

Sur l'article *On some ideals of differentiable functions*

Bernard Teissier

9 mai 2019

1 Commentaires

Cet article introduit deux idées importantes : la définition pour un idéal \mathcal{J} de fonctions différentiables dans un ouvert U de \mathbf{R}^n d'être "de Lojasiewicz" et le fait que cette propriété implique une condition de régularité pour le lieu des zéros des fonctions de l'idéal : le fait que ce lieu des zéros contient un ouvert dense qui est une sous-variété de U . Ce résultat sera repris dans le livre [To] de Tougeron.

La seconde idée est celle d'"extension jacobienne" d'un idéal de fonctions différentiables, dont Thom pense qu'elle "joue le rôle" du Nullstellensatz dans le cas réel" puisqu'elle permet (Théorème 2 de l'article) de construire en chaque point d'un ouvert dense du lieu E des zéros d'un idéal de Lojasiewicz un idéal de définition de E . Comment ceci peut-il être rapproché du théorème des zéros réel de Risler dans [R] pour les idéaux de fonctions analytiques réelles, qui sont de Lojasiewicz ?

A la fin de l'article Thom propose l'idée qu'il existe des opérations canoniques d'extension d'un idéal de fonctions analytiques généralisant celle d'extension jacobienne et dont les lieux de zéros forment une stratification de Whitney du lieu des zéros de l'idéal. Dans le cas analytique complexe, la caractérisation algébrique des stratifications de Whitney par l'auteur de ces lignes dans [Te] est peut-être une étape vers la réalisation de ce magnifique rêve de Thom.

Enfin, on peut s'étonner que Thom ne cite pas l'article fondateur [W] de Whitney sur les idéaux de fonctions différentiables. Il est vrai que l'esprit de cet article est entièrement différentiel alors que Thom s'intéresse à ce qui sépare l'analytique du différentiel, avec peut-être en arrière-plan la différence entre ensembles stratifiés différentiels et analytiques.

Références

- [R] Risler, Jean-Jacques, *Le théorème des zéros en géométries algébrique et analytique réelles*, Bull. S.M.F., Vol. 104 (1976), 113-127.

- [Te] Teissier, Bernard, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Algebraic Geometry (La Ràbida, 1981), Lecture Notes in Math., 961, 314-491, Springer, Berlin, 1982.
- [To] Tougeron, Jean-Claude, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 71, Springer 1972.
- [W] Whitney, Hassler, *On ideals of differentiable functions*, Amer. Journ. of Math., Vol. 70., No. 3 (Jul., 1948), 635-658.