A PROPOS DES TRAVAUX D'ALBERT LAUTMAN

BERNARD TEISSIER

Lorsque j'ai découvert les écrits d'Albert Lautman dans [4], j'ai immédiatement été très intéressé car cela me semblait bien plus proche de ce que je ressentais comme (jeune) mathématicien que tout ce que j'avais lu jusqu'alors dans le domaine de la philosophie des Mathématiques. Cette idée qu'il fallait s'intéresser à ce qui structurait les mathématiques, à ce qui faisait leur unité sous-jacente, plutôt qu'à des questions comme "le mode d'existence des objets mathématiques" ou à leur seule structure logique. Je crois que j'ai toujours pensé à la logique, disons à la Frege, comme à l'échafaudage qui empêche les bâtisseurs d'une cathédrale de faire une chute mortelle lorsqu'ils font un pas risqué comme celui que fit Cantor. Il ne faut pas confondre l'échafaudage et la cathédrale. L'idée de réduire les Mathématiques à leur structure logique m'a toujours révulsé.

Bien sûr la logique mathématique moderne est d'une autre nature et en particulier explore des objets mathématiques d'un point de vue issu de préoccupations logiques. Par exemple, comment mieux comprendre la complexité des preuves ou le rapport entre le langage et la syntaxe utilisés pour définir axiomatiquement des objets mathématiques et la nature proprement mathématique de ces objets.

Pour revenir à Lautman, j'étais heureux de trouver aussi dans ses écrits l'idée d'une dynamique des mathématiques dont le moteur est en partie la dialectique des concepts et dont le rôle est en partie de rendre manifeste l'unité profonde des Mathématiques. D'autres, bien plus compétents que moi, présenteront la richesse des idées de Lautman, dont je ne perçois qu'une petite partie. Ce que je veux faire ici est exposer ce que je pense être la cause d'une frustration que j'ai ressentie dès mes premières lectures mais dont la cause m'échappait alors.
Cete cause est que pour moi, la Mathématique est une science humaine. Je veux dire par là que son existence et tout son développement dépendent avant tout de notre humanité. C'est d'ailleurs vrai aussi pour la logique, qui sait réféchir sur sa nature même, en prenant en compte ses rapports avec l'informatique théorique (voir [3], et une bonne partie de l'oeuvre de J.-Y. Girard, qui introduit sciemment beaucoup d'humanité dans la logique). L'objectivité des Mathématiques est réelle en ce sens que les énoncés vrais resteraient vrais pour toute entité acceptant les prémisses et les règles logiques mais ces énoncés n'auraient peut-être aucune signification pour cette entité, qui ne les *comprendrait* pas. Une philosophie des Mathématiques qui postule un caractère absolu ou "objectif" de leur naissance et de leur développement est à mon avis dans une ornière.

Or, malgré les grands mérites du travail de Lautman, je n'y ai pas trouvé cette idée. Il se peut qu'elle soit cachée dans des vocables dont je comprends mal le sens philosophique, comme "logique transcendentale" ou "esthétique transcendentale" mais lorsqu'il écrit que *l'objectivité des Mathématiques réside dans leur participation à une réalité plus haute et plus cachée, un monde des idées*, je ne peux pas le suivre s'il attribue vraiment aux idées une existence objective.

Depuis au moins trois décennies, de nombreux chercheurs ont commencé à explorer un nouveau rôle de l'inconscient dans la philosophie des Mathématiques. Cela est dû en grande partie au développement des sciences cognitives, qui permet de commencer à objectiver notre rapport inconscient au monde et de cesser de le dissimuler derrière un rideau de périphrases comme "intuition sensible" ou "réalité". Ces développements auraient certainememt beaucoup intéressé Lautman. Un exemple majeur est le texte [6] de Jean Petitot, qui cite au début le texte suivant de David Hilbert dans *Über das Unendlich*:
Kant avait déjà pour doctrine que les Mathématiques ont un contenu indépendant de la logique et qu'elles ne peuvent être fondées sur la logique seulement; c'est ce qui condamnait d'avance les tentatives de Frege et de Dedekind. La condition préalable à l'usage des inférences logiques est l'existence d'un donné dans la perception.
Je me place résolument dans cette lignée, non en tant que philosophe des sciences, mais en tant que mathématicien intéressé par des questions de nature plutôt philosophique à propos des Mathématiques.

J'ai proposé dans [9] de distinguer, en ce qui concerne les constructions et les résultats mathématiques, les fondements de la vérité et les fondements de la signification. Le problème des fondements de la vérité a donné naissance à de magnifiques développements motivés en grande partie par le souci de rigueur "absolue" donnant la certitude d'éviter les contradictions. Mais comme ces développements sont le fruit d'une réflexion humaine, ils ont bien sûr leur propre signification, qui d'ailleurs depuis quelques décennies se rapproche de la géométrie avec la théorie des topos.

En ce qui concerne la signification, j'ai proposé d'explorer une voie qui n'existait pas du temps de Lautman, et que l'on pourrait appeler la "subjectivité objective". Il s'agit de l'idée que les fondements de la signification se trouvent dans l'énorme quantité d'expérience du monde par nous et nos ancêtres qui est contenue dans notre inconscient et dans la structure de notre cerveau. Et cette expérience du monde est suffisamment stable quand on passe d'un individu à l'autre pour que nous puissions échanger des "assemblages de signification" très complexes. C'est dans cette stabilité, qui est un fait d'expérience, que réside à mon sens l'objectivité de ce que nous appelons des idées.
Ce qui m'a conduit dans cette direction est la constatation que comprendre un énoncé ou sa démonstration est de la nature d'une illumination et non le résultat d'un cheminement logique. Et ce qui m'a encouragé à continuer est le développement des sciences cognitives. Il me semble que nous comprenons une démonstration quand nous avons extrait du texte un tissu d'interprétations en cascade des objets mathématiques impliqués en termes de notre expérience primitive du monde qui est compatible avec cette expérience.

C'est pendant notre formation de mathématicien, et plus tard dans la pratique, que nous apprenons à donner sens à des objets mathématiques complexes, en termes de notre expérience inconsciente du monde et aussi bien sûr de notre expérience des Mathématiques elles-mêmes. C'est cette manière de donner sens qui fait que nous *comprenons* au sens étymologique, des objets très complexes. C'est à cause du lien très étroit entre notre perception du monde, la manière dont cette perception a modelé notre cerveau, et la création des Mathématiques, que je pense qu'il est absurde, en principe, de s'étonner comme Wigner de "The unreasonable effectiveness of Mathematics". C'est s'étonner que l'écorce colle à l'arbre. Mais évidemment les processus qui conduisent à cette "unreasonable effectiveness" restent extrêmement mystérieux et fascinants.

Mon exemple favori, développé dans [9], est que notre perception inconsciente du monde contient deux définitions de la droite: la droite vestibulaire, qui correspond à un état extremal d'une assemblée de neurones quand nous marchons à vitesse constante dans une direction fixe, et la droite visuelle, qui correspond à un état extremal d'une autre assemblée de neurones du cortex visuel lorsque notre oeil détecte un segment de droite. Et notre système perceptif inconscient établit une correspondance entre les deux, que j'ai appelée "Isomorphisme de Poincaré-Berthoz" (voir [1], [2]) et qui permet par exemple de représenter le temps (qui est une mesure provenant de la droite vestibulaire) comme paramétrant la droite réelle, qui vient de la droite visuelle. Cette fusion perceptive de la droite vestibulaire avec la droite visuelle est l'origine, à mon avis, de beaucoup de développements mathématiques. Einstein disait qu'une de ses intuitions fondamentales était de se déplacer sur un rayon de lumière. Je dirais qu'Einstein avait une relation particulièrement riche avec son inconscient perceptif. Notre système perceptif relie ainsi, à sa manière, le discret et le continu. En vertu du principe de relativité, la progression sur la droite vestibulaire ne peut être mesurée que de deux manières: une mesure continue par la distance parcourue ou le temps passé, en supposant connue la vitesse (c'est à 30 minutes de marche d'ici) et d'autre part le nombre de pas, qui est une mesure discrète. Il me semble voir là l'origine de la question de savoir si le temps, ou le continu, est formé d'indivisibles et en même temps l'origine du concept de trajectoire. En rapport avec cette question des indivisibles, les mathématiciens voulaient comprendre ce qui rend le continu différent d'un ensemble de points "en vrac"; est-ce la structure d'ensemble ordonné (les pas du marcheur ou le temps) et le fait qu'il est un ensemble de frontières (les coupures de Dedekind) ? Cela est vraiment proche de la proto-pensée et a finalement conduit à la théorie des ensembles!
Identifier le continuum visuel avec le continuum temporel a des conséquences énormes, comme le concept de trajectoire paramétrée par le temps. Et il y a beaucoup plus, rien que dans notre système visuel (voir [8], [7]). Par exemple notre système visuel est construit de manière à détecter, dans notre perception de l'espace, le transport parallèle d'Elie Cartan.

Par ailleurs, il me semble que la dialectique, concept philosophique bien compris, est loin d'être le seul moteur du développement des Mathématiques. Il y a me semble-t-il tout un éventail de pulsions primitives, pour la plupart inconscientes, dont j'ignore si elles sont "câblées" dans notre cerveau, mais qui sont également assez stables quand on passe d'un individu à l'autre. Appelons cela la "pensée primitive" ou "proto-pensée"[1]. Voici des exemples:

- Comparer des objets comparables: au vu de deux objets, je sais immédiatement lequel est plus gros, lequel est plus loin, *sans me poser la question.*
- Détecter des régularités, détecter des traits analogues dans des objets. Détecter la répétition des résultats d'expériences semblables. Faire mentalement des itérations.
- Capacité de projeter des représentations mentales, de simplifier et surtout d'abstraire même en l'absence de langage.
- Une recherche obstinée des causes, des origines, et plus généralement, une *curiosité* insatiable. Bon nombre de problèmes sont du type: si A implique B, est-il vrai que B implique A?

Cette liste est loin d'être exhaustive, et l'étude de cette proto-pensée serait fascinante. Nous en partageons une partie avec les primates.

A nouveau, il me semble que refuser d'admettre le rôle de cette proto-pensée dans le développement des Mathématiques laisse la réflexion dans une ornière. Par exemple, notre expérience primitive du monde comprend les ombres, et leur forme abstraite est la projection. Il me semble que la "montée vers l'absolu", que Lautman a eu le mérite d'identifier parmi les mouvements importants des Mathématiques, fait sens pour nous à cause de cela et du désir de simplification.

De même, l'expérience primitive de la marche et la proto-pensée de l'itération font que nous pouvons sans trop de difficulté donner un sens au concept d'infini même si ses propriétés peuvent faire débat et si la question de "l'existence de l'infini" n'a pu être résolue qu'assez tardivement - et d'ailleurs magnifiquement - dans un cadre mathématique.

Si pour nous l'idée de "marcher indéfiniment dans la même direction" fait sens, celle "d'avoir marché indéfiniment jusqu'ici" n'est pas acceptable aussi facilement (problème de l'origine) et il me semble qu'il faut chercher là, et dans l'apparition relativement récente de la soustraction comme opération susceptible d'itération, la source de la signification de la notion d'ensemble bien ordonné.

Pour conclure, il me semble que, étant donné le développement des sciences cognitives, la philosophie des Mathématiques, si elle se veut aussi proche de la nature même des Mathématiques que celle de Lautman, ne peut manquer de s'intéresser au rôle que jouent les proto-objets mathématiques comme le proto-continuum créé par l'isomorphisme de Poincaré-Berthoz ainsi que les proto-pensées dont j'ai énuméré une petite partie. Je précise, s'il est nécessaire, qu'il ne s'agit nullement d'une approche réductionniste. Je suis convaincu que les processus en jeu du point de vue physiologique sont d'une complexité qui littéralement dépasse l'entendement et que nous ne pouvons avoir qu'une vision assez floue de la manière dont ils influencent les Mathématiques. Mais cette vision serait déjà passionnante !

[1]Motivé par la "vision de bas niveau" des spécialistes de la physiologie de la vision, dans [9] j'avais utilisé le vocable "pensée de bas niveau" mais cela avait suscité des erreurs d'interprétation.

Je remercie chaleureusement les organisateurs du colloque de m'avoir permis d'exprimer ces réflexions d'un non-philosophe.

References

[1] A. Berthoz, Le cerveau, le mouvement, et les espaces, in *Neurosciences cognitives*, sous la direction de Mehdi Khamassi, éditions De Boeck Supérieur, 2021, 25-55.
[2] A. Berthoz, La marche, le cerveau, et l'espace, les géométries du corps en marche, in *Le génie de la Marche* sous la direction de Sabine Chardonnet Darmaillacq, coll. Colloque de Cerisy, Hermann, 2016, 295-315.
[3] J.-Y. Girard, *Le point aveugle (2 volumes)*, Hermann, 2006-2007.
[4] A. Lautman, *Essai sur l'unité des Mathématiques et divers écrits*, Union Générale d'Edition, Paris 1977.
[5] J. Petitot, *Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman*, Revue d'Histoire des Sciences, XL, 1, 79-115 (1987).
[6] J. Petitot, Continu et objectivité, in *Le labyrinthe du continu*, Colloque de Cerisy, J.-M. Salanskis et H. Sinaceur, éditeurs, Springer, 1992.
[7] J. Petitot, *Neurogéométrie de la vision* Les Editions de l'Ecole Polytechnique, 2008.
[8] J. Petitot et Y. Tondut, *Vers une Neuro-géométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux*, Numéro spécial de Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines, 145, 5-101, EHESS, Paris.
[9] B. Teissier, Géométrie et Cognition: l'exemple du continu, in *Ouvrir la logique au monde", actes de l'Ecole thématique CNRS-LIGC " Logique et interaction; vers une géométrie du cognitif*, Cerisy Septembre 2006, dirigée par J.-B. Joinet et S. Tronçon, Hermann, "Visions des sciences", Paris 2009. Disponible par: https://webusers.imj-prg.fr/ bernard.teissier/documents/Cerisy06final5.pdf
[10] B. Teissier, Mathematics and Narrative: why are stories and proofs interesting?, in *Circles disturbed: the interplay of Mathematics and Narrative*, edited and introduced by Apostolos Doxiadis and Barry Mazur, Princeton University Press, 2012. Disponible par: https://webusers.imj-prg.fr/ bernard.teissier/documents/Teissier.corr.doc

Bernard Teissier

Université Paris Cité and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France
bernard.teissier@imj-prg.fr