



Sur La Geometrie Des Surfaces Complexes I. Tangentes Exceptionnelles

Le Dung Trang; Bernard Teissier

American Journal of Mathematics, Vol. 101, No. 2. (Apr., 1979), pp. 420-452.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0002-9327%28197904%29101%3A2%3C420%3ASLGDSC%3E2.0.CO%3B2-E>

American Journal of Mathematics is currently published by The Johns Hopkins University Press.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/journals/jhup.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to creating and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.

SUR LA GEOMETRIE DES SURFACES COMPLEXES I. TANGENTES EXCEPTIONNELLES

By LÊ DŨNG TRÁNG et BERNARD TEISSIER

Introduction. Dans ce travail, nous commençons l'étude de l'équisingularité du point de vue des limites d'espaces tangents; il s'agit de comprendre à quel point la structure de l'espace des limites d'espaces tangents détermine la géométrie d'une singularité de surface. Il se trouve que du point de vue de l'équisingularité la partie essentielle de l'espace des limites d'espaces tangents d'une surface dans \mathbf{C}^3 est composée de pinceaux de plans passant par certaines génératrices du cône tangent à la surface au point singulier, dites *génératrices exceptionnelles*.

Nous donnons ici plusieurs caractérisations des génératrices exceptionnelles et montrons en particulier que pour toute projection assez générale de notre surface sur \mathbf{C}^2 il existe une composante du lieu critique de la projection qui est tangente à une génératrice exceptionnelle donnée: elles apparaissent ainsi comme tangentes fixes du lieu critique, indépendantes de la projection. Nous analysons ici le cas des surfaces qui n'ont pas de tangentes exceptionnelles et montrons que dans ce cas si le cône tangent est réduit la surface se déforme équisingulièrement sur son cône tangent. La motivation de ce travail est de définir un concept d'équisingularité faisant comprendre le lien entre le critère discriminant de Zariski pour une projection générale et la structure de l'espace des limites d'espaces tangents, théorie que nous développerons dans un travail ultérieur. Les résultats présentés ici, tout en étant de nature préliminaire, sont d'une part techniquement essentiels pour la théorie que nous nous proposons d'étudier et d'autre part encourageants en ce qui concerne l'étude de l'équisingularité de ce point de vue. Comme le lecteur le verra nous utilisons constamment des idées de la théorie de l'équisingularité introduite par O. Zariski ainsi que les résultats qu'il a démontrés. C'est pour nous un grand plaisir de lui dédier ce travail et ceux qui suivront.

1. Tangentes Exceptionnelles. Dans [5], J. P. G. Henry et Lê D. T. ont introduit la notion de génératrices exceptionnelles du cône tangent d'un germe de surface analytique complexe de $(\mathbb{C}^3, 0)$. Dans ce paragraphe nous allons donner plusieurs caractérisations de ces génératrices exceptionnelles. Ceci nous sera utile dans la suite pour l'étude de la géométrie des surfaces.

(1.1) *Notations:* Soit $(X, 0)$ une surface réduite dans $(\mathbb{C}^3, 0)$. Soit $C_{X,0}$ son cône tangent. On appellera *projection locale* de $(\mathbb{C}^3, 0)$ dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ un germe de morphisme analytique $p: (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ de rang 2 à l'origine. On appellera *projection locale de $(X, 0)$ sur $(\mathbb{C}^2, 0)$* la restriction $\pi = p|_X$ à X d'une projection locale p de $(\mathbb{C}^3, 0)$ sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. L'espace critique de π , défini par le 0-ième idéal de Fitting du faisceau Ω^1_π des formes différentielles relatives de π (cf. [18]), sera noté C_π . On remarque que l'on peut choisir les coordonnées locales de \mathbb{C}^3 en 0 de telle façon que $p(x, y, z) = (x, y)$. Dans ce cas si $f(x, y, z) = 0$ est une équation de $(X, 0)$ dans $(\mathbb{C}^3, 0)$, le \mathcal{O}_X -module Ω^1_π est isomorphe à $\mathcal{O}_X/f'_z \mathcal{O}_X$, où f'_z est la dérivée partielle de f par rapport à z , par conséquent le 0-ième idéal de Fitting du \mathcal{O}_X -module Ω^1_π n'est autre que l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par f'_z .

Si π induit sur $(C_\pi, 0)$ un germe de morphisme fini, on peut définir l'espace discriminant de π à l'aide du 0-ième idéal de Fitting du $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ module $(\pi_* \mathcal{O}_{C_\pi})_0$ (cf. [18] (2.6)).

(1.2) *Rappels sur l'équisingularité:* Nous allons rappeler ici celles des nombreuses caractérisations équivalentes des familles équisingulières de courbes localement planes réduites que nous utiliserons dans la suite.

Soit $\rho: Z \rightarrow Y$ un morphisme plat d'espaces analytiques réduits à fibres réduites de dimension 1. On suppose que pour tout $y \in Y$ la dimension de plongement de la fibre Z_y en chacun de ses points est au plus égale à 2 (i.e. les fibres sont des courbes localement planes). Etant donné $y \in Y$ et $z \in \rho^{-1}(y)$ les conditions suivantes sont équivalentes:

1) Il existe un voisinage ouvert U de z dans Z tel que, notant B l'ouvert $\rho(U)$ et notant, pour tout $y' \in B$, par z_i' ($1 \leq i \leq k$) les points singuliers de la courbe $Z_{y'} \cap U$, on ait $\mu(Z_{y'}, z) = \sum_{i=1}^k \mu(Z_{y'}, z_i')$ où $\mu(Z_y, z)$ désigne le nombre de Milnor de Z_y en z .

2) Il existe un voisinage U de z dans Z , et une section $\sigma: B \rightarrow U$ de ρ (où $B = \rho(U)$) tels que

$\alpha)$ ρ induise une submersion d'espaces non singuliers

$$U - \sigma(B) \rightarrow B$$

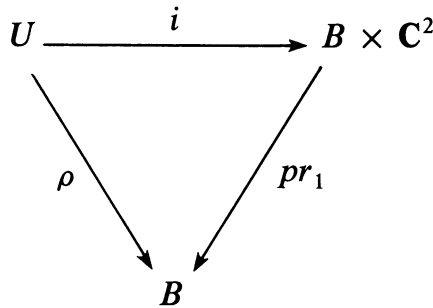
$\beta)$ On a $\mu(Z_{y'}, \sigma(y')) = \mu(Z_y, z)$ pour tout $y' \in B$.

2') Comme 2) mais avec en plus:

$\gamma)$ On a $m(Z_{y'}, \sigma(y')) = m(Z_y, z)$, où $m(Z_y, z)$ désigne la multiplicité dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Z_y, z}$ de son idéal maximal.

3) Il existe un voisinage ouvert U de z dans Z , une section $\sigma: B \rightarrow U$ de ρ , avec $B = \rho(U)$ et une projection $\eta: B \times \mathbb{C}^2 \rightarrow B \times \mathbb{C}$ tels que:

$\alpha)$ on ait un plongement local $i: (U, z) \rightarrow (Y \times \mathbb{C}^2, y \times 0)$ faisant commuter le diagramme:



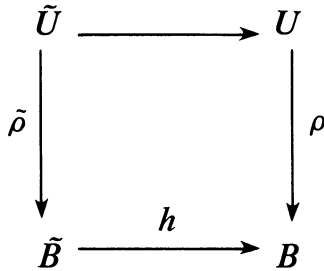
pour lequel on a $i(\sigma(B)) = B \times \{0\}$.

$\beta)$ le lieu de ramification de la restriction de η à U (i.e. l'ensemble réduit sous-jacent au discriminant de cette restriction) coïncide avec $B \times \{0\}$.

4) Il existe un voisinage U de z dans Z et une section $\sigma: B \rightarrow U$ de ρ , avec $B = \rho(U)$, tels que, pour chaque $y' \in B$, le type topologique du germe de courbe plane $(Z_{y'}, \sigma(y'))$ soit le même.

5) Il existe un voisinage U de z dans Z et une section $\sigma: B \rightarrow U$ de ρ , avec $B = \rho(U)$, telles que, pour tout morphisme analytique

$h: \tilde{B} \rightarrow B$, avec \tilde{B} non singulier, dans le diagramme cartésien:



on ait une section $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{\rho}$ qui provient de σ et le couple de strates $(\tilde{U} - \tilde{\sigma}(\tilde{B}), \tilde{\sigma}(\tilde{B}))$ satisfait les conditions de Whitney en tout point de $\tilde{\sigma}(\tilde{B})$.

Remarques. 1. Dans la pratique nous utiliserons ce résultat dans le cas où la base Y est non singulière.

2. On rappelle que tout morphisme plat étant ouvert (cf. [2]), U étant ouvert, $B = \rho(U)$ est ouvert.

3. L'ensemble des points de y de Y où les conditions équivalentes ci-dessus sont réalisées est un ouvert analytique partout dense de Y quand la restriction de ρ à son espace critique C_ρ est finie.

4. Si les conditions équivalentes précédentes sont satisfaites pour $y \in Y$ et $z \in \rho^{-1}(y)$, on dit que Z est *équisingulier le long de $\sigma(Y)$ en z* , si σ est une section de ρ comme en 2), telle que $\sigma(y) = z$.

5. Soit $(Z, 0)$ un germe de surface réduite dans $(\mathbb{C}^3, 0)$. On peut montrer que, si Z est équisingulière le long de $\sigma(Y)$ en 0 , cela implique que $\sigma(Y)$ est non singulière en 0 .

L'équivalence des conditions ci-dessus est conséquence de résultats antérieurs. De façon précise:

- 1) \Rightarrow 2) résulte de [19] et [11];
- 2) \Rightarrow 1) est évident;
- 2) \Rightarrow 2') résulte de [12] ou [20] (pour une démonstration algébrique);
- 2') \Rightarrow 3) résulte des travaux de O. Zariski [27] (cf. aussi [21]);
- 3) \Rightarrow 4) résulte aussi de [27] (cf. aussi [21]);
- 4) \Rightarrow 5) est aussi un résultat de O. Zariski [29] (c'est aussi un cas particulier des résultats de [22] Chap. 2 §3).

5) \Rightarrow 2) résulte de ce que les conditions de Whitney impliquent la constance du type topologique d'après un théorème de Mather-Thom (cf. [15]) et de ce que le nombre de Milnor est un invariant du type topologique (cf. [22] Chap. 1, théorème 1.4 ou [10] théorème (3.3)). On aurait pu utiliser les résultats de J. Briançon, J. P. G. Henry, J. P. Spéder dans [1] qui donne une réciproque aux résultats cités ci-dessus ([22] Chap. 2 §3).

(1.3) *Rappels sur les limites d'espaces tangents.* Soient X un espace analytique réduit équidimensionnel de dimension d , Ω^1_X le faisceau des différentielles de X . Dans [18], on considère l'espace analytique en grassmannienne $\text{Grass}_d(\Omega^1_X)$ au-dessus de X :

$$g: \text{Grass}_d(\Omega^1_X) \rightarrow X$$

Sur l'ouvert X_o des points non singuliers de X on a une section $\tau: X_o \rightarrow \text{Grass}_d(\Omega^1_X)$ de g (car g est un isomorphisme au-dessus de X_o). Soit \tilde{X} la fermeture de $\tau(X_o)$ dans $\text{Grass}_d(\Omega^1_X)$. On peut montrer que \tilde{X} est un espace analytique réduit (cf. [18]). On appelle *modification de Nash* la restriction γ de g à \tilde{X} :

$$\gamma: \tilde{X} \rightarrow X$$

Remarque (1.3.1). Dans le cas où X est un sous-espace analytique d'un ouvert U de \mathbf{C}^N , on a une application analytique ψ de X_o dans $\text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)$ qui à $x \in X_o$ fait correspondre $T_x(X_o)$, l'espace tangent de X_o en x . On peut montrer que \tilde{X} est isomorphe à l'adhérence du graphe $\text{Gr } \psi$ de ψ dans $X \times \text{Grass}_d(\mathbf{C}^N)$ et que, pour cet isomorphisme, la restriction à cette adhérence $\overline{\text{Gr } \psi}$ de la première projection donne le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\sim} & \overline{\text{Gr } \psi} \\ & \searrow \gamma & \swarrow \\ & & X \end{array}$$

Dans ce qui suit on s'intéresse au cas d'un germe de surface dans $(\mathbf{C}^3, 0)$. Le morphisme γ est alors isomorphe à l'éclatement de l'idéal engendré dans $\mathcal{O}_{X,0}$ par les dérivées partielles d'une fonction $f(x, y, z)$ qui définit $(X, 0)$ dans $(\mathbf{C}^3, 0)$.

On appellera *espace des limites d'espaces tangents à X en x* l'espace analytique $\gamma^{-1}(x)$. L'espace analytique réduit sous-jacent sera appelé *ensemble des limites d'espaces tangents à X en x* et ses éléments sont les *limites d'espaces tangents à X en x* .

Remarque (1.3.2). Quand X est une surface analytique dans un ouvert U de \mathbf{C}^3 , la dimension de $\gamma^{-1}(x)$ est 1 ou 0 quand $x \in X$.

Dans ce cas $\gamma^{-1}(x)$ est isomorphe à un sous-schéma algébrique de $\check{\mathbf{P}}^2$, espace projectif de dimension 2 des directions de plans de \mathbf{C}^3 .

Dans [9] nous montrons que l'ensemble $|\gamma^{-1}(x)|$ sous-jacent à $\gamma^{-1}(x)$, est une variété algébrique union de la courbe duale $(\text{Proj } |C_{X,x}|)^v$ à la courbe projective réduite $\text{Proj } |C_{X,x}|$ associée au cône tangent $C_{X,x}$, et de droites $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ de $\check{\mathbf{P}}^2$ représentant des pincesaux de directions de plans de \mathbf{C}^3 dont les axes sont des génératrices de $C_{X,x}$. Ces droites sont donc tangentes à $|\text{Proj } C_{X,x}|^v$ ou passent par une de ses composantes de dimension 0. Nous appelons ces génératrices les *génératrices exceptionnelles* de X en x ; on dira aussi que ce sont les *tangentes exceptionnelles de X en x* . La structure de $\gamma^{-1}(x)$ et donc les tangentes exceptionnelles ne dépend que du type analytique du germe (X, x) .

Exemples (1.3.3). Il peut n'y avoir aucune tangente exceptionnelle de X en x : par exemple quand X est non singulier en x . Si X est singulier en x , quand (X, x) est isomorphe au cône de \mathbf{C}^3 sur une courbe non singulière de \mathbf{P}^2 , on remarquera que grâce à l'identité d'Euler X n'a pas de tangentes exceptionnelles en x . Nous verrons plus bas une réciproque "à équisingularité près" de ce résultat.

Remarquons que si $|C_{X,x}|$ est un plan, l'ensemble des limites d'espaces tangents $|\gamma^{-1}(x)|$ de X en x est constitué uniquement des pincesaux $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$.

Nous allons maintenant décrire d'après [9] le cas où $\gamma^{-1}(x)$ est de dimension 0.

Remarquons que toute submersion analytique $l: (\mathbf{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ telle que $l^{-1}(0) \cap X$ soit de dimension 1 nous permet de considérer X comme la famille de courbes $\lambda: (X, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$, restriction de l à X .

On dira que l est assez générale pour X en 0 si $l^{-1}(0) \cap X$ est réduite en 0 et son nombre de Milnor en 0 est minimum parmi toutes les sections de X par des surfaces non singulières passant par 0 . Sous ces hypothèses la restriction de l au lieu singulier Σ de X est un morphisme fini et de rang 1 en dehors de 0 . Par conséquent pour $t \neq 0$ assez petit $l^{-1}(t)$ coupe transversalement le lieu singulier Σ de X en des points $x_1(t), \dots, x_l(t)$ qui sont les points singuliers de $X \cap l^{-1}(t)$ quand le représentant X du germe (X, x) est convenablement choisi. En vertu de la remarque 3 de (1.2) ci-dessus, X est équisingulier en $x_i(t)$, pour $1 \leq i \leq l$, le long de Σ et, d'après O. Zariski [29], l est assez générale pour X en $x_i(t)$ ($1 \leq i \leq l$), car en un point d'équisingularité une surface lisse transverse au lieu singulier donne nécessairement une intersection avec le nombre de Milnor minimum (en fait dans [29], O. Zariski démontre que la somme du nombre de Milnor et de la multiplicité moins 1, est minimum, mais ceci entraîne évidemment que le nombre de Milnor et la multiplicité sont minima). (1.3.3.1) Rappelons que pour un germe de courbe analytique $(C, 0)$ on appelle *discriminant* de $(C, 0)$ le nombre:

$$\Delta(C, 0) = \mu(C, 0) + m(C, 0) - 1$$

(la terminologie provient de ce que $\Delta(C, 0)$ est la multiplicité du discriminant d'une projection assez générale (i.e. de degré $m(C, 0)$) sur une droite complexe, (cf. [21] et comparer à [29]).

Dans [9], on a établi:

THÉORÈME (1.3.4). Soit $l: (C^3, 0) \rightarrow (C, 0)$ une submersion analytique assez générale pour X en 0 . Soient $x_1(t), \dots, x_l(t)$ les points d'intersection de $l^{-1}(t)$ avec le lieu singulier Σ de X , où X est un représentant convenable assez petit de $(X, 0)$. L'ensemble des limites d'espaces tangents à X en 0 est fini si et seulement si

$$\Delta(l^{-1}(0) \cap X, 0) = \sum_{i=1}^l \Delta(l^{-1}(t) \cap X, x_i(t))$$

pour $t \neq 0$ assez petit.

Dans le cas où le lieu singulier Σ de X est non singulier en 0 , on a $l = 1$, et le critère discriminant de O. Zariski (cf. [27]) donne:

COROLLAIRE (1.3.5). *La surface X est équisingulière en 0 le long de Σ si et seulement si les limites d'espaces tangents de X en 0 sont finies. Dans ce cas ces limites sont précisément les plans du cône tangent.*

Remarque (1.3.6). Il est équivalent de dire que les limites d'espaces tangents de X en 0 sont finies et que la modification de Nash $\gamma: \bar{X} \rightarrow X$ est dominée par la normalisation $n: \bar{X} \rightarrow X$ de X . Dans l'hypothèse où le lieu singulier Σ est non singulier en 0, c'est le critère jacobien d'équisingularité de O. Zariski (cf. [27]).

(1.4) Caractérisation des tangentes exceptionnelles

(1.4.1) Soit $(X, 0)$ un germe de surface analytique définie dans $(\mathbf{C}^3, 0)$ par $f = 0$. Soit $f = f_m + f_{m+1} + \dots$ le développement de Taylor de f en 0, avec $m = m(X, 0)$ multiplicité de X en 0. Soit U un voisinage ouvert de 0 où la série de Taylor de f ci-dessus converge. Si U est convenablement choisi la série $F = f_m + tf_{m+1} + t^2f_{m+2} + \dots = t^{-m}f(tx, ty, tz)$ converge pour tout $(x, y, z) \in U$ et $t \in \mathbf{D}$, où $\mathbf{D} = \{t/|t| < 2\}$. Soit \mathfrak{X} l'hypersurface de $U \times \mathbf{D}$ définie par $F = 0$. La projection sur \mathbf{D} restreinte à \mathfrak{X} définit un morphisme analytique plat $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$, muni d'une section $\sigma: \mathbf{D} \rightarrow \mathfrak{X}$ d'image $\{0\} \times \mathbf{D}$. Cette construction est un cas particulier d'une construction générale (cf. [3] et [23]).

(1.4.2) Soit $g: Z \rightarrow \mathbf{D}$ un morphisme analytique à valeurs dans un disque ouvert centré en 0 de \mathbf{C} . Soit $Z = \bigcup_{\alpha \in A} Z_\alpha$ une stratification de Z , i.e. une partition localement finie de Z en sous-espaces analytiques non singuliers localement fermés qu'on appellera strates de Z . Soient Z_α et Z_β deux strates de Z telles que $Z_\beta \subset Z_\alpha$. On suppose que les restrictions de g à Z_α et Z_β sont de rang constant. Soit $z \in Z_\beta$, on dit que le couple de strates (Z_α, Z_β) satisfait la *condition de Thom en z* relativement à g , si pour toute suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de Z_α qui converge vers z et pour laquelle la suite des espaces tangents $T_{z_n}(g^{-1}(g(z_n)) \cap Z_\alpha)$ a une limite T , on a :

$$T \supset T_z(g^{-1}(g(z)) \cap Z_\beta)$$

la limite et l'inclusion ci-dessus étant comprises dans une grassmannienne convenable grâce à un plongement local de Z dans $\mathbf{D} \times \mathbf{C}^N$. Si (Z_α, Z_β) satisfait la condition de Thom, si (Z_α, Z_β) satisfait la condition de Thom en tout point z de Z_β .

Dans [6], H. Hironaka a montré que, sous la condition que, pour tout $t \in \mathbf{D}$, $g^{-1}(t)$ soit contenu dans l'adhérence dans Z de $Z - g^{-1}(t)$, il existe une stratification comme ci-dessus telle que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in A \times A$ avec $Z_\beta \subset \overline{Z_\alpha}$, (Z_α, Z_β) satisfait la condition de R. Thom relativement à g et la condition de H. Whitney. Remarquons que la condition précédente est satisfaite, quand g est plat.

Dans le cas de la déformation ci-dessus dans (1.4.1), $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$ est plat. On peut stratifier \mathfrak{X} de telle sorte que $\varphi^{-1}(0) = \mathfrak{X}$ soit une union de strates, que la partie non singulière de \mathfrak{X} , la partie singulière de \mathfrak{X} moins $\sigma(\mathbf{D}) = \{0\} \times \mathbf{D}$ et $\sigma(\mathbf{D}) - \{0\}$ soient des strates et que cette stratification satisfasse la condition de Thom relativement à φ et celle de Whitney.

Au cours de la démonstration du théorème, nous donnerons une relation intéressante entre la condition de Thom et l'équisingularité.

(1.4.3) Nous allons réaliser \mathfrak{X} comme un ouvert dans l'éclatement de l'origine dans la famille triviale de $U \times \mathbf{D}$ définie par $f(x, y, z) = 0$.

Décrivons d'abord l'éclatement $\epsilon: E \rightarrow U \times \mathbf{D}$ de l'origine dans $U \times \mathbf{D}$. Soient A, B, C, D les coordonnées homogènes de \mathbf{P}^3 associées aux coordonnées (x, y, z, t) de $U \times \mathbf{D}$. Dans $U \times \mathbf{D} \times \mathbf{P}^3$ l'éclatement de l'origine dans $U \times \mathbf{D}$ est donné par:

$$\begin{cases} Dx - At = 0 \\ Dy - Bt = 0 \\ Dz - Ct = 0 \end{cases}$$

ou par

$$\begin{cases} Cx - Az = 0 \\ Cy - Bz = 0 \\ Ct - Dz = 0 \end{cases}$$

etc. . . .

Notons U_D la carte de \mathbf{P}^3 où $D \neq 0$. L'intersection $E \cap V_D$, avec $V_D = U \times \mathbf{D} \times U_D$, est isomorphe à un ouvert de \mathbf{C}^4 et on peut choisir comme coordonnées locales $a = A/D$, $b = B/D$, $c = C/D$ et $t' =$

$t \circ \epsilon$. Dans cette carte l'image inverse de la famille triviale $X \times \mathbf{D}$ a pour équation:

$$f(at', bt', ct') = 0$$

et par conséquent la transformée stricte de $X \times \mathbf{D}$ par l'éclatement ϵ intersecte cette carte en l'hypersurface d'équation:

$$t'^{-m}f(at', bt', ct') = 0$$

où $m = m(X, 0)$. Dans un ouvert approprié de cette carte on retrouve bien un sous-espace analytique isomorphe à \mathfrak{X} . La projection sur \mathbf{D} composée avec l'éclatement ϵ donne le morphisme analytique qui correspond à φ .

Dans les cartes V_A, V_B, V_C , un calcul analogue montre que la trace de la transformée stricte par ϵ de $X \times \mathbf{D}$ est isomorphe au produit par \mathbf{D} de la trace de la transformée stricte par ϵ de $X \times \{0\}$. Par exemple $E \cap V_C$ est isomorphe à un ouvert de \mathbf{C}^4 et on peut choisir comme coordonnées $a = A/C, b = B/C, C = z \circ \epsilon$ et $d = D/C$. La transformée stricte de $X \times \mathbf{D}$ dans cette carte est donnée par:

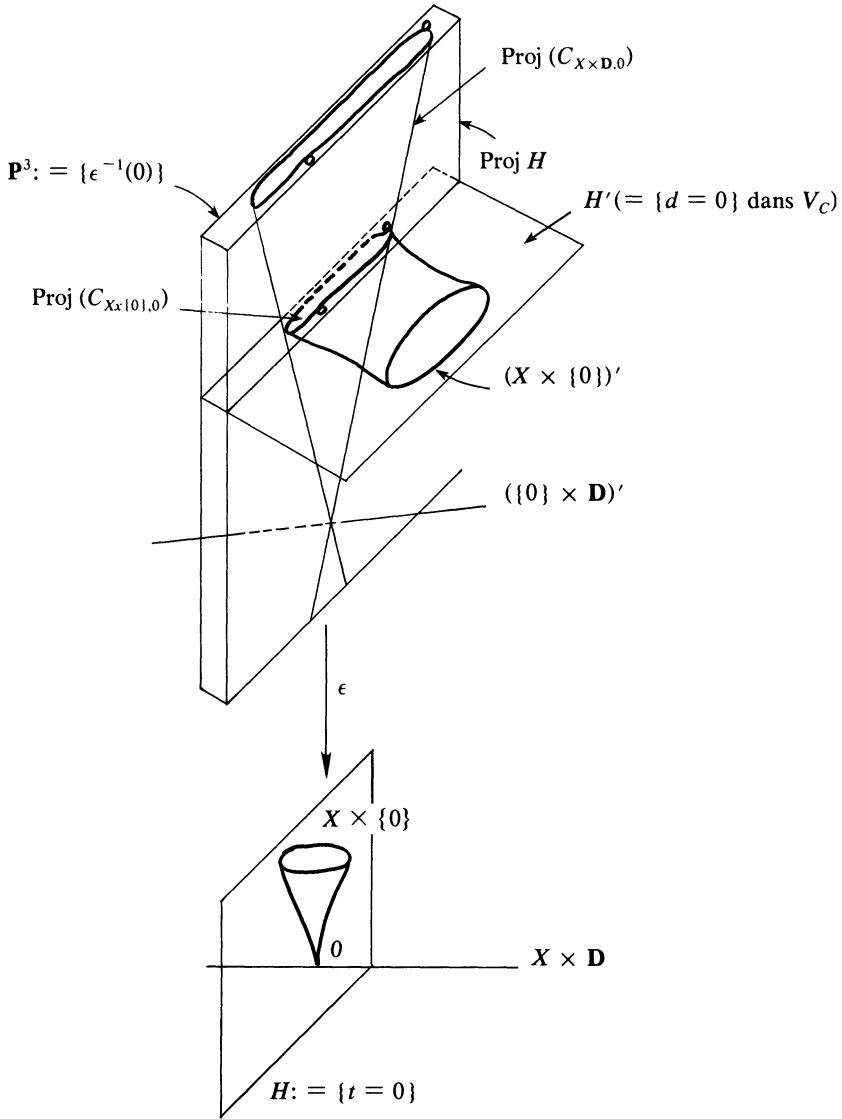
$$c^{-m}f(ac, bc, c) = 0$$

dont l'intersection avec $d = 0$ donne bien la trace de la transformée stricte de $X \times \{0\}$ dans V_C . L'équation précédente ne dépendant pas de d , cette transformée stricte de $X \times \mathbf{D}$ par ϵ admet une structure de produit analytique.

Cette structure de produit dans V_C n'est autre que celle qui provient par éclatement de la structure de produit naturelle que possède l'espace total de la famille des sections de $X \times \mathbf{D}$ par les hyperplans d'équations $t - \lambda z = 0$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$: on remarquera que ces hyperplans sont ceux du pinceau $\delta t + \gamma z = 0$ qui sont transverses à $\{0\} \times \mathbf{D}$.

En conclusion au voisinage de chacun des points x_o de $\mathfrak{X} - \{0\}$, où $\mathfrak{X}_o = \varphi^{-1}(0)$, (\mathfrak{X}, x_o) est isomorphe à $(X' \times \mathbf{C}, (l_o, 0))$ où X' est l'espace total de l'éclatement $e: X' \rightarrow X$ de centre $\{0\}$ et l_o est le point de $e^{-1}(0)$ qui représente la génératrice de $C_{X,0}$ qui passe par x_o .

Le dessin ci-dessous aidera peut être le lecteur:



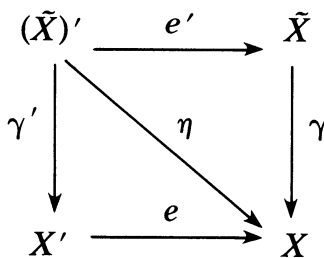
Légende. Le' désigne la transformée stricte par ϵ .

(1.4.4) Nous allons donner diverses caractérisations des tangentes exceptionnelles. On reprend les notations précédentes du paragraphe (1.4).

THÉOREME (1.4.4.1). Soit $(X, 0)$ un germe de surface analytique de $(\mathbb{C}^3, 0)$ défini par $f = 0$. Soit l une génératrice du cône tangent $C_{X,0}$ de X en 0 , qui n'est pas tangente en 0 au lieu singulier Σ de X . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) La génératrice l est une tangente exceptionnelle de X en 0 .
- 2) Soit $e: X' \rightarrow X$ l'éclatement de X de centre 0 et soit $J(f)\mathcal{O}_{X'}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X'}$ engendré par $(\partial f/\partial x) \circ e, (\partial f/\partial y) \circ e, (\partial f/\partial z) \circ e$. L'éclatement de l'idéal $J(f)\mathcal{O}_{X'}$, n'est pas fini au-dessus d'un voisinage du point de $e^{-1}(0) = \text{Proj } C_{X,0}$ qui représente l .
- 3) Pour toute projection locale $\pi: (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ (cf. (1.1)) de degré $m(X, 0)$, la génératrice l est tangente à une composante de la partie du lieu critique de π qui n'est pas le lieu singulier.
- 4) La surface éclatée X' de X en 0 n'est pas équisingulière le long de $|e^{-1}(0)| = \text{Proj } |C_{X,0}|$ au point de $e^{-1}(0)$ qui représente l .
- 5) La déformation $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$ définie dans (1.4.1), le couple de strates formé par la partie non singulière $\mathfrak{X}_{\text{reg}}$ de \mathfrak{X} moins $\varphi^{-1}(0)$ et de la partie non singulière de $|\varphi^{-1}(0)| = |C_{X,0}| \times \{0\}$ ne satisfait la condition de Thom relativement à φ en aucun point de $l \times \{0\} - 0$.

Démonstration. Montrons que 1) entraîne 2). Pour cela on considère le diagramme d'éclatement du produit $\mathfrak{M}J(f)$ de l'idéal maximal définissant 0 dans X et de l'idéal $J(f) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)\mathcal{O}_X$.



où e' est l'éclatement de $\gamma^{-1}(0)$ dans \tilde{X} et γ' est l'éclatement de $J(f)\mathcal{O}_{X'}$. D'après la propriété universelle de l'éclatement, ce diagramme est commutatif et $\gamma \circ e' = e \circ \gamma'$ est l'éclatement de $\mathfrak{M}J(f)$. On notera $\eta = \gamma \circ e' = e \circ \gamma'$.

Rappelons que le morphisme d'éclatement de l'idéal maximal en 0 (resp. la modification de Nash) peut être décrit en considérant l'adhérence dans $X \times \mathbf{P}^2$ (resp. dans $X \times \check{\mathbf{P}}^2$) du graphe du morphisme canonique de $X - \{0\}$ dans \mathbf{P}^2 qui à $x \in X - \{0\}$ fait correspondre la direction de la droite $\overline{0x}$ (resp. du graphe du morphisme de $X - \Sigma$ dans $\check{\mathbf{P}}^2$ qui à $x \in X - \Sigma$ fait correspondre la direction du plan tangent à X en x). De la même façon considérons l'application de $X - \Sigma$ dans $\mathbf{P}^2 \times \check{\mathbf{P}}^2$ obtenue en considérant simultanément les deux précédentes. L'adhérence dans $X \times \mathbf{P}^2 \times \check{\mathbf{P}}^2$ du graphe de cette application n'est autre que $(\check{X})'$, et la projection sur X induit le morphisme η .

On peut exprimer le lemme de H. Whitney (cf. [25] ou [6]) en disant que $\eta^{-1}(0)$ est contenu dans l'hypersurface H de $\mathbf{P}^2 \times \check{\mathbf{P}}^2$ des couples (l, P) tels que $l \subset P$.

Soit l une tangente exceptionnelle. Montrons que $\gamma'^{-1}(l)$ est formé des couples (l, P) où P appartient au pinceau des plans qui contiennent l , i.e. $\dim \gamma'^{-1}(l) = 1$. Pour cela nous démontrons que $\gamma'^{-1}(l)$ contient les (l, P) pour P dans un ouvert dense du pinceau des plans qui contiennent l . Soit P un plan qui contient l , ne passe par aucune tangente exceptionnelle, et de plus n'est pas tangent à $C_{X,0}$, alors $e'^{-1}(P) = \{(l, P)\}$. En effet $e'^{-1}(P) \subset \{(l, P), (l_1, P), \dots, (l_k, P)\}$ où l, l_1, \dots, l_k sont les génératrices de $C_{X,0}$ contenues dans P . Comme l_1, \dots, l_k sont des génératrices qui ne sont pas exceptionnelles, $\gamma'^{-1}(l_i) = \{(l_i, P_{ij})\}$ ($i = 1, \dots, k$) où P_{ij} est une limite le long de l_i de plans tangents à $C_{X,0}$ (cf. [9] théorème (2.3.7)).

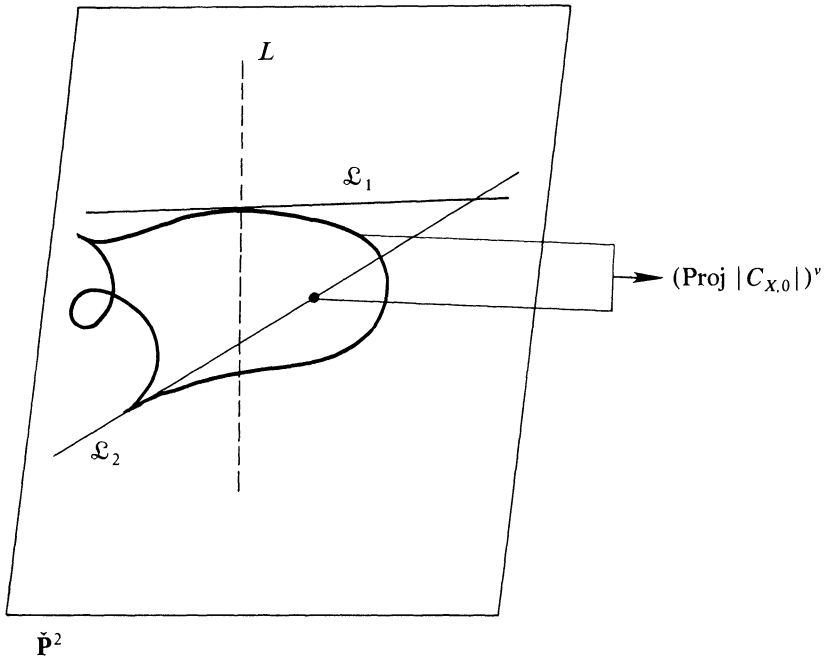
Comme P n'est pas tangent à $C_{X,0}$ en l_i ($i = 1, \dots, k$), on a bien $e'^{-1}(P) = \{(l, P)\}$. Donc pour tous les plans P du pinceau qui contient l qui ne passent par aucune génératrice exceptionnelle autre que l et qui ne sont pas tangents à $C_{X,0}$, i.e. pour un ouvert dense du pinceau des plans qui contiennent l , on a $(l, P) \in \gamma'^{-1}(l)$. Donc on a bien $\dim \gamma'^{-1}(l) = 1$.

En fait nous pouvons montrer de la même façon que l'image inverse par e' d'un point P non singulier de $|\gamma^{-1}(0)|$ ne contient qu'un seul point. Les points P de l'ouvert dense ci-dessus sont les points de la droite duale à l qui sont non singuliers dans $|\gamma^{-1}(0)|$.

Remarquons que, si l n'est pas exceptionnel, nous avons vu ci-dessus (cf. [9] (2.3.7)) que $\gamma'^{-1}(l) = \{(l, P_j)\}$, où P_j est une limite d'espaces tangents à $C_{X,0}$ le long de l . Or, comme $C_{X,0}$ est un cône, cet ensemble est bien fini parce qu'il correspond aux droites tangentes en l à la courbe projective $|\text{Proj } C_{X,0}|$. Ceci démontre que 2) entraîne 1).

Pour démontrer l'équivalence de 1) et de 3) nous remarquons que l'espace critique d'une projection locale peut se décrire de la façon suivante: Quitte à changer les coordonnées locales, on peut supposer que $\pi: (X, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ est donnée par une projection linéaire p de \mathbf{C}^3 sur \mathbf{C}^2 . Le modifié de Nash \tilde{X} de X en 0 est plongé dans $X \times \check{\mathbf{P}}^2$. Considérons $\gamma^{-1}(0)$ dans $\{0\} \times \check{\mathbf{P}}^2$. On a vu dans (1.3) que $|\gamma^{-1}(0)|$ est l'union de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$ variété duale de $\text{Proj } |C_{X,0}|$, et d'un nombre fini de droites, duales des tangentes exceptionnelles. Soit $L \subset \check{\mathbf{P}}^2$ la droite duale de la droite $p^{-1}(0)$ de \mathbf{C}^3 , qui représente le pinceau des plans de \mathbf{C}^3 qui contiennent $p^{-1}(0)$. On a un morphisme analytique $\tilde{g}: \tilde{X} \rightarrow \check{\mathbf{P}}^2$ (morphisme de Gauss) restriction à \tilde{X} de la projection de $X \times \check{\mathbf{P}}^2$ sur $\check{\mathbf{P}}^2$. On remarque que l'image par γ de $\tilde{g}^{-1}(L)$ est contenue dans le lieu critique de π et contient les composantes du lieu critique qui ne sont pas dans le lieu singulier Σ de X . On appellera (cf. [9] (2.2.3)) *partie verticale du lieu critique* la partie du lieu critique égale à $\gamma(\tilde{g}^{-1}(L))$.

Le dessin ci-dessous aidera peut être le lecteur:



On a :

LEMME (1.4.4.2). *En un point h de $L \cap \gamma^{-1}(0)$ la dimension de $\tilde{g}^{-1}(L) = \tilde{X} \cap (X \times L)$ est au moins égale à 1. De plus si la projection locale de $(X, 0)$ sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ définie par L est finie, la dimension en h de $\tilde{g}^{-1}(L)$ égale 1 et si de plus L n'est pas dual d'une tangente exceptionnelle $\tilde{g}^{-1}(L)$ n'est pas contenue dans $\gamma^{-1}(0)$.*

En effet $X \times \check{\mathbb{P}}^2$ est une intersection complète de dimension 4, \tilde{X} est de dimension 2 et $X \times L$ est de dimension 3. Par conséquent $\tilde{X} \cap (X \times L) = \tilde{g}^{-1}(L)$ est au moins de dimension 1 en h . Si la projection locale π définie par L est finie, le lieu critique de π est de dimension 1. Comme $\gamma(\tilde{g}^{-1}(L))$ est une union de composantes irréductibles de ce lieu critique, et que γ est un morphisme fini en dehors de $\gamma^{-1}(0)$, en vertu du corollaire (1.3.5) et de la remarque 3 de (1.2) sur l'ouverture de l'équisingularité, la dimension de $g^{-1}(L)$ en $h \in L \cap \gamma^{-1}(0)$ est égale à 1 (ne pas oublier que $L \cap \gamma^{-1}(0)$ peut être vide; cf. 1.3.4).

On remarque :

(1.4.4.3) Les seules droites projectives dans $\gamma^{-1}(0)$ sont les duales des tangentes exceptionnelles, car une droite projective de $\check{\mathbb{P}}^2$ n'est pas duale d'une composante de $\text{Proj } |C_{X,0}|$ qui est équidimensionnel de dimension 1 (bidualité pour les courbes projectives planes).

Ceci montre que, si L n'est pas dual à une tangente exceptionnelle $\{0\} \times L$ n'est pas contenue dans $\gamma^{-1}(0)$. Or $\tilde{g}^{-1}(L) \cap \gamma^{-1}(0) = (\{0\} \times L) \cap \gamma^{-1}(0)$. Ceci démontre notre lemme.

(1.4.4.4) Comme dans la démonstration de l'équivalence de 1) et de 2) ci-dessus, on remarque que, si $h \in \gamma^{-1}(0)$ n'est pas une composante de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$, i.e. si h n'est pas le dual d'un plan qui est dans $C_{X,0}$, au-dessus d'un voisinage de h dans \tilde{X} le morphisme $e' : (\tilde{X})' \rightarrow \tilde{X}$ est fini. En fait on a vu que l'image réciproque par e' d'un point non singulier h de l'ensemble $|\gamma^{-1}(0)|$ est réduite à un point. Donc si L coupe transversalement $|\gamma^{-1}(0)|$, alors le morphisme e' induit une bijection de $e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L)) \cap \eta^{-1}(0)$ avec $\tilde{g}^{-1}(L) \cap \gamma^{-1}(0)$. Comme dans la démonstration ci-dessus de l'équivalence de 1) et de 2), ceci démontre que les tangentes à la partie verticale $\gamma(\tilde{g}^{-1}(L))$ du lieu critique de π sont les tangentes exceptionnelles et les droites du lieu critique de l'application tangente à π en 0 restreinte à $|C_{X,0}|$.

Si la projection locale $\pi : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ associée à L est de degré $m(X, 0)$, le point de \mathbb{P}^2 dual de L n'est pas dans $\text{Proj } C_{X,0}$. Ceci signifie

que L n'est pas tangente à $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$ (dans le cas d'un point singulier de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$, ceci signifie que L n'est pas dans le cône tangent de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$ en ce point et dans le cas d'une composante de dimension 0 de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$, ceci signifie que L n'y passe pas). La seule difficulté nouvelle par rapport au cas considéré précédemment est que L peut passer par un point singulier de $|\gamma^{-1}(0)|$ dont l'image réciproque par e' est finie mais n'est pas réduite à un point.

Pour traiter ce cas nous faisons la construction suivante:

Il existe un pinceau $(L_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ de droites dans $\check{\mathbb{P}}^2$ tel que $L_0 = L$ et pour tout $t \neq 0$ suffisamment proche de 0, L_t coupe transversalement $|\gamma^{-1}(0)|$. Considérons l'hypersurface Z de $\check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}^1$ formée des points (x, t) tels que $x \in L_t$. Notons $\lambda: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ la restriction à Z de la projection de $\check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}^1$ sur \mathbb{P}^1 . On définit \mathfrak{X} dans $(\check{X})' \times \mathbb{P}^1$ par le diagramme cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \subset (\check{X})' \times \mathbb{P}^1 & & \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Z \subset \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}^1 & & (g \circ e') \times Id_{\mathbb{P}^1} \end{array}$$

On notera Λ le morphisme composé de $\mathfrak{X} \rightarrow Z$ et de $\lambda: Z \rightarrow \mathbb{P}^1$. On remarque que $\Lambda^{-1}(t) = e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_t)) \times \{t\}$.

Soit h un point de $L \cap |\gamma^{-1}(0)|$ qui est singulier sur $|\gamma^{-1}(0)|$. Soient $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r$ les droites projectives de $|\gamma^{-1}(0)|$, duales de tangentes exceptionnelles, qui passent par h et soient C_1, \dots, C_s les composantes de $(\text{Proj } |C_{X,0}|)^v$ qui passent par h . Comme dans la démonstration de l'équivalence de 1) et 2) on fait la remarque suivante:

(1.4.4.5) On a $e'^{-1}(h) = \{(l_1, h), \dots, (l_k, h)\}$ où les l_i sont les génératrices de $C_{X,0}$ duales des tangentes à $|\gamma^{-1}(0)|$ en h .

Si l_i , pour un i entre 1 et k , est une génératrice exceptionnelle duale de \mathcal{L}_i , le point (l_i, h) est limite quand t tend vers 0 des points (l_i, h_t) où $h_t = L_t \cap \mathcal{L}_i$. Or le point h_t , quand $t \neq 0$ est assez petit, est un point non singulier de $|\gamma^{-1}(0)|$. D'après le cas transversal vu plus haut, $\Lambda^{-1}(t) = e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_t)) \times \{t\}$ est de dimension 1 en (l_i, h_t, t) , quand $t \neq 0$ est assez petit. Or $(l_i, h, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} (l_i, h_t, t)$ appartient à $\Lambda^{-1}(0)$. La semi-continuité de la dimension des fibres de Λ donne que $\Lambda^{-1}(0)$ est de dimension 1 en $(l_i, h, 0)$. Ceci montre que $e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_0))$ est de dimension 1 en (l_i, h) et que l'image par η du germe

$(e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_o)), (l_i, h))$ est une composante de la partie verticale du lieu critique qui est tangente à l_i . Dans le cas où l_j , pour un j entre 1 et k , n'est pas une génératrice exceptionnelle, l_j est une droite du contour apparent de l'application tangente à π en 0 restreinte à $|C_{X,0}|$. Comme ci-dessus on montre que $e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_o))$ est de dimension 1 en (l_j, h) et l'image par η du germe $((e'^{-1}(\tilde{g}^{-1}(L_o)), (l_j, h))$ est une composante de la partie verticale du lieu critique qui est tangente à l_j . Ceci montre que, si l est une génératrice exceptionnelle de X en 0, pour toute projection locale $\pi: (X, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^2, 0)$ de degré $m(X, 0)$, l est tangente au lieu critique de π . Les autres tangentes du lieu critique qui ne sont pas exceptionnelles sont les tangentes au lieu singulier et les droites du contour apparent de la restriction à $|C_{X,0}|$ de l'application tangente à π en 0. Ces dernières droites ne sont plus tangentes au lieu critique d'une projection voisine. Ceci démontre l'équivalence de 1) et de 3).

L'équivalence de 1) et 4) est démontrée dans [9] (théorème (2.3.7) et remarque (2.3.8)).

La preuve de l'équivalence de 4) et 5) repose sur le résultat suivant:

(1.4.4.5) LEMME. *Soit $f(t_1, \dots, t_k, x, y) = 0$ l'équation d'une hypersurface réduite X de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2$ (considérée comme une famille de courbes planes (que l'on suppose toutes réduites) paramétrée par \mathbf{C}^k , au voisinage de $0 \in \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2$) et soit $\alpha: X \rightarrow \mathbf{C}$ la restriction à X d'une submersion $A: (\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$, telle que $(\alpha^{-1}(0))$ contienne le lieu singulier Σ de X , que l'on suppose réduit à $\mathbf{C}^k \times \{0\}$. Alors si le couple de strates $(X - \Sigma, \Sigma)$ satisfait la condition A_α de Thom au voisinage de 0 on a: l'hypersurface X est équisingulière le long de $\mathbf{C}^k \times \{0\}$ au voisinage de 0.*

Démonstration. Considérons la projection $\pi: X \rightarrow \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ définie par $t_i \circ \pi = t_i$ ($1 \leq i \leq k$) et $u \circ \pi = \alpha$. Nous allons montrer que le lieu de bifurcation Δ_π de π est réduit à $\mathbf{C}^k \times \{0\}$. S'il n'en était pas ainsi, soit Δ_i une composante de Δ_π qui n'est pas $\mathbf{C}^k \times \{0\}$ et soit $p \in \Delta_i$. Puisque le lieu singulier est $\mathbf{C}^k \times \{0\}$, $d_\pi^{-1}(T_{\Delta_i,p})$ est un hyperplan de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2$ tangent à X en au moins un point c du lieu critique C_π de π . L'intersection de ce plan avec l'espace tangent $T_{\alpha^{-1}(\alpha(c)),c}$ est nécessairement transversale pour $c \in X - \Sigma$ assez proche de 0 (car sinon $T_{\Delta_i,p}$ coïnciderait avec l'hyperplan de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ parallèle à $\mathbf{C}^k \times \{0\}$ et passant par p , pour tout p assez proche de 0 ce qui est absurde).

Ainsi, $d_\pi^{-1}(T_{\Delta_i,p}) \cap T_{\alpha^{-1}(\alpha(c)),c}$ coïncide avec l'image inverse par d_π de l'intersection de $T_{\Delta_i,p}$ avec l'hyperplan parallèle à $\mathbf{C}^k \times \{0\}$

passant par p . Cette image inverse est de dimension k . On remarque qu'elle est verticale dans la projection de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2$ sur $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}$ définie par la projection de $\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2$ sur \mathbf{C}^k et A . En effet c'est aussi l'image réciproque par l'application tangente à cette projection de l'intersection de $T_{\Delta_i,p}$ et de l'hyperplan parallèle à $\mathbf{C}^k \times \{0\}$ passant par p . Ceci montre que quand p tend vers zéro $[d\pi^{-1}(T_{\Delta_i,p})] \cap T_{\alpha^{-1}(\alpha(c)),c}$ tend vers une limite qui ne peut pas contenir $\mathbf{C}^k \times \{0\}$. Ceci contredit la condition A_α de Thom pour $(X - \Sigma, \Sigma)$ en 0. Donc il faut que $\Delta_\pi = \mathbf{C}^k \times \{0\}$, ce qui d'après le critère discriminant de O. Zariski (cf. (1.2)3)) implique l'équisingularité.

Remarque (1.4.4.6). Le lemme précédent admet la réciproque partielle suivante: si l'hyperplan $dA^{-1}(0)$ n'est pas dans le cône tangent à X en 0, si X est équisingulière le long de Σ en 0, la condition A_α de Thom est satisfaite pour $(X - \Sigma, \Sigma)$ sur un voisinage de 0 dans Σ . En effet choisissons les coordonnées x et y pour que $A(t_1, \dots, t_k, x, y) = x$. La condition A_α de Thom pour $(X - \Sigma, \Sigma)$ en 0 s'exprime alors en disant que dans l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,0}$ on a:

$$\bar{\nu}_{\partial f/\partial y \cdot \mathcal{O}_{X,0}}(\partial f/\partial t_i) > 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k.$$

(ceci résulte de la définition de la fonction d'ordre $\bar{\nu}_{\partial f/\partial y \cdot \mathcal{O}_{X,0}}$ cf. [22] et [14]; comparer ce résultat avec la remarque 3.10 de [22] et [13]).

Or l'équisingularité de X le long de Σ en 0 équivaut à 2) de (1.2), i.e. le nombre de Milnor des courbes de la famille X est constant. Dans 3.10 de [22] ceci se traduit par:

$$\bar{\nu}_{(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^2, 0}}(\partial f/\partial t_i) > 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

Par restriction à X le $\bar{\nu}$ ne peut qu'augmenter d'où:

$$\bar{\nu}_{(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) \cdot \mathcal{O}_{X,0}}(\partial f/\partial t_i) > 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k$$

La transversalité de x implique que $|\partial f/\partial x| \leq C|\partial f/\partial y|$ avec $C > 0$ dans un voisinage de 0 dans X . Or ceci se traduit (cf. [22] et [14]) par $\partial f/\partial x$ dans $\mathcal{O}_{X,0}$ est entier sur $\partial f/\partial y \cdot \mathcal{O}_{X,0}$. Les propriétés de la fonction d'ordre $\bar{\nu}$ (cf. [22] et [14]) impliquent alors:

$$\bar{\nu}_{(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y) \cdot \mathcal{O}_{X,0}} = \bar{\nu}_{\partial f/\partial y \cdot \mathcal{O}_{X,0}}$$

d'où la condition A_α de Thom pour $(X - \Sigma, \Sigma)$ en 0.

Montrons maintenant que le lemme (1.4.4.5) donne: 4) implique 5) dans le théorème de (1.4.4). Dans (1.4.3) nous avons vu qu'en tout point x_o de $\mathfrak{X}_o - \{0\}$, où $\mathfrak{X}_o = \varphi^{-1}(0)$, (\mathfrak{X}, x_o) est isomorphe à $(X' \times \mathbf{C}, (l_o, 0))$, l_o étant le point de $e^{-1}(0)$ qui représente la droite $0x_o$.

Pour démontrer 4) implique 5), d'après la formulation de 5) il suffit de considérer un point x_o non singulier dans \mathfrak{X}_o . Si X' n'est pas équisingulière en l_o le long de $e^{-1}(0)$, \mathfrak{X} n'est pas équisingulière en x_o le long de \mathfrak{X}_o , à cause de la structure de produit. Le lemme (1.4.4.5) montre alors que $(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_o, \mathfrak{X}_o)$ ne satisfait pas la condition A_φ de Thom en x_o .

Montrons que 5) implique 1). Soit x un point de $l \times \{0\} - 0$, non singulier sur $|\mathfrak{X}_o - \{0\}|$. Si $\mathfrak{X}_{\text{reg}} - \mathfrak{X}_o$ ne satisfait pas la condition A_φ de Thom en x , il existe une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathfrak{X}_{\text{reg}} - \mathfrak{X}_o$ qui tend vers x pour laquelle la suite de plans $T_{x_n}(\varphi^{-1}(\varphi(x_n)))$ converge vers un plan T qui ne contient pas $T_x(|\mathfrak{X}_o|)$. Cette suite de points donne une suite de points $(x_n')_{n \in \mathbf{N}}$ de X qui tend vers 0 telle que la suite des plans tangents $T_{x_n'}(X)$ tende vers T et la suite de droites $0x_n'$ tende vers $l = 0x$. Le plan T contient l et n'est pas tangent à $|C_{X,0}|$. Ceci n'est possible que si l est une tangente exceptionnelle. Ceci achève la démonstration du théorème de (1.4.4).

Remarque (1.4.4.7). Dans le cas où $(X, 0)$ a une singularité isolée en 0, en vertu du 4) du théorème (1.4.4.1) et de la remarque 5 de (1.2), les génératrices singulières de $|C_{X,0}|$ sont nécessairement exceptionnelles (comparer à [5], theoreme (3.1)).

2. Surfaces Sans Tangentes Exceptionnelles. Dans ce paragraphe nous allons étudier les surfaces sans tangentes exceptionnelles. Dans le cas des surfaces avec singularité isolée ou celui des surfaces dont le cône tangent est réduit, les surfaces sans tangentes exceptionnelles se déforment équisingulièrement sur leur cône tangent. Nous donnerons des exemples de surfaces sans tangentes exceptionnelles dont le cône tangent n'est pas réduit.

(2.1) *Cas d'un cône tangent réduit.*

(2.1.1) THÉORÈME. *Supposons que le cône tangent $C_{X,0}$ de X en 0 soit réduit. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *la surface analytique X n'a pas de tangentes exceptionnelles en 0.*
- 2) *la déformation de $(X, 0)$ sur son cône tangent $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$ (cf. 1.4.1 ci-dessus) est équisingulière en 0 le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$ dans l'un des sens suivants:*

a) la partie non singulière de l'espace \mathfrak{X}' obtenu par éclatement de $\{0\} \times \mathbf{D}$ dans \mathfrak{X} satisfait les conditions de Whitney le long de sa partie singulière.

b) La partition suivante de \mathfrak{X} : ($\mathfrak{X} - \text{Sing } \mathfrak{X}$, $\text{Sing } \mathfrak{X} - \{0\} \times \mathbf{D}$, $0 \times \mathbf{D}$) est une stratification de Whitney de \mathfrak{X} .

c) (définition de Zariski) Pour une projection linéaire assez générale $\pi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{C}^2 \times \mathbf{D}$ compatible avec φ et la projection $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$, notant Δ_π le discriminant de π , on a: Δ_π est une famille de courbes planes équisingulières le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$.

Démonstration. Montrons que 1) entraîne 2) a). Examinons d'abord le cas où $\text{Proj } C_{X,0}$ est une courbe non singulière (i.e. $C_{X,0}$ est en fait un cône avec une singularité isolée).

Soit $x_o \in \mathfrak{X}_o - \{0\}$. La propriété A_φ de $(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_o, \mathfrak{X}_o)$ en x_o montre que (\mathfrak{X}, x_o) est non singulier. D'après la structure de produit de \mathfrak{X} au voisinage de x_o (cf. (1.4.3)), X' est non singulier en l_o , point de \mathbf{P}^2 qui représente la droite $0x_o$, et transverse à ce \mathbf{P}^2 . Ceci est vrai en tout point du diviseur exceptionnel de X' . On obtient donc en éclatant $(0) \times \mathbf{D}$ dans \mathfrak{X} un espace analytique non singulier \mathfrak{X}' tel que le morphisme composé $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{D}$ soit une submersion d'espaces analytiques non singuliers, que pour chaque $t \in \mathbf{D}$ le morphisme $\mathfrak{X}'_t \rightarrow \mathfrak{X}_t$, induit sur les fibres de \mathfrak{X}' et \mathfrak{X} au-dessus de t , soit une résolution des singularités de \mathfrak{X}_t , et que l'image inverse de $\{0\} \times \mathbf{D} \subset \mathfrak{X}$ dans \mathfrak{X}' soit égale à $\text{Proj } C_{X,0} \times \mathbf{D}$ et donc analytiquement triviale au-dessus de \mathbf{D} (résolution simultanée forte cf. [20]). Dans ce cas où $\text{Proj } C_{X,0}$ est non singulier, on a donc bien 2) a). (Comparer ces résultats à ceux de [22] Chap. II, 2.7, et de [12] Cor. 2.4).

(2.1.1.1) Supposons donc que $\text{Proj } (C_{X,0})$ soit singulière en l_o . Comme la génératrice l_o de $C_{X,0}$ n'est pas une tangente exceptionnelle, on a vu dans [9] (remarque (2.3.8)) que l_o est nécessairement tangente à une union Σ_{l_o} de composantes irréductibles en 0 du lieu singulier Σ de X . Si cette union Σ_{l_o} des composantes irréductibles de Σ tangentes à l_o en 0 est non singulière, en tout point $x_o \neq 0$ de $l_o \times \{0\}$, le lieu singulier \mathfrak{S} de \mathfrak{X} est non singulier-en x_o .

Soit H un plan de dimension 2 dans \mathbf{C}^3 tel que $H \times \mathbf{D}$ coupe $l_o \times \{0\}$ transversalement en x_o . L'intersection de $H \times \mathbf{D}$ avec \mathfrak{X} est une famille de courbes planes paramétrée par \mathbf{D} dont le lieu singulier est $\mathfrak{S} \cap (H \times \mathbf{D})$. Remarquons que $H \times \{0\}$, étant transverse à $l \times \{0\}$ dans $\mathbf{C}^3 \times \{0\}$, n'est pas limite de plans tangents à \mathfrak{X}_t quand t tend vers 0. Il en résulte que les limites des droites tangentes aux courbes

$\mathfrak{X}_t \cap (H \times \mathbf{D})$ quand t tend vers 0 sont les tangentes à $\mathfrak{X}_0 \cap (H \times \mathbf{D})$. Si nous projetons $\mathfrak{X} \cap (H \times \mathbf{D})$ sur $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ par une projection dont l'axe est transverse à $\mathfrak{X}_0 \cap (H \times \mathbf{D})$ d'après ce que l'on vient de voir le discriminant de cette projection coïncide avec l'image du lieu singulier $\mathfrak{S} \cap (H \times \mathbf{D})$. Ce discriminant est donc non singulier en 0 et d'après le critère discriminant de O. Zariski (cf. (1.2) 3)), cette famille de courbe $\mathfrak{X} \cap (H \times \mathbf{D})$ est équisingulière en x_0 le long de son lieu singulier $\mathfrak{S} \cap (H \times \mathbf{D})$. D'après la structure de produit de (\mathfrak{X}, x_0) (cf. (1.4.3)) l'éclaté X' de X est équisingulier en l_0 le long de la transformée stricte de Σ_{l_0} par l'éclatement $e: X' \rightarrow X$. Ainsi dans le cas où Σ_{l_0} est non singulier, nous avons bien 2)a) à cause de (1.2) 5).

Il nous reste à montrer que sous nos hypothèses, Σ_{l_0} est bien non singulier en 0.

Soit $E: Z \rightarrow U \times \mathbf{D}$ l'éclatement de $U \times \mathbf{D}$ le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$. Soit \mathfrak{X}' la transformée stricte de \mathfrak{X} . On note $E_{\mathfrak{X}}: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ l'éclatement de \mathfrak{X} le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$, induit par E . On rappelle que $Z = Z_0 \times \mathbf{D}$ où Z_0 est l'éclaté de U en 0. On a également $E^{-1}(\{0\} \times \mathbf{D}) = \text{Proj}(C_{x,0}) \times \mathbf{D}$. On appellera l_1, \dots, l_k les points singuliers de $\text{Proj } C_{x,0}$ (qui est réduit par hypothèse). On note $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ les discriminants de $\text{Proj } C_{x,0}$ en l_1, \dots, l_k (cf. (1.3.3.1)).

Nous allons montrer que sous nos hypothèses, \mathfrak{X} en 0 et \mathfrak{X}' en les points $(l_i, 0)$ ($i = 1, \dots, k$) ont leur courbe polaire par rapport à $t = 0$ vide (cf. [8]). Nous verrons par un argument topologique que ceci implique la non singularité de Σ_{l_i} ($i = 1, \dots, k$).

Montrons que l'hyperplan $t = 0$ n'est pas limite d'espaces tangents à \mathfrak{X} en 0. D'après un résultat de [22] (chap. 1 (2.9)) ceci est équivalent à montrer que $\partial F / \partial t$ est entier dans $\mathcal{O}_{x,0}$ sur l'idéal $(\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z)_{\mathcal{O}_{x,0}}$. Remarquons que l'hypothèse qu'il n'y a pas de tangentes exceptionnelles implique que chaque composante du diviseur exceptionnel de l'éclatement dans \mathfrak{X} de l'idéal $(\partial F / \partial x, \partial F / \partial y, \partial F / \partial z)_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}$ s'envoie surjectivement sur \mathbf{D} par le morphisme composé de l'éclatement et de $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$. En effet la propriété A_φ de Thom pour \mathfrak{X} implique que le diviseur exceptionnel de la transformée stricte de \mathfrak{X}_0 coïncide avec la fibre au-dessus de 0 du diviseur exceptionnel de l'éclatement précédent (on utilise bien sûr (1.3.2)). En utilisant l'argument de [22] (chap. 2 (3.2)) (cf. Aussi [20]), App. II) on montre que pour tout $g \in \mathcal{O}_{x,0}$ qui donne un germe $g \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}(0,t)}$ pour t assez petit, on a :

avec

$$J\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} = (\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z)\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$$

Comme on a pour tout $t \neq 0, t \in \mathbf{D}$:

$$\bar{\nu}_{J\mathcal{O}_{\mathfrak{X},(0,t)}}(\partial F/\partial t) > 1$$

à l'aide de [22] (chap. 2 (3.6)) car $\mathfrak{X}_{\text{reg}} - \{0\} \times \mathbf{D}$ satisfait la condition *A* de Whitney en tout point de $\{0\} \times \mathbf{D} - \{0\}$ puisque la famille \mathfrak{X} est analytiquement triviale au voisinage de $(0, t)$ avec $t \neq 0$, on obtient:

$$(2.1.1.2) \quad \bar{\nu}_{J\mathcal{O}_{\mathfrak{X},0}}(\partial F/\partial t) > 1$$

ce qui exprime que $t = 0$ n'est pas limite d'espaces tangents à \mathfrak{X} en 0.

(2.1.1.3) Ceci entraîne qu'en un point de $l_i \times \{0\} - \{0\}$ ($i = 1, \dots, k$) le lieu singulier de \mathfrak{X} est transverse à $t = 0$. D'après la structure de produit de \mathfrak{X} en un point de $\mathfrak{X}_o - \{0\}$ (cf. (1.4.3)) on obtient que la transformée stricte de la partie Σ_{l_i} du lieu singulier de X qui est tangente à l_i a la même multiplicité que Σ_{l_i} et que $\text{Proj } C_{X,0}$ en l_i .

(2.1.1.4) Un autre conséquence de ce que $t = 0$ ne soit pas limite d'espaces tangents à \mathfrak{X} en 0 est que l'éclatement de $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z, \partial F/\partial t)\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ a une fibre au-dessus de 0 qui est de dimension 1. L'éclatement de l'idéal $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y, \partial F/\partial z, \partial F/\partial t)$ dans $U \times \mathbf{D}$ a donc une fibre au-dessus de 0 de dimension au plus égale à 2. Ceci entraîne d'après un argument de [4] (2.2. p. 329 et 330) que la courbe polaire de \mathfrak{X} relativement à $t = 0$ est vide. Ce qu'on peut aussi vérifier très facilement par un calcul direct.

Considérons maintenant une projection p de $U \times \mathbf{D}$ sur $V \times \mathbf{D}$, où V est un ouvert de \mathbf{C}^2 , induite par une projection $p_o: U \rightarrow V$. Soit π la restriction de p à \mathfrak{X} . On note $D(\pi)$ le discriminant de π , qui est une surface de $V \times \mathbf{D}$. Quand p est assez général, remarquons qu'en tout point de $\{0\} \times \mathbf{D}$ la multiplicité de $D(\pi)$ égale $m(m - 1)$ où m est la multiplicité de x en 0. En effet cette multiplicité en $(0, t)$ est le discriminant de la courbe image inverse par π d'une droite générale de $V \times \mathbf{D}$ passant par $(0, t)$. Si $t \neq 0$ il suffit de considérer une droite de la forme $L \times \{t\}$. Comme le cône tangent est réduit, le germe de courbe $\pi^{-1}(L \times \{t\), $(0, t)$) a le type d'équisingularité de m droites qui$

passent par 0 et distinctes. Le discriminant d'une telle singularité (ordinaire) vaut $m(m - 1)$. D'autre part on a vu dans (1.4.4.4) que les composantes du lieu critique d'une projection locale assez générale d'une surface sur \mathbf{C}^2 autres que celles du lieu singulier sont tangentes aux génératrices exceptionnelles, aux droites du contour apparent de la restriction de l'application tangente de Zariski de cette projection au cône tangent. Par conséquent, si p est assez générale, l'espace critique de π est composé du lieu singulier de \mathfrak{X} et de m^v surfaces non singulières qui contiennent $\{0\} \times \mathbf{D}$ et m^v génératrices de \mathfrak{X}_0 . En fait m^v égale le degré de la courbe duale de $\text{Proj } C_{X,0}$. La formule de Plücker (cf. [7] ou [20] Appendice 2 remarque (2.5)) nous donne:

$$m^v = m(m - 1) - \sum_{i=1}^k \Delta_i$$

où Δ_i est le discriminant de $\text{Proj } C_{X,0}$ en l_i . Soient $\Sigma_i^{(1)}, \dots, \Sigma_i^{(r_i)}$ les composantes analytiques de Σ_{l_i} en 0 et soient $\nu_{1i}, \dots, \nu_{r_i i}$ leurs multiplicités respectives. On considère une section de X en un point non singulier de $\Sigma_i^{(j)}$ proche de 0 par un plan transverse à $\Sigma_i^{(j)}$. Soit $\Delta_i^{(j)}$ le discriminant de cette section en ce point. La contribution de l'image de $\Sigma_i^{(j)}$ dans le discriminant d'une projection sur \mathbf{C}^2 transverse à $\Sigma_i^{(j)}$ est $\nu_{ji} \Delta_i^{(j)}$. La contribution totale du lieu singulier dans le discriminant d'une projection de $(X, 0)$ sur $(\mathbf{C}^2, 0)$ transverse à ce lieu singulier est donc: $\sum_{i,j} \nu_{ji} \Delta_i^{(j)}$.

On obtient donc que la multiplicité du discriminant d'une projection assez générale de $(X, 0)$ sur $(\mathbf{C}^2, 0)$ égale $\sum_{ij} \nu_{ji} \Delta_i^{(j)} + m^v$.

D'où:

$$(2.1.1.5) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ji} \Delta_i^{(j)} = \sum_{i=1}^k \Delta_i$$

Par un argument de semi-continuité on obtient en fait:

$$(2.1.1.6) \quad \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ji} \Delta_i^{(j)} = \Delta_i$$

(2.1.1.7) Ceci entraîne avec le résultat de (2.1.1.3) que le germe

de surface (X', l_i) n'a qu'un nombre fini de limites d'espaces tangents en l_i d'après le théorème (1.3.4).

Appelons $F_1(x', y', z', t) = 0$ l'équation de la transformée stricte \mathfrak{X}' au voisinage de $\{l_i\} \times \mathbf{D}$. Nous remarquons, de façon analogue au cas de \mathfrak{X} , que $t = 0$ n'est pas limite d'espaces tangents à \mathfrak{X}' en $(l_i, 0)$. En effet on peut stratifier \mathfrak{X}' par sa partie non singulière, son lieu singulier moins sa partie dans $t = 0$ et $\{l_i\} \times \mathbf{D}$, la partie du lieu singulier de \mathfrak{X}' dans $t = 0$ moins $\{0\}$, $\{l_i\} \times \mathbf{D} - \{0\}$ et $\{0\}$. Ceci donne une stratification de \mathfrak{X}' qui satisfait à la condition $A_{\varphi \circ E}$. Comme dans le cas de \mathfrak{X} , chaque composante du diviseur exceptionnel de l'éclatement de l'idéal $(\partial F_1/\partial x', \partial F_1/\partial y', \partial F_1/\partial z')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ s'envoie surjectivement sur \mathbf{D} par le morphisme composé de l'éclatement $E_{\mathfrak{X}'}$ et de φ . On termine comme on a fait dans le cas de \mathfrak{X} et on trouve que $\partial F_1/\partial t$ est entier dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',(l_i,0)}$ sur $(\partial F_1/\partial x', \partial F_1/\partial y', \partial F_1/\partial z')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',(l_i,0)}$. Par un raisonnement analogue à (2.1.1.4), comme la fibre de l'éclatement de $(\partial F_1/\partial x', \partial F_1/\partial y', \partial F_1/\partial z', \partial F_1/\partial t)\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$ est de dimension 0, la fibre au-dessus de 0 de l'éclatement de $(\partial F_1/\partial x', \partial F_1/\partial y', \partial F_1/\partial z', \partial F_1/\partial t)$ dans $(Z, (l_i, 0))$ a au plus la dimension 1. Dans ce cas on obtient donc par un argument de [4] (2.2, p. 330) que la courbe polaire de \mathfrak{X}' relativement à $(t = 0)$ est vide en $(l_i, 0)$.

Soit $V_i \times \{0\}$ une boule fermée de $Z_o \times \{0\}$ de centre $(l_i, 0)$ et de rayon $\epsilon > 0$ assez petit définie à l'aide des coordonnées locales x', y', z', t . Pour λ assez petit et pour tout $t \in \mathbf{D}$, $(V_i \times \{t\}) \cap \{F_1 = \lambda\}$ est la fibre de Milnor de \mathfrak{X}'_t en (l_i, t) (cf. [16] ou [10] théorème (2.3)): ceci résulte de ce que tous les \mathfrak{X}'_t pour $t \in \mathbf{D}$, $t \neq 0$, sont isomorphes avec \mathfrak{X}'_1 par l'isomorphisme: $(x', y', z', t) \rightarrow (x'/t, y', z', 1)$. Donc si pour $\epsilon > 0$ assez petit les sphères $S_{\epsilon'} \times \{1\}$ de $Z_o \times \{1\}$ centrées en $(0, 1)$, avec $0 < \epsilon' \leq \epsilon$, coupent transversalement $\mathfrak{X}_1 = X \times \{1\}$ dans $Z_o \times \{1\}$, $S_{\epsilon'} \times \{t\}$ coupe transversalement \mathfrak{X}_t dans $Z_o \times \{t\}$ pour tout $t \neq 0$, $t \in \mathbf{C}$, $|t| \leq 1$.

La fibre de Milnor de \mathfrak{X}'_0 en $(l_i, 0)$ est difféomorphe au produit de la fibre de Milnor de $\text{Proj } C_{X,0}$ en l_i et d'un disque de \mathbf{C} , car \mathfrak{X}'_0 est un cylindre (cf. (1.4.3)). La caractéristique d'Euler de cette fibre de Milnor est donc $1 - \mu_i$ où μ_i est le nombre de Milnor de $\text{Proj } C_{X,0}$ en l_i .

La fibre de Milnor de \mathfrak{X}'_t en (l_i, t) pour $t \neq 0$ a une section générale difféomorphe à la fibre de Milnor de $\text{Proj } C_{X,0}$ en l_i . Comme la courbe polaire de \mathfrak{X}' relativement à $t = 0$ est vide, le résultat de [8] montre que la fibre de Milnor de \mathfrak{X}'_t a la caractéristique d'Euler de celle de \mathfrak{X}'_0 . Celle-ci égale donc $1 - \mu_i$. Or d'après [8], ceci n'est

possible que, si la courbe polaire de \mathfrak{X}'_t en (l, t) par rapport à $x' = 0$, équation locale du diviseur exceptionnel de $Z_0 \times \{t\}$, est également vide. Ceci implique immédiatement que

$$\sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ji} \mu_i^{(j)} = \mu(\text{Proj}(C_{X,0}), l_i),$$

où $\mu_i^{(j)}$ est le nombre de Milnor de la section plane de X par un plan transverse à $\Sigma_i^{(j)}$ en un point non singulier de $\Sigma_i^{(j)}$ voisin de O . D'après [11], ceci n'est possible que si $r_i = 1$ et $\nu_{1i} = 1$. Donc Σ_{l_i} est non singulière en O .

Nous avons ainsi démontré l'implication 1) entraîne 2) a) du théorème (2.1.1).

Montrons que 2) a) entraîne 2) b). D'après (2.1.1.2) on a la condition A de Whitney pour la partie non singulière de \mathfrak{X} le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$ en O . La condition B de Whitney provient du lemme de Whitney (cf. [25] ou [5]), du fait que φ donne une déformation triviale des cônes tangents de \mathfrak{X}_t en $(0, t)$ et que l'on a la propriété A_φ de Thom. Le lieu singulier étant equisingulier le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$ d'après la démonstration ci-dessus, on a la propriété de Whitney le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$, et, pour la partie non singulière de \mathfrak{X} le long du lieu singulier en dehors de $\{0\} \times \mathbf{D}$, on a en fait équisingularité en codimension 1 et on conclut grâce à (1.2) 5).

Remarquons que 2) b) entraîne 2) a) parce que 2) b) entraîne 1). En effet si on a une stratification de Whitney comme dans 2) b) les limites d'espaces tangents de \mathfrak{X} en O sont les plans qui contiennent $T_o(\{0\} \times \mathbf{D})$ et un plan tangent au cône tangent $C_{X,0}$. Ceci montre que les limites d'espaces tangents à X en O ne sont que les plans tangents au cône tangent.

Enfin 2) c) entraîne 1) parce qu'un cône n'a pas de tangentes exceptionnelles et l'équisingularité du discriminant le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$ d'une projection linéaire assez générale de \mathfrak{X} sur $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{D}$ implique que pour $t \neq 0$, \mathfrak{X}_t n'a pas de tangentes exceptionnelles (cf. (1.4.4.4)). En fait 1) entraîne 2) c) puisque l'on a vu dans la démonstration de 1) entraîne 2) a) que pour toute génératrice l singulière sur $C_{X,0}$ la partie Σ_l du lieu singulier de X en O tangente à l est elle-même non singulière. Le discriminant d'une projection générale de \mathfrak{X} sur $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{D}$ est la réunion de $m^\nu + k$ surfaces non singulières contenant $\{0\} \times \mathbf{D}$ non tangentes entre elles, où m^ν est le degré de la courbe duale de $\text{Proj } C_{X,0}$ et k le

nombre de génératrices singulières de $C_{X,0}$. Ce discriminant est évidemment équisingulier le long de $\{0\} \times \mathbf{D}$. Ceci achève la démonstration du théorème (2.1.1).

(2.2) Cas d'une singularité isolée

(2.2.1) THÉORÈME. *Soit $(X, 0) \subset (\mathbf{C}^3, 0)$ un germe de surface à singularité isolée en 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i) *La surface éclatée $X' \rightarrow X$ est équisingulière le long de la courbe $|e^{-1}(0)|$.*
- ii) *Le cône tangent $C_{X,0}$ de X en 0 a une singularité isolée en 0. (et donc $e^{-1}(0)$ est une courbe réduite).*
- iii) *Le nombre de Milnor $\mu^{(3)}$ de $(X, 0)$ et celui $\mu^{(1)} = m(X, 0) - 1$ de sa section par une droite générique satisfont l'égalité*

$$\mu^{(3)} = (\mu^{(1)})^3$$

- iv) *La déformation $\varphi: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{D}$ de X sur son cône tangent (cf. (1.4.1)) est équisingulière au sens de la résolution simultanée forte de ([20]) (ou dans l'un des sens équivalents 2) a), 2) b), 2) c) du théorème (2.1.1)).*
- v) *L'éclatement e de l'idéal maximal de $(X, 0)$ est une résolution des singularités et $|e^{-1}(0)|$ est non singulier.*
- vi) *La surface $(X, 0)$ n'a pas de génératrice exceptionnelle, i.e. la fibre $\gamma^{-1}(0)$ de la modification de Nash $\gamma: \tilde{X} \rightarrow X$ de X est exactement la courbe duale de $|\text{Proj } C_{X,0}|$.*

Démonstration. Montrons i) implique ii). On remarque que dans l'éclatement $E_o: Z_o \rightarrow U$ de U de centre $\{0\}$, on peut calculer le nombre de Milnor de X en 0 de la façon suivante: soit T un voisinage tubulaire du diviseur exceptionnel $E_o^{-1}(0)$ dans Z_o ; soit T_o un voisinage tubulaire du diviseur exceptionnel de X' dans Z_o . On considère $\{f \circ E_o = \lambda\} \cap (T - T_o) = Y_1$ et $\{f \circ E_o = \lambda\} \cap T_o = Y_2$ quand $\lambda \neq 0$ est assez petit. La fibre de Milnor de X en 0 est isomorphe à $Y_1 \cup Y_2$. Par conséquent la caractéristique d'Euler de la fibre de Milnor F de X en 0 vaut:

$$\chi(F) = 1 + \mu(X, 0) = \chi(Y_1) + \chi(Y_2) - \chi(Y_1 \cap Y_2)$$

On peut montrer que l'on a: $\chi(Y_1 \cap Y_2) = 0$. De plus Y_1 est homéomorphe à un revêtement de $E_o^{-1}(0) - E_o^{-1}(0) \cap X'$ de degré $m(X, 0)$

$= m$, multiplicité de X en 0 , le cône tangent réduit de X en 0 est un cône sur une courbe plane non singulière de degré d on a :

$$\chi(E_o^{-1}(0) - E_o^{-1}(0) \cap X') = 1 + (d - 1)(d - 2)$$

Donc: $\chi(Y_1) = m(1 + (d - 1)(d - 2))$.

On remarque que Y_2 est une fibration sur $E_o^{-1}(0) \cap X' = \text{Proj } C_{X,0}$ localement triviale de fibre homéomorphe à la fibre de Milnor d'une courbe non réduite composée d'un germe de courbe $(C', 0)$ et d'une courbe non réduite d'ensemble sous-jacent non singulier $(D, 0)$ compté avec la multiplicité m et ayant un nombre d'intersection avec C' égal à k en 0 . En effet soit k la multiplicité de $|C_{X,0}|$. On a :

$$kd = m$$

Soit \mathcal{C} la courbe section de $(X, 0)$ par un plan assez général de \mathbb{C}^3 qui passe par 0 . Cette courbe a d tangentes distinctes et l'union C des composantes de \mathcal{C} ayant la même tangente a la multiplicité l . La courbe $(C', 0)$ a le type d'équisingularité en 0 de la transformée stricte de C par E_o . On a donc la relation (cf. [17] appendice, ou [29]).

$$\mu_1 = \mu(C', 0) = \mu(C, 0) - k(k - 1)$$

D'autre part:

$$\chi(Y_2) = \chi(\text{Proj } |C_{X,0}|) \cdot \chi(F')$$

où F' est la fibre de Milnor de $(C' \cup D)$ en 0 .

Calculons $\chi(F')$. Soit $x^m g = 0$ une équation locale de $C' \cup D$ en 0 . En utilisant les résultats de [8], on trouve:

$$\chi(F') - m - m(C', 0) = -(m + 1)k - \mu(C', 0) - m(C', 0) + 1$$

D'où:

$$\chi(F') = -\mu_1 - mk + 1 - k + m.$$

Comme

$$\chi(\text{Proj} | C_{X,0}|) = 2 - (d - 1)(d - 2)$$

On obtient

$$\chi(Y_2) = (2 - (d - 1)(d - 2))(1 - \mu_1 - mk - k + m)$$

Donc:

$$1 + \mu(X, 0) = m + m(d - 1)(d - 2) \\ + (mk + \mu_1 + k - m - 1)((d - 1)(d - 2) - 2)$$

La formule de [17] (Appendice) (ou [29]) donne pour un plan D de \mathbf{C}^3 assez général:

$$\mu^{(2)} = \mu(X \cap D, 0) = \mu(C, 0) = m(m - 1) + d\mu_1 - (d - 1)$$

Donc:

$$\mu_1 = \frac{\mu^{(2)} - m(m - 1) + (d - 1)}{d}$$

On a alors:

$$\frac{\mu(X, 0)}{\mu(X \cap P, 0)} = \frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} \\ = (\mu^{(2)})^{-1} \left(m + m(d - 1)(d - 2) \right. \\ \left. + \left(mk + \frac{\mu^{(2)} - m(m - 1) + (d - 1)}{d} \right. \right. \\ \left. \left. + k - m - 1 \right) ((d - 1)(d - 2) - 2) - 1 \right)$$

Or $m = kd$. On peut donc écrire:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} &= \frac{kd + kd^3 - 3kd^2 + 2kd + (k^2d^2 + \mu^{(2)} - k^2d^2 + kd - 1 + kd - kd^2)(d - 3) - 1}{\mu^{(2)}} \\ &= \frac{3kd + kd^3 - 3kd^2 + \mu^{(2)}(d - 3) + 2kd^2 - 6kd - d + 3 - kd^3 + 3kd^2 - 1}{\mu^{(2)}} \\ &= \frac{-3kd + \mu^{(2)}(d - 3) + 2kd^2 - d + 2}{\mu^{(2)}} \\ &= \frac{-3kd + 2kd^2 - d + 2}{\mu^{(2)}} + d - 3 \end{aligned}$$

Or on a toujours (cf. [22]): $\mu^{(2)} \geq (m - 1)^2 = (kd - 1)^2$. Donc comme $m > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} &\leq \frac{2kd^2 - 2d - (3kd - 3)}{(kd - 1)^2} + d - 3 + \frac{d - 1}{(kd - 1)^2} \\ &= \frac{2d - 3}{(kd - 1)} + \frac{d - 1}{(kd - 1)^2} + d - 3 \\ &= \frac{2(d - 1)}{kd - 1} + \frac{d - 1}{(kd - 1)^2} - \frac{1}{kd - 1} + d - 3 \end{aligned}$$

Or

$$\frac{2(d - 1)}{(kd - 1)} \leq 2 \text{ et } \frac{d - 1}{(kd - 1)^2} - \frac{1}{kd - 1} = \frac{d(1 - k)}{(kd - 1)^2} \leq 0.$$

D'où:

$$\frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} \leq d - 1$$

Or on a toujours

$$\frac{\mu^{(3)}}{\mu^{(2)}} \geq kd - 1 \quad (\text{cf. [22] Chap. (2.1)})$$

D'où:

$$0 = (k - 1)d$$

i.e. $k = 1$.

L'équivalence de ii) et iii) est faite dans [22] Chap. 2 (2.7).

L'implication iii) implique iv) résulte immédiatement de la description de φ dans (1.4.1).

L'implication iv) donne v) est immédiate, car l'éclatement de 0 dans un cône à singularité isolée est une résolution des singularités, l'hypothèse de résolution simultanée implique qu'il ne peut pas y avoir de tangentes exceptionnelles, et en vertu de la remarque (1.4.4.7), $|e^{-1}(0)|$ est non singulière.

v) implique vi) résulte de l'équivalence de 1) et 4) dans le théorème (1.4.4.1).

Enfin vi) implique i) provient aussi du théorème (1.4.4.1).

Nous remercions J. Giraud de nous avoir signalé une imprécision dans l'énoncé du théorème (2.2.1).

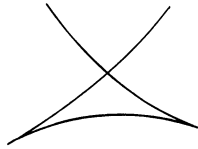
(2.3) Quelques exemples

(2.3.1) La queue d'aronde, discriminant de la déformation semi-universelle de $X^4 = 0$ d'équation:

$$256x^3 - 27y^4 - 128x^2z^2 + 144xy^2z + 16xz^4 - 4y^2z^3 = 0$$

n'a pas de tangentes exceptionnelles et son cône tangent n'est pas qu'un nombre fini de limites d'espaces tangents en 0: car dans [18] (5.5.1) on démontre que sa modification de Nash est sa normalisation qui est lisse. On remarque aussi qu'une section plane générique passant par 0 a le type d'équisingularité de $x^3 + y^4 = 0$ et qu'une section plane

générique proche de 0 mais ne passant pas par 0 est:

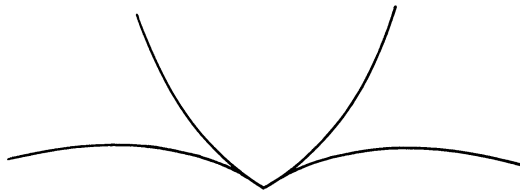


On remarque que dans ce cas le cône tangent de la queue d'aronde est donné par $x^3 = 0$ et n'est pas réduit.

(2.3.2) La surface d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + z^5 = 0$$

n'a pas de tangentes exceptionnelles et son cône tangent n'est pas réduit. Les tangentes au lieu critique d'une projection générique contiennent les génératrices du contour apparent du cône tangent dont la contribution de chacune dans la multiplicité de l'espace critique est 2 parce que la section plane générique passant par l'origine de cette surface a le type d'équisingularité d'une courbe plane composée de deux cusps transverses:



On montrera dans un prochain article que l'union des composantes du lieu critique d'une projection générique dont la tangente est une génératrice non exceptionnelle a le type d'équisingularité de l'union des composantes d'une section plane générique ayant la même tangente.

La contribution du lieu singulier au lieu critique peut être calculée égale à 10 dans ce cas et on trouve ainsi qu'il ne peut pas y avoir de tangentes exceptionnelles, car la contribution totale de l'espace critique est $14 = 10 + 2.2$.

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Laboratoire
de Recherche Associé Au C.N.R.S.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Briançon, J. P. G. Henry, J. P. Speder, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, série A, p. 279 (1976).
- [2] Adrien Douady, "Flatness and privilege," *L'enseignement mathématique*, n° 14 (1968).
- [3] Murray Gerstenhaber, "On the deformation of rings and algebras II," *Annals of Math.*, **84**, n° 1 (1966).
- [4] Helmut Hamm et Lê D. T., "Un théorème de Zariski du type de Lefschetz," *Annales de l'E. N. S.* 1973, p. 317-366.
- [5] J. P. G. Henry et Lê Dũng Tráng, "Limites d'espaces tangents in Fonctions de plusieurs variables complexes II," *Séminaire F. Norguet*, Springer Lecture Notes, n° 482.
- [6] Heisuke Hironaka, "Stratification and flatness. Real and complex singularities," Nordic Summer School Oslo 1976, Noordhoff 1977.
- [7] Steve Kleiman, "The enumerative theory of singularities," *Real and complex singularities*, Oslo 1976, Noordhoff 1977.
- [8] Lê Dũng Tráng, "Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe," *Annales de l'Institut Fourier*, t. XXIII, Fasc. 4 (1973).
- [9] Lê D. T., "Limites d'espaces tangents, à paraître Proc. Symp. on Algebraic singularities," Rheinhardtsbrunn 1978, Academia Leopoldina, Preprint Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 1978.
- [10] Lê D. T., "Topologie des singularités des hypersurfaces complexes," Singularités à Cargèse 1972. Astérisque, n° 7-8, S. M. F., Paris.
- [11] Lê D. T., "Une application d'un théorème d'A'Campo à l'équisingularité," *Indag. Math.* **35**, n° 5 (1973).
- [12] Lê D. T. et C. P. Ramanujam, "The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type." *Amer. Journ. of Math.* **98** (1976), p. 67-68.
- [13] Lê D. T. et Kyoji Saito, "La constance du nombre de Milnor donne de bonnes stratifications," Note aux C. R. Acad. Sc., t. 277 n° 16 (22 Octobre 1973) p. 793.
- [14] Monique Lejeune-Jalabert et Bernard Teissier, "Clôture intégrale des idéaux et équisingularité," Séminaire Ecole Polytechnique 1973-74, Chap. I, publié par l'Institut Fourier, St. Martin d'Hères, 38 (France).
- [15] John Mather, *Notes on topological stability*. Harvard Notes 1970.
- [16] John Milnor, "Singular points of complex hypersurfaces," *Annals of Math. Studies* n° 61 (1968 (Princeton University Press.
- [17] Frédéric Pham, "Singularités planes d'ordre 3. Singularités à Cargèse 1972," Astérisque n° 7-8, S. M. F. Paris.
- [18] Bernard Teissier, "The hunting of invariants in the geometry of discriminants,"

- Real and complex singularities*, Nordic Summer School Oslo 1976, Noordhoff, 1977.
- [19] B. Teissier, "Déformations à type topologique constant II," Séminaire Douady-Verdier E. N. S. 1971-72, Astérisque n° 16, S. M. F. Paris.
- [20] B. Teissier, "Cycles évanescents et résolution simultanée," Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier sur les Singularités des surfaces, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques 1976-77.
- [21] B. Teissier, "Introduction to equisingularity problems," Summer school in Algebraic geometry, Arcata 1974, Proc. A.M.S., Symp. in Pure Math. n° 29, A.M.S. 1975.
- [22] B. Teissier, "Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney," Singularités à Cargèse 1972. Astérisque n° 7-8, S.M.F. Paris.
- [23] B. Teissier, "Appendice au cours de O. Zariski: Modules de branches planes," Ecole Polytechnique Centre de Mathématiques 1973.
- [24] A. N. Varchenko, "Theorems of topological equisingularity," *Isv. Ak. Nauk. SSSR Ser. Mat.* 36 (1972).
- [25] Hassler Whitney, *Local Properties of Analytic Varieties in Differential and Combinatorial Topology*. Princeton University Press, 1965.
- [26] H. Whitney, "Tangents to an analytic variety," *Annals of Maths.*, t. 81 (1965) n° 3, p. 496-549.
- [27] Oscar Zariski, "Studies in equisingularity I, II." *Amer. Journ. of Math.* 87 (1965).
- [28] O. Zariski, "Studies in equisingularity III." *Amer. Journ. of Math.* 90 (1968).
- [29] O. Zariski, "Contributions to the problem of equisingularity," *Problems in Algebraic geometry*, C. I. M. E. Varenna 1969. Edizioni Cremonese, Roma.
-