance intégrale, que l'on peut trouver par exemple dans [12]), et un autre théorème de Samuel nous dit que puisque $\left(\frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}\right)$ est une intersection complète dans $\mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\}$, sa multiplicité est exactement $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}\right)$. Q.E.D.

5.8. <u>Remarque</u>.- Le résultat 5.7 se visualise ainsi : Morse nous apprend qu'une petite déformation "générique" d'une application $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ aura $\mu_o = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{Z_o, \dots, Z_n\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial Z_o}, \dots, \frac{\partial f}{\partial Z_n}\right)$ points critiques quadratiques à valeurs critiques distinctes cf. [13]. Une telle déformation revient à restreindre F_U au-dessus de l'image réciproque d'une droite "générique" de S (en passant par l'origine). Les valeurs critiques de l'application seront les points d'intersection de cette droite avec D. Or, une droite "générique" de S va couper D en $m_S(D)$ points lisses de D, et nous avons vu en 5.3 et 5.4 que la fibre de F_U au-dessus d'un point lisse de D avait une (et une seule) singularité quadratique. D'où $m_S(D) = \mu_o$.

5.9. Remarque.- On trouve dans Milnor [13][(**)] le fait que μ_o est un invariant du type topologique de l'hypersurface. μ_o est le "nombre de cycles évanouissants" c'est-à-dire que si nous prenons une boule ouverte B_ε de rayon suffisamment petit de centre l'origine dans $\mathbb{C}^{m+1}$, et si nous désignons par X_t l'intersection de l'hypersurface définie par $f(Z_o,\dots,Z_n) = t$, pour t suffisamment petit et non nul, avec B_ε , X_t est non singulière, et l'on a $\dim_{\mathbb{C}} H_n(X_t) = \mu_o$ (cf. [9] et [13]).

5.10. Prenons sur $S \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ les coordonnées $(t_o, t_1,\dots,t_m)$ (cf. 2.3) et posons $T_o^{\mu_o} = iu_o(t_o)$. Le cône tangent à D en 0 est l'hyperplan multiple défini par $T_o^{\mu_o} = 0$. Dans $gr_o \mathbb{C}\{t_o, t_1,\dots,t_m\} = \mathbb{C}[T_o, T_1,\dots,T_m]$.

En effet, $|C_{D,0}|$, (ensemble sous-jacent à $C_{D,0}$) , doit être contenu dans l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C . Mais, si nous prenons un point $c' \in C$ notant $s' = n(c)$, si s' a pour coordonnées $\bar{t}_o, \bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n$, l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C , en c , est l'hyperplan d'équation $T_o - \bar{t}_o = \sum_{i=1}^{m} s_i(\bar{Z}_o,\dots,\bar{Z}_n)(T_i - \bar{t}_i)$ (c' a pour coordonnées $\bar{Z}_o,\dots,\bar{Z}_n$, $\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_n$) . Or, $s_i(0,\dots,0) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Puisque $C_{D,0}$ est de dimension m , on a certainement que $|C_{D,0}|$ est l'hyperplan $T_o = 0$. Mais $C_{D,0}$ doit être une hypersurface de $T_{S,S}$ de multiplicité μ_o . Q.E.D.

COROLLAIRE 5.11.- En un point quelconque $s' \in D$, $C_{D,s'}$ est la réunion de k hyperplans, où k est le nombre d'éléments de $n^{-1}(s')$, chaque hyperplan correspond à un point $x_i(s') \in n^{-1}(s')$, et est compté avec la multiplicité $\mu_i = \mu_{x_i(s')}(X_{s'})$ - (on note $\mu_o = \mu_{x_o}(X_o)$) . Il suffit d'appliquer la remarque 5.1.

5.12. Signalons également qu'on lit sur la formule explicite pour l'image de l'application tangente à F_U restreinte à C , donnée en .10, que pour $s' \in D$, $C_{D,s'}$ est comme réunion d'hyperplans, l'ensemble des positions limites des cônes tangents aux points de D voisins de s' . En particulier, $|C_{D,s'}|$ est l'ensemble des positions limites des hyperplans tangents à D en des points lisses de D voisins de s' . Nous laissons le lecteur donner une formulation précise de ce fait, que nous n'utiliserons pas ici.

DEFINITION (Hironaka) 5.13.- <u>Soit</u> C <u>un cône algébrique de</u> $\mathbb{C}^{m+1}$. <u>On appelle espace tangent strict, ou faîte de</u> C , <u>le sous-espace vectoriel de</u> C : $T_{C,O} = \{v \in \mathbb{C}^{m+1} / C + v = C\}$. (Remarquer que ceci veut dire que la translation par v induit un automorphisme de C comme sous-espace de $\mathbb{C}^{m+1}$, i.e. avec tous ses nilpotents, composantes immergées, etc...).

DEFINITION 5.14.- <u>Soit</u> X <u>un espace analytique</u>. <u>On appelle espace tangent strict de</u> X <u>ou</u> $x \in X$ <u>le faîte</u> $T_{X,x}$ <u>de</u> $C_{X,x}$. ($T_{X,x} \subset E_{X,x}$, espace tangent de Zariski à X en x et on a égalité si et seulement si X est lisse en x).

5.15. <u>Remarque</u>.- Soit $s' \in D$. Soit k le nombre d'éléments de $n^{-1}(s')$. On a $\dim T_{D,S'} = m + 1 - k$.

Ceci résulte immédiatement de 5.11, puisqu'il est clair que le faîte d'une réunion de k hyperplans, même multiples, est leur intersection.

5.16. <u>Remarque</u>.- Soit $s' \in D$. Soient $x_i(s')$, $1 \leq i \leq k$ les points de $n^{-1}(s')$. On a l'égalité

$$m_{s'}(D) = \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) .$$

Ceci résulte immédiatement de 5.1 et 5.7.

§ 6. Le nombre μ de Milnor et le type topologique.

Nous avons dit en 5.9 que $\mu_{x_o}(X_o)$ était un **invariant** du type topologique de la singularité isolée d'hypersurface (X_o, x_o). Mais bien mieux, on a le résultat suivant, qui fut conjecturé par Hironaka :

THEOREME (Hironaka, Lê Dung Trang, C.P. Ramanujam) voir [9] et [10]).- <u>Soit</u> $F : (X,s) \longrightarrow (S,s)$ <u>un représentant suffisamment petit d'un germe de déformation d'hypersurface à singularité isolée</u> (X_o, x_o), <u>muni d'une section</u> $\Sigma : (S,s) \longrightarrow (X,x)$ <u>telle que</u> $X - \Sigma(S)$ <u>soit lisse sur</u> S. <u>On suppose que pour tout</u> $s' \in S$, $\mu_{\Sigma(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o)$. <u>Alors la déformation</u> F <u>est à type topologique constant</u>.

6.2. <u>Remarque</u>.- Les démonstrations connues sont topologiques et utilisent la lissité de la base S. On se ramène cependant au cas où S est lisse par résolution locale des singularités de $(S,s)^{(***)}$ ([7]) puisque si les fibres après un changement de base résolvant (S,s) ont toutes même type topologique, c'était sûrement vrai pour la famille donnée, grâce à la surjectivité des morphismes résolvants.

6.3. Remarque.- Si l'on prend une singularité isolée d'hypersurface, $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$, la section par un hyperplan générique de $\mathbb{C}^{n+1}$ fournit une nouvelle hypersurface à singularité isolée, dont le nombre de Milnor $\mu^{(1)}$ ne dépend pas de l'hyperplan générique choisi. On peut continuer et associer à (X_o,x_o) la suite

$$\mu^{(o)}_{x_o}(X_o) = \mu_{x_o}(X_o) \quad , \; \mu^{(1)}_{x_o}(X_o), \ldots, \mu^{(n)}_{x_o}(X_o)$$

où $\mu^{(j)}_{x_o}(X_o)$ est le nombre μ de Milnor de la section de (X_o, x_o) par un hyperplan de codimension j générique.

(Noter que $\mu^{(n)}_{x_o}(X_o) = \mathfrak{m}_{x_o}(X_o) - 1$). Le narrateur publiera prochainement [20] une démonstration algébrique du résultat suivant :

THEOREME 6.4.- Si dans la situation du théorème 6.1, on suppose S lisse, et que pour tout $s' \in S$, $\mu^{(j)}_{\Sigma(s')}(X_{s'}) = \mu^{(j)}_{x_o}(X_o)$, $0 \leqslant j \leqslant n$, alors $(X - \Sigma(S), \Sigma(S))$ satisfait les conditions a) et b) de Whitney en tout point de $\Sigma(S)$.

Ceci implique que $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ est topologiquement triviale d'après un théorème de Thom-Mather. Le fait qu'il suffise de vérifier l'égalité pour $j = 0$ correspond à une "vérité" concernant la géométrie des lieux discriminants de déformations semi-universelles, que l'on trouvera au même endroit.

6.5. Nous allons maintenant à la recherche, dans la base S_U, d'un représentant suffisamment petit de la déformation semi-universelle $F_U : (X_U,x_U) \rightarrow (S_U,s_U)$ de notre hypersurface (X_o,x_o), des points $s' \in S_U$ tels que la fibre $X_{s'}$ ait un point singulier $x(s')$ tel que $(X_{s'},x(s'))$ ait même type topologique

que (X_o,x_o) . Remarquons tout d'abord qu'un tel point $x(s')$ s'il existe, est le seul point singulier de $X_{s'}$.

En effet, la semi-continuité de la multiplicité (qui résulte de la semi-continuité de la fonction de Samuel, cf. n° 3.8 de l'exposé) , nous dit que pour tout $s' \in S_U$, $\mathfrak{M}_{s'}(D) \leqslant \mathfrak{M}_s(D)$. Mais d'après 5.9, le nombre μ de Milnor étant un invariant topologique, on doit avoir

$$\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o)$$

et d'après 5.1,

$$\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mathfrak{M}_{s'}(D) \quad .$$

D'après 5.16 (et le fait évident que $\mu_x(X) \geqslant 1$ si et seulement si x est un point singulier de X), si $X_{s'}$ avait un autre point singulier que $x(s')$, on aurait $\mathfrak{M}_{s'}(D) > \mu_o$ - contradiction.

6.6. Soit $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ une petite déformation à type topologique constant de (X_o,x_o) . Puisque le nombre μ de Milnor est un invariant du type topologique, il résulte de 5.1 que dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} (X,x) & \longrightarrow & (X_U,x_U) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_U} \\ (S,s) & \longrightarrow & (S_U,s_U) \end{array}$$

dû à la semi-universalité de F_U , l'image de S devra être contenue dans l'ensemble des points de multiplicité $\mu_o = \mu_{x_o}(X_o)$ de $D \subset S_U$. Mais ceci n'est autre que la strate de Samuel de S_U dans D (cf. 3.8 et 3.6 de l'exposé , que nous noterons D_o . D'après 3.8 de l'exposé, pour un représentant suffisamment petit de F_U , D_o sera un sous-espace analytique fermé de D, donc de S_U. Si nous savions démontrer qu'au-dessus d'un point $s' \in D_o$ il y a un seul point de C, disons $x(s')$, on devrait certainement avoir, d'après 5.16 $\mu_{x(s')}(X_{s'}) = \mu_o = \mu_{x_o}(X_o)$, et d'après le théorème 6.1 la déformation obtenue par changement de base

$$\begin{array}{ccc} (X_{D_o}, x_U) & \hookrightarrow & (X_U, x_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (D_o, s_U) & \hookrightarrow & (S_U, s_U) \end{array}$$

serait "à type topologique constant", et clairement semi-universelle pour cette propriété. Malheureusement, ce que nous savons jusqu'à maintenant ne permet pas de montrer cela. En effet, il se peut très bien a priori qu'étant donné $s' \in D_o$, la fibre $X_{s'}$ ait k points singuliers $x_i(s')$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) = \mu_o$. Cependant, nous allons montrer

PROPOSITION 6.7.- <u>L'ensemble</u> S_E <u>des points</u> $s' \in D_o$ <u>tels que</u> $X_{s'}$ <u>ait un seul point singulier est un sous-espace analytique fermé de</u> D_o.

<u>Démonstration.</u>

Remarquons que d'après 5.15 :

$$S_E = \{ s' \in D_o \,/\, \dim T_{D,s'} = m = \dim D \} .$$

On pourrait vérifier directement dans ce cas-ci, assez simple puisque D est une hypersurface, que cela fait de S_E un sous-espace analytique fermé de D_o. Nous allons cependant donner un argument valable pour n'importe quel espace analytique (remarquons en tous cas que l'argument ne marche que parce que nous avons déjà su nous restreindre à une strate de Samuel). Nous allons en effet énoncer la

PROPOSITION 6.8.-(Lejeune-Teissier [11] et [12]).- Soient X un espace analytique, et Y un sous-espace analytique fermé de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Y est contenu dans une strate de Samuel de X.

b) Il existe un cône relatif $\mathcal{C}_Y \xrightarrow{p} Y$ plat, tel que pour tout $y \in Y$ on ait $p^{-1}(y) = C_{X,y}$.

Ceci signifie que les cônes tangents à X aux différents points de Y se recollent en une famille plate sur Y, si et seulement si Y est contenu dans une strate de Samuel de X.

Nous pouvons combiner ceci avec le

LEMME 6.9. (voir [12]).- Soit C un cône algébrique. Le faîte de C est la strate de Samuel du sommet de C (en caractéristique zéro)

pour obtenir

PROPOSITION 6.10.- Soient X un espace analytique, et Y un sous-espace analytique de X contenu dans une strate de Samuel de X. Il existe un espace vectoriel relatif $T \xrightarrow{\tau} Y$ tel que pour tout $y \in Y$ on ait $\tau^{-1}(y) = T_{X,y}$, espace tangent strict à X ou y.

Démonstration.

T n'est autre que l'unique strate de Samuel relative de $p : \mathcal{C}_Y \longrightarrow Y$ de 6.8 qui contient le sommet (i.e. l'image de la section canonique "sommet") du cône relatif p (cf. [11]) . Mais par définition, la fibre d'une strate de Samuel relative est une strate de Samuel de la fibre, c'est-à-dire que $\tau^{-1}(y)$ est la strate de Samuel du sommet de $p^{-1}(y) = C_{X,y}$, c'est-à-dire $T_{X,y}$ d'après 6.10.

COROLLAIRE 6.11.- L'ensemble des points où $\dim T_{X,y} \geqslant l$, pour tout l , est un sous-espace analytique de Y . (Ceci n'est autre que la semi-continuité analytique supérieure de la dimension de la fibre d'un vectoriel relatif, cas particulier très simple de la semi-continuité de la fonction de Samuel, et par ailleurs bien connu).

6.12. Le corollaire 6.11 nous montre que, pour un représentant suffisamment petit $F_U : (X_U,x_U) \longrightarrow (S_U,s_U)$, l'ensemble S_E des points de la strate de Samuel D_o de S_U dans D au-dessus desquels il y a un seul point de C est un sous-espace analytique fermé de D_o , donc de D , donc de S_U .

Il résulte de ce que nous avons dit en 6.6 que nous avons démontré le

THEOREME 6.13.- Si nous regardons la déformation obtenue par changement de base par l'inclusion $S_E \hookrightarrow S_U$

$$\begin{array}{ccc}
(X_E,x_U) & \hookrightarrow & (X_U,x_U) \\
\Big\downarrow F_E & \square & \Big\downarrow F_U \\
(S_E,s_U) & \hookrightarrow & (S_U,s_U)
\end{array}$$

F_E est la déformation "à type topologique constant" semi-universelle de (X_o,x_o) .

6.14. Nous allons maintenant montrer l'existence d'une section analytique Σ_E de F_E qui pique l'unique point singulier de chaque fibre de F_E. Remarquons tout d'abord que cette question ne concerne que le morphisme $n : C \longrightarrow D$: il s'agit de construire $\Sigma_E : S_E \longrightarrow n^{-1}(S_E)$.

Ceci nous permet de supposer que notre germe d'hypersurface $(X_o,x_o) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ est de multiplicité au moins 3, c'est-à-dire que s'il est défini par $f(z_o,\dots,z_n) = 0$, on a $\tilde{f}(z_o,\dots,z_n) \in (z_o,\dots,z_n)^3$. En effet, un lemme classique ([14]) nous dit qu'au prix d'un changement de variables, on peut toujours supposer que

$$f(z_o,\dots,z_n) = \sum_{i=o}^{p} z_i^2 + \tilde{f}(z_{p+1},\dots,z_n)$$

où :

$$f(z_{p+1},\dots,z_n) \in (z_{p+1},\dots,z_n)^3 \quad .$$

Mais on constate immédiatement que le morphisme $n : C \longrightarrow D$ dans la déformation semi-universelle de l'hypersurface à singularité isolée déterminée par $\tilde{f}(z_{p+1},\dots,z_n) = 0$ est isomorphe à $\tilde{n} : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{D}$. Nous supposerons donc dorénavant que $f(z_o,\dots,z_n) \in (z_o,\dots,z_n)^3$. Or dans ce cas, $z_o,\dots,z_n$ sont linéairement indépendants modulo $(f, \frac{\partial f}{\partial z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n})$. Nous pouvons donc choisir, dans 5.3.1, $S_1 = z_o,\dots,S_{n+1} = z_n$.

D'autre part, il résulte de 5.7 et 5.10 que D est donné dans $(S_U,s_U) \approx (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m,0)$ par une équation de la forme

6.14.1. $$t_o^{\mu_o} + a_{\mu_o-1}(t_1,\dots,t_m)t_o^{\mu_o-1} + \dots + a_o(t_1,\dots,t_m) = 0$$

(grâce au théorème de préparation de Weierstrass)

avec $$a_{\mu_o-i}(t_1,\dots,t_m) \in (t_1,\dots,t_m)^{i+1} \quad .$$

Or si W est l'hypersurface lisse de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ définie par

$$t_o + \frac{1}{\mu_o} a_{\mu_o - 1}(t_1, \ldots, t_m) = 0$$

d'une part, $D_o \subset W$ (en effet, en tout point de D_o, la $\mu_o - 1$ -ième dérivée partielle de 6.14.1 par rapport à t_o doit être nulle) ; et d'autre part, on doit avoir, en tout point $s' \in D_o$

6.14.2. $\quad T_{D,s'} \subseteq T_{W,s'}$.

(ceci peut aussi se vo r par un calcul simple, mais c'est un cas particulier d'un résultat général : dans la terminologie de [6] ou [12], W a le "contact maximal" avec D ou S_U, donc, d'après le théorème de continuité du contact maximal, ([6] ou [12]) aussi en tout point de D_o, et le contact maximal implique l'inclusion 6.14.2.

Mais si nous prenons $s' \in S_E$, on a $\dim T_{D,s'} = m$, et donc $T_{D,s'} = T_{W,s'}$. Si maintenant, l'unique point de C au-dessus de s' a pour coordonnées $\bar{z}_o, \ldots, \bar{z}_n, \bar{t}_o, \ldots, \bar{t}_m$, et il résulte de 5.10 que $T_{D,s'} = |C_{D,s'}|$ est donné par

$$T_o - \bar{t}_o = \bar{z}_o(T_1 - \bar{t}_1) + \ldots + \bar{z}_n(T_{n+1}) + \sum_{n+1}^{m} s_i(z_o, \ldots, z_n)(T_i - t_i)$$

et d'autre part, $T_{W,s'}$ est donné par

$$T_o - t_o = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1} \frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial t_i}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m)(T_i - \bar{t}_i)$$

d'où les égalités

6.14.3. $\quad \bar{z}_i = \frac{1}{\mu} \frac{\partial a_{\mu-1}}{\partial t_{i+1}}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m) \quad , \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$

ce qui montre bien que l'unique point singulier de C au-dessus de $s' \in S_E$ est piqué par la section Σ_E donnée par 6.14.3.

Il est maintenant bien clair que toute déformation à type topologique constant, ou "à μ constant" au sens de 6.1, possède une section qui provient par changement de base de la "section universelle" Σ_E. Nous montrerons ailleurs le lien entre ce résultat et le problème de la "déformation semi-universelle à section" posé par Hironaka [5] à propos de sa théorie du $(t - r)$-index ([9] et [6]).

§ 7. "Vérités" non démontrées.

Le premier problème qui se pose est celui de la lissité de S_E .

7.1. "Vérité" n° 1 : S_E est lisse.

Dans le cas où $\dim_{x_o} X_o = 1$, i.e. des courbes planes ceci (ainsi que l'existence de S_E , évidemment) a été démontré par J. Wahl (Berkeley) dans sa thèse [22] mais sa méthode ne lui permet pas de décrire explicitement S_E comme sous-espace de S_U , et ne se généralise pas en dimension supérieure à 1 .

7.2. "Vérité" n° 2 : $S_E = D_o$.

Ce qui revient à dire qu'au-dessus d'un point quelconque de D_o il y a un seul point de C , ou encore que D est irréductible en tout point de D_o , ou encore que $\dim T_{D,s'} = \dim D$ pour tout $s' \in D_o$, ou enfin : pour toute petite déformation $F : (X,x) \longrightarrow (S,s)$ telle que, si pour $s' \in S$, $x_i(s')$ $1 \leqslant i \leqslant k$ sont les points singuliers de $X_{s'}$, on ait

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i(s')}(X_{s'}) = \mu_{x_o}(X_o) \quad ,$$

on a $k = 1$ et la déformation F est à type topologique constant.

Cette vérité a pour corollaire (cf. [10]) :

"THEOREME" 7.3.- Soit $F : X \longrightarrow S$ un morphisme plat dont les fibres sont des hypersurfaces projectives à singularités isolées. On suppose que F est localement cohomologiquement trivial c'est-à-dire que tout $s' \in S$ possède un voisinage U tel que $H^*(F^{-1}(U), \mathbb{Z}) \simeq H^*(F^{-1}(s') \times U, \mathbb{Z})$. Alors F est localement topologiquement trivial, c'est-à-dire que tout $s' \in S$ possède un voisinage U', tel que l'on ait un homéomorphisme au-dessus de U' :

$$\begin{tikzcd}
F^{-1}(s') \times U' \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circ"] & F^{-1}(U') \arrow[dl] \\
& U' &
\end{tikzcd}$$

La "vérité" n° 2 vient d'être démontrée par Cevdet Haş Bey dans le cas des courbes planes et par voie topologique ([3] et [4]).

La conjonction des deux premières vérités nous donne :

"Vérité" n° 3 : D_0 est lisse, que l'on peut ausssi chercher à démontrer directement.

§8. Lien avec le problème de Pham.

Si nous reprenons l'exemple de Pham [15] exposé par Berthelot [1], du point de vue adopté ici, nous nous apercevons qu'il se laisse paraphraser ainsi : si (X_0, x_0) est la courbe plane d'équation $y^3 + x^9 = 0$, la strate de Samuel D_0 du lieu discriminant D de la déformation semi-universelle de (X_0, x_0) est lisse de dimension 2 (c'est T^{**} dans les notations de [15]; T_1 dans [1]). Mais la stratification de Samuel de D ne vérifie pas la propriété de frontière. Il existe une strate de Samuel de D (T_2 dans les notations de [1]) telle que $T_1 \cap \overline{T}_2 \neq \emptyset$, mais $T_1 \not\subseteq \overline{T}_2$. Ainsi, si l'on prend

$s'_1 \in T_1 - T_1 \cap \overline{T}_2$ et $s'_2 \in T_1 \cap \overline{T}_2$, les fibres $X_{s'_1}$ et $X_{s'_2}$ auront même type topologique, mais certainement pas même type topologique universel. Mais on a le résultat suivant :

THEOREME 8.1. (Whitney [23]).- Une partition localement finie $X = \cup X_\alpha$ en sous-espaces analytiques tels que $\overline{X}_\alpha$ et $\overline{X}_\alpha - X_\alpha$ soient des sous-espaces analytiques fermés, possède un raffinement qui vérifie la propriété de frontière, et est la moins fine possible pour cette propriété (parmi celles qui sont plus fines que la partition donnée).

Si nous notons T_o la strate de s dans D pour le raffinement de Whitney de la stratification de Samuel de D , nous voyons que nous ne pouvons plus appliquer la méthode de Pham pour trouver un contre-exemple au fait que les fibres de $F_U : (X_U,x_U) \longrightarrow (S_U,s_U)$ au-dessus des points de T_o ont toutes le même type topologique universel.

D'où

Conjecture 1 : T_o est lisse.

Conjecture 2 : T_o est la strate de s dans la stratification de Thom (i.e. par le type topologique universel) de F_U .

Question préliminaire : est-ce que les multiplicités jacobiennes critiques de Pham [16] sont constantes le long de T_o ?

REFERENCES

[1] P. BERTHELOT - Exposés sur les travaux de Pham, Séminaire Douady-Verdier à l'E.N.S., publ. Secr. Math. E.N.S. 1972.

[2] H. GRAUERT - Deformationen isolierter singularitäten, Inventiones Math. Vol. 15, Fasc. 3 (1972).

[3] Cevdet HAS BEY - Irréductibilité de la monodromie locale, note aux C.R.A.S., 1972.

[4] Cevdet HAS BEY - Application à l'équisingularité, note aux C.R.A.S., 1972.

[5] H. HIRONAKA - Equivalence and deformations of isolated singularities, Woods Hole Seminar in Algebraic Geometry (1964).

[6] H. HIRONAKA - On the equivalence of singularities I, Arithmetical Algebraic Geometry, edited by O.F.G. Schilling Harper and Row, 1965.

[7] H. HIRONAKA - Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint. University of Warwick. 1971.

[8] LE DUNG TRANG - Singularités isolées des hypersurfacés complexes, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (1969).

[9] LE DUNG TRANG - Thèse, Paris VII, 1971.

[10] LE DUNG TRANG, C.P. RAMANUJAM, B. TEISSIER - Sur un critère d'équisingularité (à paraître).

[11] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Normal cones and sheaves of relative jets, Preprint, University of Warwick, 1971.

[12] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Quelques calculs utiles pour la résolutions des singularités, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, (1972).

[13] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, (Princeton 1968).

[14] MEYER - GROMOLL - On differentiable functions with isolated critical points, Topology, Vol. 8 (1969).

[15] F. PHAM - Remarque sur l'équisingularité universelle, Université de Nice (1970).

[16] F. PHAM - Classification des singularités, Université de Nice (1971).

[17] P. SAMUEL, O. ZARISKI - Commutative Algebra, Vol. 2 (Van Nostrand).

[18] P. SAMUEL - Algèbre locale, Mémorial des Sciences Math., Fasc. CXXIII (1953).

[19] SCHLESSINGER - Thèse, Havard 1965.

[20] B. TEISSIER - Déformations à type topologique constant III, à paraître au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[21] G.N. TJURINA - Locally semi universal flat deformations... , Math. of the USSR Isvestija, Vol. 3, n° 5 , pp. 967-999 (1969).

[22] J. WAHL - "Deformations of branched covers and equisingularity", Thesis, Havard 1971.

[23] WHITNEY - Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. (1965), t. 81, n° 3 , pp. 496-549.

(NOTES)

Page 17 (*) Remarque.– La même méthode permet de démontrer très facilement, grâce à 2.1, que pour toute strate de Boardman Σ^I de F_U, au-dessus de tout point d'un ouvert analytique partout dense de $F(\Sigma^I)$, il y a un seul point de Σ^I (et même de C) (sinon, on contredirait par 2.1 le fait que $F(\Sigma^I)$ doit être irréductible en tout point d'un ouvert analytique partout dense). Ainsi, $F_U|\Sigma^I : \Sigma^I \longrightarrow F(\Sigma^I)$ est biméromorphe (et c'est même le morphisme de normalisation de $F(\Sigma^I)$). La formule de projection des multiplicités donne alors immédiatement le théorème 4.3. de [1] (ou de Pham [16]). 2.1 est un résultat si géométrique et si utile qu'il mérite peut-être le nom de théorème.

Page 20 (**) "Entre les lignes" cf. "Singularités à Cargèse" (à paraître).

Page 22 (***) Il faut cependant, bien sûr, supposer S réduit.