VI APPENDICE : SATURATION DES ALGÈBRES ANALYTIQUES LOCALES DE DIMENSION UN (D'APRÈS F. PHAM ET B. TEISSIER)

---

§ 0. INTRODUCTION :

Soit $C \subset (\mathbb{C}^N,0)$ un germe de courbe analytique complexe réduite d'anneau local A. On se propose de montrer comment le critère valuatif de dépendance intégrale ([T_4]) permet de déterminer la structure du saturé Lipschitzien $\widetilde{A}$ de A au sens de F. Pham et B. Teissier ([P.T.]).

Soit I_A le noyau de l'homomorphisme $\overline{A} \underset{\mathbb{C}}{\hat{\otimes}} \overline{A} \longrightarrow \overline{A} \underset{A}{\otimes} \overline{A}$ où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel analytique et $\overline{A}$ le normalisé de A ; rappelons la définition du saturé de A :

DEFINITION VI.0.1. ([P.T]) :

Le saturé Lipschitzien de A est le sous anneau $\widetilde{A}$ de $\overline{A}$ formé des $f \in \overline{A}$ tels que $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ soit dans la clôture intégrale $\overline{I_A}$ de I_A.

Soient $C_1,\dots,C_r$ les branches de C, A_i l'anneau local de C_i ; on a $\overline{A} \approx \bigoplus_{i=1}^{r} \overline{A}_i$; si x est un paramètre transverse de A ([Z_2]), on peut trouver $t_i \in \overline{A}_i$ tel que $\overline{A}_i = \mathbb{C}\{t_i\}$(uniformisante de A_i) et on peut supposer que $x = t_1^{\nu_1} \oplus \dots \oplus t_r^{\nu_r}$ grâce à l'identification $A \subset \overline{A} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}$ (ν_i est la multiplicité de C_i). On appelle $(t_1,\dots,t_r)$ une bonne famille d'uniformisantes et $t_1=t$ une bonne uniformisante si $r=1$.

Soit ($z_p = \bigoplus_{i=1}^{r} z_{p,i}$; $p = 1,\dots,N$) un système de générateurs de l'idéal maximal m de A ; l'idéal I_A est engendré par les éléments $z_p \otimes 1 - 1 \otimes z_p$, $p=1,\dots,N$.

Soit $I_A^{(i,j)}$ l'idéal de $\mathbb{C}\{t_i,t_j'\}$ engendré par les éléments $z_{p,i}(t_i) - z_{p,j}(t_j')$ $p = 1,\dots,N$.

on a : $\overline{A} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \overline{A} = \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}\{t_i,t'_j\}$ et $I_A = \bigoplus_{i,j} I_A^{(i,j)}$.

Un élément $f = f_1 \oplus \ldots \oplus f_r$ de $\overline{A}$ est dans $\widetilde{A}$ si et seulement si pour tout couple (i,j) on a : $f_i \otimes 1 - 1 \otimes f_j \in \overline{I_A^{(i,j)}}$.

D'après le critère valuatif de dépendance intégrale cette dernière condition équivaut à la condition suivante notée $(P_{i,j})$:

$(P_{i,j})$ Pour tout homomorphisme local $b : \mathbb{C}\{t_i,t'_j\} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\}$ de valuation associée v :

$$v(f_i(t_i) - f_j(t'_j)) \geq v(I_A^{(i,j)}).$$

La description du saturé d'une algèbre analytique A aboutit au résultat suivant démontré au §.3.

THÉORÈME VI.0.2.

Deux germes C et D de courbes analytiques complexes réduites d'anneaux locaux A et B ont des saturés $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ isomorphes si et seulement si leurs projections planes génériques sont topologiquement équivalentes (ou (a)-équivalentes au sens de $[Z_1]$).

Précisément nous montrons que si A est l'algèbre d'une branche irréductible C, son saturé $\widetilde{A} \subset \mathbb{C}\{t\}$ est engendré par des monômes déterminés par les exposants caractéristiques de la projection plane générique de C (théorème VI.1.6, proposition VI.3.1 et lemme VI.3.3).

Dans le cas réductible, nous montrons que pour deux branches distinctes C_i et C_j, la condition $(P_{i,j})$ n'a à être vérifiée que pour un nombre fini de valuations bien définies, si on sait déjà que $f_i \in \widetilde{A_i}$ pour $i=1\ldots r$ (théorème VI.2.2) et même une seule valuation (lemme VI.3.6). Nous démontrons au passage qu'une fraction Lipschitzienne sur une branche C_i se prolonge en une fraction Lipschitzienne sur C (lemme VI.3.7). Ceci nous permet alors de déterminer le saturé $\widetilde{A}$ de A en fonction des exposants caractéristiques des branches de la projection plane générique de C et de la multiplicité d'intersection de ces branches deux à deux (proposition VI.3.1 et VI.3.2). Et réciproquement la donnée de $\widetilde{A}$ permet de calculer ces invariants numériques.

§ 1. CAS IRRÉDUCTIBLE :

Dans le cas r=1, on choisit une bonne uniformisante t de A et on a : $\overline{A} = \mathbb{C}\{t\}$, $\overline{A}\,\hat{\otimes}_{\mathbb{C}}\,\overline{A} = \mathbb{C}\{t,t'\}$. Etant donné $f = \sum_{p \geq 0} a_p\, t^p \in \overline{A}$ on a

$f \otimes 1 - 1 \otimes f = \sum_{p \geq 0} a_p(t^p - t'^p)$, ce qui nous conduit à étudier les valuations des éléments de la forme $t^p - t'^p$:

LEMME VI.1.1. :

a) A tout homomorphisme local $b : \mathbb{C}\{t,t'\} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\}$ sont associés deux entiers $e \geq 0$, $v_0 > 0$, et, lorsque $e > 0$, un entier $v_1 > v_0$ ou $v_1 = \infty$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on ait :

$$v(t^p - t'^p) = p\, v_0 \text{ si } e \text{ ne divise pas } p$$

$$v(t^p - t'^p) = (p-1)\, v_0 + v_1 \text{ si } e \text{ divise } p$$

b) Inversement, étant donnés e, v_0, v_1 satisfaisant les conditions de a), on peut trouver b tel que les valuations des éléments $t^p - t'^p$ soient données par les formules précédentes.

PREUVE :

a) On note $v_0 = \inf(v(t), v(t'))$ et on distingue deux cas :

- si pour tout p, $v(t^p - t'^p) = p\, v_0$, on prend $e = 0$
- sinon il existe ξ racine de l'unité d'ordre e telle que $v(t' - \xi t) = v_1 > v_0$

et e, v_0, v_1 satisfont a).

b) il suffit de prendre $b(t) = u^{v_0}$, $b(t') = \xi u^{v_0} + u^{v_1}$ où ξ est une racine de l'unité d'ordre $e > 0$, ou $\xi = 0$ si $e = 0$.

DÉFINITION VI.1.2. :

Soit $f = \sum_{p \geq 0} a_p\, t^p \in \overline{A}$. On appelle ensemble des exposants de f l'ensemble d'entiers $Ex(f) = \{p \in \mathbb{N} \;/\; a_p \neq 0\}$.

On appelle ensemble des exposants de $A = E(A) = \bigcup_{f \in m} Ex(f)$.

LEMME VI.1.3. :

Tout monôme t^p tel que $p \in E(A)$ est un élément de $\tilde{A}$.

PREUVE :

Raisonnons par récurrence. Soit $q \in E(A)$ tel que, pour tout $p < q$ tel que $p \in E(A)$, on ait $t^p \in \tilde{A}$; soit A_1 l'anneau engendré par A et les monômes t^p pour $p \in E(A)$, $p < q$. D'après l'hypothèse de récurrence et le fait que $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$, $\tilde{A}_1 = \tilde{A}$, et il suffit donc de montrer que, pour toute valuation v de $C\{t,t'\}$, $v(t^q - t'^q) \geq v(I_{A_1})$.

Distinguons, d'après le lemme VI.1.1, deux cas :

1) si $v(t^q - t'^q) = qv_0$, il existe $f = t^q + \sum_{s > q} a_s t^s \in A_1$.

Donc : $v(t^q - t'^q) = qv_0 = v(f(t) - f(t')) \geq v(I_{A_1})$.

2) sinon $v(t^q - t'^q) = (q-1)\, v_0 + v_1 \geq (\nu-1)v_0 + v_1 \geq v(t^\nu - t'^\nu) \geq v(I_{A_1})$

où ν est la multiplicité de A (et $t^\nu \in A \subset A_1$).

COROLLAIRE VI.1.4. :

L'anneau A est monomial : $\tilde{A} = \mathbb{C}\{t^p \;;\; p \in E(\tilde{A})\}$

DÉFINITION VI.1.5. :

Soit E une partie de $\mathbb{N}^*$. On note $E_q = \{p \in E,\ p \leq q\}$ et on appelle saturé de E l'ensemble $\tilde{E} = \{q \in \mathbb{N}^* \,/ q$ multiple du pgcd des éléments de $E_q\}$.

Soit $e_0 = \beta_0 = \inf\{p \in E\}$, $\tilde{E}_0 = E \cup \beta_0 \mathbb{N}^*$ et définissons deux suites d'entiers $e_0 > e_1 > \ldots > e_g = \text{pgcd}\,\{p / p \in E\}$ et $\beta_0 < \beta_1 \ldots < \beta_g$, ainsi qu'une suite $\tilde{E}_0 \subset \ldots \subset \tilde{E}_g$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ par les formules suivantes :

$\beta_{i+1} = \inf\{p \in E \,/\, e_i$ ne divise pas $p\}$, $e_{i+1} = \text{pgcd}\,\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i+1}\}$ et

$\tilde{E}_{i+1} = \tilde{E}_i \cup \{\beta_{i+1} + e_{i+1}\mathbb{N}^*\}$.

On a $\tilde{E} = \tilde{E}_g = \{\beta_0,\beta_1\ldots,\beta_g\}^{\sim}$ et on appelle $\{\beta_0,\ldots\beta_g\}$ la suite caractéristique de E (de A si E = E(A)).

THÉORÈME VI.1.6. :

Soit $A \subset \bar{A} = \mathbb{C}\{t\}$ l'anneau d'un germe de courbe analytique irréductible muni d'une bonne uniformisante t. Le saturé de A est l'anneau monomial $\tilde{A} = \mathbb{C}\{t^p \ / \ p \in \widetilde{E(A)}\}$.

Ainsi le saturé de A est déterminé à isomorphisme près par la suite caractéristique de A (qui est aussi celle de $\widetilde{E(A)}$).

PREUVE :

il s'agit de montrer que $\widetilde{E(A)} = E(\tilde{A})$. Soit v une valuation de $\mathbb{C}\{t,t'\}$, v_0, v_1, e les entiers associés à v par le lemme VI.1.1 et $i_e = \inf\{k/e$ ne divise pas $\beta_k\}$.

Remarquons que, d'après le lemme VI.1.3 : $v(I_A) = \inf\{v(t^p-t'^p)/p \in E(A)\}$.

Soit $p \in \widetilde{E(A)}$ on a :

1) si $p < \beta_{i_e}$, $v(t^p-t'^p) = (p-1)v_0+v_1 \geq (\beta_0-1)v_0+v_1 = v(t^{\beta_0}-t'^{\beta_0})$.

2) si $p \geq \beta_{i_e}$, $v(t^p-t'^p) \geq p\ v_0 \geq \beta_{i_e} v_0 = v(t^{\beta_{i_e}} - t'^{\beta_{i_e}})$.

Il en résulte que $v(t^p-t'^p) \geq v(I_A)$, donc $t^p \in \tilde{A}$ et $\widetilde{E(A)} \subset E(\tilde{A})$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, remarquons que ces formules appliquées à tous les $p \in E(A)$ montrent que :

$$v(I_A) = \inf(\beta_{i_e} v_0 \ ; \ (\beta_0-1)v_0 + v_1)$$

si $q \notin \widetilde{E(A)}$, il s'agit de montrer que $q \notin E(\tilde{A})$ ou $t^q \notin \tilde{A}$:

soit $i \in \{0,\ldots,g\}$ défini par $\beta_{i-1} < q < \beta_i$ (par convention $\beta_{-1} = 0$) ; on note $e = e_{i-1}$ si $i \geq 1$, e=0 si i=0 et on remarque que $i=i_e$ et e ne divise pas q.

D'après le lemme VI.1.1 il existe une valuation v de $\mathbb{C}\{t,t'\}$ telle que :

$$v(t^q-t'^q) = q\ v_0 < \beta_{i_e} v_0 < (\beta_0-1)v_0 + v_1$$

donc $v(t^q-t'^q) < v(I_A)$ et $t^q \notin \tilde{A}$.

§ 2. CAS RÉDUCTIBLE :

Choisissons une bonne famille d'uniformisantes $(t_1,\dots,t_r)$ de A, et $\mu = \mu_i \ \nu_i$ $(1 \leq i \leq r)$ un multiple commun à toutes les multiplicités. Pour toute branche C_i, définissons l'homomorphisme local $\varphi_i : \overline{A}_i = \mathbb{C}\{t_i\} \longrightarrow \mathbb{C}\{\tau\}$ $\varphi_i(t_i) = \tau^{\mu_i}$.

Soient C_i et C_j deux branches distinctes :

DÉFINITION VI.2.1. :

pour toute racine μ-ième de l'unité, ε, et tout $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_r \in \overline{A}$, nous appelons ε-valuation de f le nombre

$$m_{i,j,\varepsilon}(f) = v_\tau\left[\varphi_i(f_i)(\tau) - \varphi_j(f_j)(\varepsilon\tau)\right] = v_\tau\left[f_i(\tau^{\mu_i}) - f_j\left((\varepsilon\tau)^{\mu_j}\right)\right]$$

et ε-valuation de A le nombre $m_{i,j,\varepsilon} = \inf\{m_{i,j,\varepsilon}(f) \ ; \ f \in A\}$.

THÉORÈME VI.2.2 :

Soit $A \subset \overline{A} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}$ une algèbre analytique réduite de dimension un, munie d'une bonne famille d'uniformisantes $(t_1,\dots,t_r)$. Pour que $f = f_1 \oplus \dots \oplus f_r \in \overline{A}$ soit un élément de $\tilde{A}$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(a) Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, $f_i \in \tilde{A}_i$.

(b) Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,r\}^2$, $i \neq j$, et tout ε racine μ-ième de l'unité $m_{i,j,\varepsilon}(f) \geq m_{i,j,\varepsilon}$.

REMARQUE :

Nous verrons (lemme VI.3.6) après l'étude du saturé des germes de courbes planes que cette dernière condition peut être remplacée par la seule condition (b') suivante pour (i,j) fixé et $\underline{\varepsilon}$ racine μ-ème de l'unité telle que

$m_{i,j,\underline{\varepsilon}} = \sup\{m_{i,j,\varepsilon} \ ; \ \varepsilon^\mu = 1\}$: (b') $m_{i,j,\underline{\varepsilon}}(f) \geq m_{i,j,\underline{\varepsilon}}$.

D'autre part, il résulte de (a) et du théorème VI.1.6 que A et $\tilde{A}$ ont même multiplicité.

PREUVE DU THÉORÈME VI.2.2.

La condition $(P_{i,i})$ de l'introduction équivaut à $f_i \in \tilde{A}_i$ car $I_A^{(i,i)} = I_{A_i}$ et la condition (a) du théorème est donc nécessaire.

Pour deux entiers (i,j) distincts parmi $\{1,\dots,r\}$ et v une valuation de $\mathbb{C}\{t_i,t_j'\}$ définie par l'homomorphisme local $b : \mathbb{C}\{t_i,t_j'\} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\}$, distinguons deux cas :

1er Cas :

$v(t_i^{\nu_i} - t_j'^{\nu_j}) = \inf(v(t_i^{\nu_i}), v(t_j'^{\nu_j})) = v(I_A^{(i,j)})$;

comme A_i et $\tilde{A}_i$ (resp. A_j et $\tilde{A}_j$) ont la même multiplicité ν_i (resp. ν_j), la condition $(P_{i,j})$ pour une telle valuation équivaut à $f_i(0) = f_j(0)$.

2ème Cas :

$v(t_i^{\nu_i} - t_j'^{\nu_j}) > \inf(v(t_i^{\nu_i}), v(t_j'^{\nu_j}))$.

Cette condition implique $\nu_i v_i = \nu_j v_j$ où $v_i = v(t_i)$ et $v_j = v(t_j)$.

Notons $\psi : \mathbb{C}\{t_i,t_j'\} \longrightarrow \mathbb{C}\{\tau,\tau'\}$ l'homomorphisme défini par $\psi(t_i) = \tau^{\mu_i}$, $\psi(t_j') = \tau'^{\mu_j}$; E et F les unités de $\mathbb{C}\{u\}$ telles que $b(t_i) = u^{v_i}E$ et $b(t_j') = u^{v_j}F$.

Nous pouvons choisir alors un homomorphisme $\tilde{b} : \mathbb{C}\{\tau,\tau'\} \longrightarrow \mathbb{C}\{u\}$:

$\tilde{b}(\tau) = u^{\nu_i v_i}[E(u^\mu)]^{1/\mu_i}$ et $\tilde{b}(\tau') = u^{\nu_j v_j}[F(u^\mu)]^{1/\mu_j}$.

On vérifie alors :

$\tilde{b}\circ\psi\,(t_i) = u^{\mu v_i}\,E(u^\mu) = b(t_i)(u^\mu)$

$\tilde{b}\circ\psi\,(t_j') = u^{\mu v_j}\,F(u^\mu) = b(t_j')(u^\mu)$

Autrement dit, si $\tilde{v}$ est la valuation de $\mathbb{C}\{\tau,\tau'\}$ associée à $\tilde{b}$:

$$\tilde{v} \circ \psi = \mu v.$$

La condition sur v devient, pour $\tilde{v}$:

$\tilde{v}(\tau^\mu - \tau'^\mu) > \mu\tilde{v}(\tau) = \mu\tilde{v}(\tau') = \mu v_0$, et il existe une unique racine μ-ième de l'unité, ε, telle que $v(\tau'-\varepsilon\tau) = v_1 > v_0$ (lemme VI.1.1).

Notons encore $\tilde{v}_\varepsilon$ la valuation de $\mathbb{C}\{\tau,\tau'\}$: $\tilde{v}_\varepsilon(h) = v_\tau(h(\tau,\varepsilon\tau))$:
on a alors $\tilde{v}_\varepsilon \circ \psi(f_i(t_i) - f_j(t_j')) = m_{i,j,\varepsilon}(f)$.

Reprenons maintenant la démonstration du théorème VI.2.2 : la condition (b) est également nécessaire puisqu'elle exprime la condition $(P_{i,j})$ pour les valuations $v_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon \circ\psi$ de $\mathbb{C}\{t_i,t_j'\}$.

Pour la réciproque nous avons besoin du lemme :

<u>LEMME VI.2.3</u> :

Soit v une valuation de $\mathbb{C}\{t_i,t_j'\}$ satisfaisant à la condition du 2ème cas, $\tilde{v}$ la valuation de $\mathbb{C}\{\tau,\tau'\}$ associée, et ε l'unique racine μ-ième de l'unité pour laquelle $\tilde{v}(\tau'-\varepsilon\tau) > \tilde{v}(\tau') = \tilde{v}(\tau) = v_0$.
On a alors $\mu\ v(I_A^{(i,j)}) = \inf\ (m_{i,j,\varepsilon}\ v_0,\ \ \tilde{v}(\tau^\mu-\tau'^\mu))$.

<u>PREUVE DU LEMME</u> :

Pour tout $f\in \overline{A}$, il existe des germes U et g de $\mathbb{C}\{\tau,\tau'\}$, U inversible, tels que :

(1) $\psi(f_i(t_i) - f_j(t_j')) = \tau^{m_{i,j,\varepsilon}(f)} U + (\tau'-\varepsilon\tau)\ g(\tau,\tau')$

Lorsque $f \in \tilde{A}_1 \oplus\ldots\oplus \tilde{A}_r$, $g(\tau,\tau')\in (\tau,\tau')^{\mu-1}$ et par conséquent :

(2) $\mu\ v(f_i(t_i) - f_j(t_j')) = \tilde{v}(\psi(f_i(t_i) - f_j(t_j')) \geq \inf\ (m_{i,j,\varepsilon}(f)\ v_0,\ \tilde{v}(\tau^\mu-\tau'^\mu))$

Donc en particulier :

$\mu\ v(I_A^{(i,j)}) = \mu\ \inf\{\ v(f_i(t_i) - f_j(t_j'))\ ;\ f\in A\} \geq \inf\ (m_{i,j,\varepsilon}(f)\ v_0,\ \tilde{v}(\tau^\mu-\tau'^\mu))$

On en déduit l'égalité du lemme car il est clair que
$\tilde{v}(\tau^\mu-\tau'^\mu) = \mu\ v(t_i^{\nu_i} - t_j'^{\nu_j}) \geq \mu v\ (I_A^{(i,j)})$ et il existe $f\in A$ tel que $m_{i,j,\varepsilon}(f) = m_{i,j,\varepsilon}$; donc, si $m_{i,j,\varepsilon}\ v_0 < \tilde{v}(\tau^\mu-\tau'^\mu)$,
$\mu\ v(I_A^{(i,j)}) \leq \mu v(f_i(t_i) - f_j(t_j')) = m_{i,j,\varepsilon}\ v_0$ d'après (1).

PREUVE DE (a) et (b) $\Longrightarrow f \in \mathcal{X}$:

D'après (a), $f \in \mathcal{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_r$.

L'inégalité $m_{i,j,\varepsilon}(f) \geq m_{i,j,\varepsilon} > 0$ entraine $f_i(0) = f_j(0)$ et la condition $(P_{i,j})$ est satisfaite pour les valuations du 1er cas.

Dans le 2ème cas on a, d'après le lemme VI.2.3, (2) et (b) :

$$\begin{aligned}\mu\, v(f_i(t_i) - f_j(t'_j)) &\geq \inf (m_{i,j,\varepsilon}(f)\, v_0, v(\tau^{\mu}-\tau'^{\mu}))\\ '' \quad &\geq \inf (m_{i,j,\varepsilon}\, v_0,\ v(\tau^{\mu}-\tau'^{\mu}))\\ '' \quad &\geq \mu\, v(I_A^{(i,j)}).\end{aligned}$$

§ 3. SATURATION DES COURBES PLANES ET PROJECTIONS PLANES GÉNÉRIQUES.

Nous reprenons les notations du chapitre IV.

PROPOSITION VI.3.1.:

Il existe un ouvert de Zariski V de $\mathcal{G}$ tel que, si $H \in V$, $A' = \Pi_H^*(A)$ a le même saturé que A. (A' désigne l'algèbre de la projection $\Pi_H(C)$).

PREUVE :

Il existe un ouvert de Zariski $V^{(i,j)}$ de $\mathcal{G}$ tel que, si $H \in V^{(i,j)}$, l'idéal de définition $I_A^{(i,j)}$ de $\mathbb{C}\{t_i, t'_j\}$ qui est engendré par

$\{\omega_k = z_{k,i}(t_i) - z_{k,j}(t'_j)\ ;\ k=1,\ldots,N\}$ ait même multiplicité que l'idéal engendré par $\{a_1\,\omega_1 + \ldots a_N\,\omega_N,\ b_1\,\omega_1 + \ldots + b_N\,\omega_N\}$ (H étant défini par les équations $a_1 z_1 + \ldots a_N\, z_N = b_1\, z_1 + \ldots + b_N\, z_N = 0$) c'est à dire $I_{A'}^{(i,j)}$. Il en résulte, d'après [R] , que $I_A^{(i,j)}$ et $I_{A'}^{(i,j)}$ ont même cloture intégrale et donc, si $H \in V = \bigcap_{i,j} V^{(i,j)}$, A et A' ont même saturé. ■

On se propose maintenant de démontrer un résultat pour un germe de courbe plane C ; de ce résultat et de la proposition précédente on déduit aussitôt le théorème VI.0.2. Dorénavant la courbe C est donc supposée plane.

PROPOSITION VI.3.2.

Soit A l'anneau local d'un germe de courbe plane réduite C. Son saturé $\tilde{A}$ est déterminé (à isomorphisme analytique près) par les exposants caractéristiques de ses branches ([Z1] ,[Z8]) et par les multiplicités d'intersection $m_{i,j} = (C_i;C_j)$ des branches deux à deux.

Inversement la donnée de $\tilde{A}$ détermine ces invariants numériques.

Remarquons que ce résultat implique que l'ouvert V de la proposition VI.3.1 n'est autre que l'ouvert Ω des directions de projections génériques de C.

LEMME VI.3.3 :

La proposition VI.3.2 est vraie lorsque C est irréductible.

PREUVE :

Soit $(x = t^{\beta_0},\ y = \sum\limits_{p \geq \beta_0} a_p\, t^p)$ la normalisation de C et $\{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_g\}$ les exposants caractéristiques de C définis par les formules de récurrence :

$\beta_i = \inf \{k \in \mathbb{N}\ ;\ a_k \neq 0$ et $e_{i-1} = \text{pgcd}\ (\beta_0,\dots,\beta_{i-1})$ ne divise pas k$\}$

On a : $\widetilde{E(A)} = \{\{\beta_0\} \cup E_x(y)\}^{\sim} = \{\beta_0,\dots,\beta_g\}^{\sim}$ et $\{\beta_0,\dots,\beta_g\}$ coincide avec la suite caractéristique de A qui détermine $\tilde{A}$ à isomorphisme près (théorème VI.1.6).

Inversement $\widetilde{E(A)}$ est le semi-groupe de $\tilde{A} \subset \mathbb{C}\{t\}$, donc est un invariant analytique de $\tilde{A}$ ([T3]) ; il en est donc de même de $\{\beta_0,\dots,\beta_g\}$. ■

Dans le cas réductible, soit $(x_i = t_i^{\nu_i},\ y_i = \sum\limits_{p \geq \nu_i} \alpha_p^i\, t_i^p)$ la normalisation de la i-ème branche de C (i=1,..,r) et $\varphi_i(x_i) = \tau^{\mu}$; $\varphi_i(y_i) = \sum\limits_{k \geq \mu} a_k^i\, \tau^k$.

Remarquons que la suite caractéristique de $\{\varphi_i(x_i),\varphi_i(y_i)\}$ est exactement le produit par μ_i de la suite caractéristique de A_i. D'autre part, d'après la définition VI.2.1, pour deux branches distinctes C_i et C_j,

$m_{i,j,\varepsilon} = v_\tau\ (\varphi_i(y_i)(\tau) - \varphi_j(y_j)(\varepsilon\tau)) = \inf\{k\ ;\ a_k^i \neq \varepsilon^k a_k^j\}$.

Les nombres $m_{i,j,\varepsilon}$ mesurent la distance entre deux feuilles des revêtements ramifiés C_i et C_j au-dessus de l'axe des x :

LEMME VI.3.4. :

La multiplicité d'intersection $m_{i,j}$ de deux branches C_i et C_j est donnée, en fonction des ε-valuations de A, par :

$$m_{i,j} = \frac{1}{\mu_i \; \mu_j} \sum_{\varepsilon^{\mu} = 1} m_{i,j,\varepsilon}$$

PREUVE :

Soit v_x la valuation naturelle de $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{\tau\}$.

On a :

$$m_{i,j} = v_x \Big(\prod_{\varepsilon^{\nu_i} = \eta^{\nu_j} = 1} (y_i(\varepsilon\tau^{\mu_i}) - y_j(\eta\tau^{\mu_j}))$$

$$m_{i,j} = \frac{1}{\mu\,\mu_i\mu_j} \sum_{\varepsilon^{\mu} = \eta^{\mu} = 1} v_\tau\left[y_i((\varepsilon\tau)^{\mu_i}) - y_j((\eta\tau)^{\mu_j})\right]$$

$$m_{i,j} = \frac{1}{\mu\,\mu_i\;\mu_j} \sum_{\varepsilon^{\mu} = \eta^{\mu} = 1} m_{i,j,\eta/\varepsilon} = \frac{1}{\mu_i\;\mu_j} \sum_{\varepsilon^{\mu}=1} m_{i,j,\varepsilon} \qquad \blacksquare$$

Nous allons préciser la valeur des nombres $m_{i,j,\varepsilon}$ lorsque ε décrit les racines μ-ème de l'unité, pour deux branches distinctes C_i et C_j. Notons $\{\beta_0^i = \mu,\ \beta_1^i,\ldots,\beta_{g_i}^i\}$ la suite caractéristique de $\varphi_i(A_i)$: c'est le produit par μ_i de la suite des exposants caractéristiques de C_i. Nous supposons alors que les suites caractéristiques de $\varphi_i(A_i)$ et $\varphi_j(A_j)$ coïncident jusqu'à l'ordre w inclu et nous noterons dorénavant :

$$\{\beta_0 = \mu\ ,\ \beta_1 = \beta_1^i = \beta_1^j,\ldots,\ \beta_w = \beta_w^i = \beta_w^j\}$$

et e_s = pgcd $(\beta_0,\ldots,\beta_s)$, pour $0 \leq s \leq w$.

Enfin soit $\gamma_{i,j} = \sup\,\{m_{i,j,\varepsilon}\ ;\varepsilon^{\mu} = 1\}$.

LEMME VI.3.5. :

Il existe un entier $q \leq w$ tel que l'ensemble des entiers $\{m_{i,j,\varepsilon} \; ; \; \varepsilon^{\mu} = 1\}$ soit égal à $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q, \gamma_{ij}\}$ pour $q \geqslant 1$ et à $\{\gamma_{i,j}\}$ pour $q=0$.

De plus, le nombre de racines μ-ème de l'unité pour lesquelles $m_{i,j,\varepsilon} = \beta_s$ (resp. $m_{i,j,\varepsilon} = \gamma_{i,j}$) est égal à $e_{s-1} - e_s$ pour $s=1,\dots,q$ (resp. e_q).

PREUVE :

Soit $\underline{\varepsilon}$ satisfaisant à $m_{i,j,\underline{\varepsilon}} = \gamma_{i,j}$; pour tout $k < \gamma_{i,j}$, $a_k^i = (\underline{\varepsilon})^k a_k^j$.

On définit l'entier q par les conditions suivantes :

$q=0$ si $\gamma_{i,j} \leq \beta_1$

sinon $\beta_q < \gamma_{i,j} \leq \beta_{q+1}$ (en posant $\beta_{w+1} = \infty$).

Prenons alors ε tel que $m_{i,j,\varepsilon} < \gamma_{i,j}$: $m_{i,j,\varepsilon} = \inf \{k \; ; \; a_k^i \neq \varepsilon^k \; a_k^j\}$.

Or $m_{i,j,\varepsilon} < \beta_{q+1}$ implique que e_q divise $m_{i,j,\varepsilon}$ et donc $\varepsilon^{e_q} \neq (\underline{\varepsilon})^{e_q}$. Comme pour tout entier $s \geq 1$, e_s divise e_{s-1} et que $\varepsilon^{e_o} = (\underline{\varepsilon})^{e_o} = 1$, il existe un entier t pour lequel $\varepsilon^{e_t} \neq (\underline{\varepsilon})^{e_t}$ et $\varepsilon^{e_{t-1}} = (\underline{\varepsilon})^{e_{t-1}}$. On en déduit que $m_{i,j,\varepsilon} = \beta_t$ puisque $a_{\beta_t}^i \neq 0$, $\varepsilon^{\beta_t} \neq (\underline{\varepsilon})^{\beta_t}$, et pour $k < \beta_t$ et $a_k^i \neq 0$ e_{t-1} divise k et par conséquent $\varepsilon^k = (\underline{\varepsilon})^k$.

La condition $\varepsilon^{e_{t-1}} = (\underline{\varepsilon})^{e_{t-1}}$ et $\varepsilon^{e_t} \neq (\underline{\varepsilon})^{e_t}$ est nécessaire et suffisante pour que $m_{i,j,\varepsilon} = \beta_t$, ce qui prouve la seconde partie du lemme.

PREUVE DE LA PREMIÈRE PARTIE DE LA PROPOSITION VI.3.2. :

D'après les deux lemmes précèdents :

(*) $\mu_i \; \mu_j \;\; m_{i,j} = (e_o - e_1) \; \beta_1 + \dots + (e_{q-1} - e_q) \; \beta_q + e_q \; \gamma_{i,j}$

Introduisons encore $e_{i-1} = n_i \; e_i$ et

$\overline{\beta}_s = (n_1 - 1) \; n_2 \dots n_{s-1} \; \beta_1 + \dots + (n_{s-1} - 1) \beta_{s-1} + \beta_s$.

Les nombres $\{\overline{\beta}_s\ ;\ 0 \leq s \leq q\}$ sont les premiers générateurs minimaux des semi-groupes de $\varphi_i(A_i)$ ou $\varphi_j(A_j)$ et on a :

$\overline{\beta}_{s+1} = n_s\, \overline{\beta}_s - \beta_s + \beta_{s+1}$. ([$Z_8$] théorème 3.9).

On peut alors écrire :

$$\mu_i\, \mu_j\, m_{i,j} = e_{q-1}\, \overline{\beta}_q - e_q\, \beta_q + e_q\, \gamma_{i,j}$$

D'où

$$e_{q-1}\, \overline{\beta}_q < \mu_i\, \mu_j\, m_{ij} \leq e_q(n_q\, \overline{\beta}_q - \beta_q + \beta_{q+1}) = e_q\, \overline{\beta}_{q+1}$$

Ainsi l'entier q est déterminé par la multiplicité d'intersection $m_{i,j}$ et les exposants caractéristiques des branches C_i et C_j, ce qui, d'après le lemme VI.3.5 et le théorème VI.2.2 démontre la première partie de la proposition VI.3.2.

LEMME VI.3.6. :

Soit $f \in \bigoplus_{i=1}^{r} \widetilde{A}_i \subset \overline{A}$ et $\underline{\varepsilon}$ tel que $m_{i,j,\underline{\varepsilon}} = \gamma_{i,j}$. Si $m_{i,j,\underline{\varepsilon}}(f) > m_{i,j,\underline{\varepsilon}}$, pour toute racine μ-ème de l'unité on a : $m_{i,j,\varepsilon}(f) \geq m_{i,j,\varepsilon}$.

PREUVE :

Notons $\varphi_i(f_i) = \Sigma\, b_k^i\, \tau^k$; la condition $m_{i,j,\underline{\varepsilon}}(f) \geq m_{i,j,\underline{\varepsilon}}$ équivaut à $b_k^i = (\underline{\varepsilon})^k\, b_k^j$ pour tout entier $k < \gamma_{i,j}$.

Distinguons deux cas :

1) Si $m_{i,j,\varepsilon} = \beta_t < \gamma_{i,j}$ on a $\varepsilon^{e_{t-1}} = (\underline{\varepsilon})^{e_{t-1}}$ et

$m_{i,j,\varepsilon}(f) \geq \inf\, \{k \in \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q\}^{\sim}\ ;\ e_{t-1}$ ne divise pas $k\} = \beta_t$

car la condition $f_i \in \widetilde{A}_i$ entraine, pour $b_k^i \neq 0$, $k \in \{\beta_0^i, \ldots, \beta_{g_i}^i\}^{\sim}$, et donc $k \in \{\beta_0, \beta_1 \ldots, \beta_q\}^{\sim}$ pour $k < \gamma_{i,j}$.

2) Si $m_{i,j,\varepsilon} = \gamma_{i,j}$, $\varepsilon^{e_q} = (\underline{\varepsilon})^{e_q}$ et on déduit de même $m_{i,j,\varepsilon}(f) \geq \gamma_{i,j} = m_{i,j,\varepsilon}$ ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME VI.3.7. :

Soit $\Pi_i : \overline{A} = \overline{A}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{A}_r \longrightarrow \overline{A}_i$ la projection canonique sur le i-ème facteur. On a $\mathcal{A}_i = \Pi_i(\mathcal{A})$.

PREUVE :

Commençons par démontrer, pour trois indices i,j,k l'inégalité triangulaire :

$\gamma_{j,k} \geq \inf(\gamma_{i,j},\gamma_{i,k})$ et $\gamma_{j,k} = \gamma_{i,j}$ si $\gamma_{i,j} < \gamma_{i,k}$.

a) Il existe des racines μ-ème de l'unité, ε et ε' telles que pour tout entier $p < \inf(\gamma_{i,j},\gamma_{i,k})$ on ait :

$a_p^i = \varepsilon^p a_p^j$ et $a_p^i = \varepsilon'^p a_p^k$. Et donc $a_p^j = (\frac{\varepsilon'}{\varepsilon})^p a_p^k$.

On en déduit $\gamma_{j,k} \geq \inf(\gamma_{i,j},\gamma_{i,k})$

b) Si $\gamma_{i,j} < \gamma_{i,k}$, pour toute racine μ-ème de l'unité ε , il existe un entier $p \leq \gamma_{i,j}$ tel que $a_p^i \neq \varepsilon^p a_p^j$ et il existe une racine μ-ème ε' telle que $a_p^i = \varepsilon'^p a_p^k$. Donc $a_p^j \neq (\frac{\varepsilon'}{\varepsilon})^p a_p^k$: pour toute racine $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ de l'unité, il existe donc $p \leq \gamma_{i,j}$ vérifiant $a_p^j \neq \varepsilon''^p a_p^k$ c'est à dire $\gamma_{j,k} \leq \gamma_{i,j}$.

Démontrons maintenant le lemme : soit $h_i \in \mathcal{A}_i$ et $\varphi_i(h_i) = \sum_{p \geq 0} c_p^i \tau^p$.

Choisissons, pour tout indice j distinct de i, une racine μ-ème de l'unité $\varepsilon_{i,j}$, telle que $m_{i,j,\varepsilon_{i,j}} = \gamma_{i,j}$ et définissons :

$$k_j = \left(\sum_{p \geq 0} c_p^i(\varepsilon_{i,j})^{-p} \tau^p\right)^{[\gamma_{i,j}]} = \sum_{0 \leq p < \gamma_{i,j}} c_p^j \tau^p$$

avec $c_p^j = c_p^i(\varepsilon_{i,j})^{-p}$, le symbole $(\quad)^{[\gamma_{i,j}]}$ signifiant que l'on a tronqué la série à l'ordre $\gamma_{i,j}$.

Pour $p < \gamma_{i,j}$ et $c_p^i \neq 0$, soit s défini par $\beta_s \leq p < \beta_{s+1}$; p est multiple de $e_s = \mathrm{pgcd}\,(\beta_0,\beta_1,..,\beta_s)$, donc multiple de μ_i et μ_j ; on peut donc trouver $h_j \in \tilde{A}_j$ tel que $k_j = \varphi_j(h_j)$: $h_j = \sum_{0 \leq p < \gamma_{i,j}} c_p^j\, t_j^{p/\mu_j}$.

Il nous reste à vérifier que $h = h_1 \oplus \ldots \oplus h_r$ vérifie les conditions $P_{j,k}$ pour avoir $h \in \tilde{A}$ et $\Pi_i(h) = h_i$. Pour tout ε et tout entier p :

$$c_p^k\, \varepsilon^p - c_p^j = c_p^i\, \varepsilon_{i,j}^{-p}\ \left[(\varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{ik}^{-1}\, \varepsilon\,)^p - 1\,\right].$$

On suppose $\gamma_{i,j} \leq \gamma_{i,k}$.

Soit $p < \gamma_{i,j}$ tel que $c_p^i \neq 0$; les trois suites caractéristiques coïncident jusqu'à l'ordre q, $\{\beta_0,\ldots,\beta_q\}$ et p est multiple de e_s si $\beta_s \leq p < \beta_{s+1}$.
Choisissons $\varepsilon = \varepsilon_{j,k}$; on a $(\varepsilon_{ij})^{e_s} = (\varepsilon_{ik})^{e_s} = (\varepsilon_{j,k})^{e_s} = 1$

et donc $m_{j,k,\varepsilon_{j,k}}(h) \geq \gamma_{i,j}$.

Lorsque $\gamma_{i,j} < \gamma_{i\ k}$, $\gamma_{i,j} = \gamma_{j,k}$ et d'après le lemme VI.3.6 la condition $P_{j,k}$ est vérifiée pour h. Lorsque $\gamma_{i,j} = \gamma_{i,k}$, puisque les séries $\varphi_j(h_j)$ et $\varphi_k(h_k)$ sont tronquées à partir de cet ordre, la condition est automatiquement satisfaite car $m_{j,k,\varepsilon_{j,k}}(h) = +\infty$.

<u>REMARQUE</u> :

On déduit facilement du lemme VI.3.7. que si le couple $(h_i,h_j) \in \tilde{A}_i \oplus \tilde{A}_j$ vérifie les conditions $P_{i,j}$, il existe $h \in \tilde{A}$ tel que $\pi_i(h) = h_i$ et $\pi_j(h) = h_j$.
En effet, soit $H \in \tilde{A}$ construit à partir de h_i comme dans le lemme précédent : $\Pi_i(H) = h_i$ et $\Pi_j(H)$ coïncide avec h_j, jusqu'à l'ordre $\gamma_{i,j}$.

De même en appliquant la même construction à partir de $h_j - \Pi_j(H)$ on obtient $K \in \tilde{A}$ tel que $\Pi_j(K) = h_j - \Pi_j(H)$ et $\Pi_i(K) = 0$.
Donc $\Pi_i(H+K) = h_i$ et $\Pi_j(H+K) = h_j$.

<u>FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI.3.2.</u> :

D'après le lemme VI.3.7 $\mathcal{K}_i = \Pi_i(\mathcal{K})$ et les exposants caractéristiques $\{\beta_o^i, \beta_1^i, \ldots, \beta_{g_i}^i\}$ sont des invariants analytiques de $\mathcal{K}_i$ (lemme VI.3.3) donc de $\mathcal{K}$.

D'autre part, d'après la dernière remarque ci-dessus on a :

$$\dim_{\mathbb{C}} \left[(\mathcal{K}_i \oplus \mathcal{K}_j)/[\Pi_i \oplus \Pi_j](\mathcal{K})\right] = \# \{p \in \{\beta_o, \ldots, \beta_q\}^\sim \ ; \ p < \gamma_{i,j}\}$$

ce qui montre que $\gamma_{i,j}$ est un invariant analytique de $\mathcal{K}$, donc aussi $m_{i,j}$ d'après la formule (*).

RÉFÉRENCES

[Bo] J. BOARDMAN. "Singularities of differential mappings" Publ. I.H.E.S. n° 33 (1967).

[Br] K. BRAUNER. Zur Geometrie der Funktionen Zweir komplexen Veränderlichen. Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928) 1.54.

[B - S] J. BRIANÇON et J.P. SPEDER. "Les conditions de Whitney impliquent μ^* constant" Annales de l'Inst. Fourier (26. fasc. 2) (1976).

[Bu] R.O. BUCHWEISS "On deformations of monomial curves" in Séminaire sur les singularités de surfaces. Publ. centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1976-77).

[B - G] R.O. BUCHWEISS et G.M. GREUEL. "Le nombre de Milnor, équisingularité et déformations des singularités de courbes réduites" Preprint (Juillet 78).

[D] C. DELORME. "Sous monoides d'intersection complète de $\mathbb{N}$" An. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série tome 9 (1976).

[Gi_1] M. GIUSTI. "Sur les singularités d'intersections complètes quasi homogènes" Ann. inst. Fourier Tome 27 fasc. 3 (1977).

[Gi_2] M. GIUSTI. Classification des singularités isolées d'intersections complètes Publ. Centre de Math de l'Ecole Polytechnique. Palaiseau (1977).

[G - F] H. GRAUERT et K. FRITZCHE "Several Complex variables" Springer Verlag éditeur (1976).

[G - H] G.M. GREUEL et H. HAMM "Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte" Preprint.

[H_1] H. HIRONAKA. "Stratification and flatness" Lectures at the Nordic Summer School Oslo (1976) Noordhoff. Per Holm éditeur.

[H_2] H. HIRONAKA "Normal cones in analytic Whitney stratifications" Publ. Math. I.H.E.S. (36) (1969).

RÉFÉRENCES

[K] F. KUNZ. "The value semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring". Proc. A.M.S. vol.25 (1970).

[$Lê_1$] Lê D.T. "Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète" Publ. du Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1973) ou Funct. Anal. i ego Prilo (8) (1974) p.45-49.

[$Lê_2$] Lê D.T. "Sur un critère d'équisingularité". Séminaire Norguet 1970-71. Springer Lectures Notes n° 409. Cf. aussi : même titre, note aux C.R.A.S. Paris t. 272 (1971).

[L - R] Lê. D.T. et C.P. RAMANUJAM. "The invariance of the Milnor number implies the invariance of the topological type". Amer. J. of Math. 98, 1 (1976).

[Ma_1] J. MATHER. "Notes on topological stability" Harvard University (1970).

[Ma_2] J. MATHER "On Thom-Boardman singularities" in Proceeding Dynamical systems conference, Academic Press (1973).

[Mi] J. MILNOR "Singular points of complex hypersurfaces". Ann. Math. Studies n° 61 Princeton U.P. (1968).

[N] R. NARASIMHAN "Introduction to the theory of analytic spaces" Lecture Notes n° 25 Springer editeur (1966).

[P - T] F. PHAM et B. TEISSIER "Fractions Lipschitziennes d'une algèbre analytique complexe et saturation de Zariski" Publ. Centre de Math. de l'école Polytechnique (1969) ou Actes du Congrès de Math. Nice (1970).

[Pi] H. PINKHAM "Déformation of Algebraic Varieties with G_m action" Astérisque vol. 20 (1974).

[R] D. REES "A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities" Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961).

[Sc] M. SHAPS "Déformations de courbes gauches" in Astérisque n°7 et 8 (1973).

[Se] J.P. SERRE "Sur les modules projectifs" in séminaire Dubreil-Pisot (1960/61).

[Sp] J.P. SPEDER "Analyticité des conditions de Whitney strictes" Ann. Inst. Fourier. t.23 fasc. 3 (1973).

[St] J. STUTZ. "Equisingularity and equisaturation" Amer. Journ. of Math. 94 (1972).

[T_1] B. TEISSIER. "The Hunting of invariants" Lecture at the Nordic Summer School Oslo (1976) Noordhoff. Per Holm éditeur.

[T_2] B. TEISSIER. "Résolution simultanée I et II "in Séminaire sur les singularités des surfaces, Ecole Polytechnique Palaiseau (1976-77).

[T_3] B. TEISSIER. Appendice à [Z_8].

[T_4] B. TEISSIER. "Cycles évanescents sections planes et conditions de Whitney" in Singularités à Cargèse. Astérisque n° 7 et 8 (1973).

[T_5] B. TEISSIER. "Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes". Publ. du centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1975).

[Th] R. THOM. "Ensembles et morphismes stratifiés" Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969).

[Wa] J. WAHL. "Equisingular deformations of plane algébroid curves". Trans. of the A.M.S. (Providence R.I.) vol. 193 (1974).

[W] H. WHITNEY. "Tangents to analytic variety" Ann. of Math. (81) (1965).

[Z_1] O. ZARISKI. "Studies in equisingularity I" Am. Journal of Math. 87 (1965).

[Z_2] O. ZARISKI. "Studies in equisingularity II" Am. Journal of Math. 87 (1965).

[Z_3] O. ZARISKI. "Studies in equisingularity III" Am. Journal of Math. 90 (1968).

RÉFÉRENCES

[Z_4] O. ZARISKI. "General theory of saturation and of satured local rings II" American Journal of Math. 93 (1971).

[Z_5] O. ZARISKI. "on the topology of Algebroid Singularities" Am. Journal of Math 54 (1932).

[Z_6] O. ZARISKI. "Contributions to the problem of equisingularity" in : Questions on algebraic varieties. C.I.M.E. (III Ciclo 1969).

[Z_7] O. ZARISKI. "Some open questions onthe theory of singularities" Bull. A.M.S. 77-4 (1971).

[Z_8] O. ZARISKI. "Modules des branches planes". Publ. du centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1973).