VARIETES POLAIRES LOCALES : QUELQUES RESULTATS

PAR

B. TEISSIER

INTRODUCTION

Le lecteur trouvera ici la définition des variétés polaires locales relatives et la démonstration de deux résultats de transversalité les concernant, ainsi qu'une petite amélioration du résultat de l'auteur (cf. [Te_3]) affirmant l'équivalence de la constance des multiplicités des variétés polaires d'un espace réduit X purement de dimension d le long d'un sous-espace non singulier $Y \subset X$ et du fait que le couple (X^o, Y), où X^o désigne la partie lisse de X satisfait les conditions de Whitney.

La première définition des variétés polaires locales (absolues) et les premiers résultats les concernant se trouvent dans un travail commun de l'auteur et de Lê Dũng Tràng (voir [L. T.]), travail qui a été très utile pour celui-ci. Une démonstration différente des résultats de transversalité du § 3 a été proposée par J. P. G. Henry et M. Merle (Note C. R. A. S. Paris, t. 291, 29 septembre 1980).

§ 1.- <u>VARIETES POLAIRES LOCALES RELATIVES</u> (d'après [L. T.] et [Te_3])

Soit $f : (X,o) \longrightarrow (S,o)$ un germe de morphisme d'espaces analytiques complexes. On continuera de noter $f : X \longrightarrow S$ un représentant de f, supposé "assez petit" en un sens qui sera clair pour chaque assertion. On suppose que, pour un tel représentant, toutes les fibres de f sont réduites et purement de dimension d. En particulier, le module $\Omega^1_f = \Omega^1_{X/S}$ des différentielles relatives sur X est localement libre de rang d sur un ouvert U de X qui est le complémentaire d'un fermé analytique rare de X induisant un fermé analytique rare dans chaque fibre de f.

A cette situation, on associe une modification $\nu_f : N_f(X) \longrightarrow X$, appelée "modification de Nash relative" qui est caractérisée, à isomorphisme unique près, comme la plus petite (au sens de la relation de domination) modification de X sur laquelle $\nu^*_f \Omega^1_f$ possède un quotient localement libre de rang d. La construction de ν_f peut être décrite comme ceci : on considère l'espace en grassmaniennes au-dessus de X, $G(\Omega^1_f) \xrightarrow{g} X$, sur lequel $f^* \Omega^1_f$ est muni d'un quotient localement libre L de rang d, le tout étant déterminé à isomorphisme unique près, par la propriété universelle suivante : étant donné un morphisme $h : T \longrightarrow X$, l'application

$\{$homomorphismes $\bar{h} : T \longrightarrow G(\Omega^1_f)$, tels que $g \circ \bar{h} = h\} \longrightarrow \{$quotients localement libres de rang d de $h^*(\Omega^1_f)\}$

qui à $\bar{h} : T \longrightarrow G$ associe $h^* L$, est bijective (voir Séminaire Cartan, 60-61). Soit $\sigma : U \longrightarrow G(\Omega^1_f)$ la section de g au-dessus de U provenant de la propriété universelle (car Ω^1_g est localement libre de rang d sur U) et soit $N_f(X)$ l'adhérence dans $G(\Omega^1_f)$ de $\sigma(U)$ (adhérence qui est un espace analytique d'après le théorème de Cartan), enfin soit $\nu_f : N_f(X) \longrightarrow X$ le morphisme induit par g. Puisque g est propre et $N_f(X)$ fermé dans $G(\Omega^1_f)$, le morphisme ν_f est propre, c'est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert analytique dense U et donc c'est bien une modification de X.

On construit ainsi une modification de Nash pour n'importe quel morphisme $f : X \longrightarrow S$ satisfaisant les conditions ci-dessus. Localement, on peut en donner la description suivante : pour un représentant assez petit de f, on peut, ayant choisi un plongement $(f^{-1}(o),o) \subset (\mathbb{C}^{N+1},o)$ en o de la fibre $(f^{-1}(o),o)$, construire un plongement $i : X \hookrightarrow S \times \mathbb{C}^{N+1}$

tel que $f = pr_1 \circ i$, où $pr_1 : S \times \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow S$ est la projection naturelle. L'on considère le $\mathcal{O}_X$-module Ω^1_f comme un quotient de $i^*\left(\Omega^1_{S\times\mathbb{C}^{N+1}/S}\right)$, qui est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $N+1$ et donc on a une application analytique $U \longrightarrow X \times G$ où G désigne la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathbb{C}^{N+1}$ et $X \times G$ est identifié à la grassmanienne (au sens vu plus haut) des quotients localement libres de rang d du $\mathcal{O}_X$-module $i^*\left(\Omega^1_{S\times\mathbb{C}^{N+1}/S}\right)$. En d'autres termes, l'application composée $\gamma_f : U \longrightarrow G$ est celle qui à $x \in U$ associe la direction de l'espace tangent en x à la fibre $X_{f(x)} \subset \{f(x)\} \times \mathbb{C}^{N+1}$. On vérifie que l'adhérence dans $X \times G$ du graphe du morphisme $U \longrightarrow G$ que l'on vient de décrire coïncide avec la modification $N_f(X)$, le morphisme $\nu_f : N_f(X) \longrightarrow X$ coïncidant avec le morphisme induit par la première projection : $X \times G \longrightarrow X$. Ainsi, d'une part l'espace total $N_f(X) \subset X \times G$ est muni, outre le morphisme ν_f, du morphisme $\gamma_f : N_f(X) \longrightarrow G$ induit par la seconde projection et que l'on appelle morphisme de Gauss relatif et d'autre part, on voit que l'ensemble $|\nu_f^{-1}(o)| \subset G$ est l'ensemble des directions limites en o des espaces tangents aux fibres $X_{f(x)} \subset \{f(x)\} \times \mathbb{C}^{N+1}$.

On retiendra ainsi que $N_f(X) \xrightarrow{\nu_f} X$ est la modification qu'il faut faire pour "rendre partout défini" le morphisme $\gamma_f : U \longrightarrow G$, ou si l'on préfère, que le "fibré tangent aux fibres de f" qui est un fibré vectoriel de rang d sur U (correspondant au $\mathcal{O}_X$-module localement libre Ω^1_f) s'étend en un fibré vectoriel sur $N_f(X)$ tout entier.

Remarquons que, dans le cas où S est un point, on retrouve la modification de Nash $\nu : N(X) \longrightarrow X$, modification minimale possédant la propriété que le fibré tangent T_{X^o} à la partie non-singulière $X^o \subset X$ s'étend (i.e, $\nu^* T_{X^o}$ s'étend) en un fibré vectoriel de rang d sur $N(X)$. Enfin, il résulte de la construction que, pour tout $s \in S$, la transformée stricte $\hat{X}_s$ par ν_f de la fibre $X_s = f^{-1}(s)$, munie du morphisme $\hat{X}_s \longrightarrow X_s$ induit par ν_f, est la modification de Nash de la fibre X_s.

Soit maintenant

$$\mathcal{D} = (D_d \subset D_{d_1} \subset \ldots \subset D_o \subset \mathbb{C}^{N+1})$$

un drapeau de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{N+1}$, avec codim $D_i = i+1$.

Soit k un entier, $0 \leqslant k \leqslant d$ et soit $C_k(\mathcal{D}) \subset G$ la variété de Schubert de codimension k définie par $C_k(\mathcal{D}) = \{T \in G/\dim(T \cap D_{d-k}) \geqslant k\}$.

On remarque que $C_k(\mathcal{D})$ ne dépend que de D_{d-k} et on l'écrira aussi volontiers $C_k(D_{d-k})$.

Pour un sous-espace vectoriel D_{d-k} assez général, en appliquant un théorème de Kleiman ([K]) et un argument facile de stratifications (cf. [L. T.]), on voit que $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k}))$ est un sous-espace analytique réduit de $N_f(X)$, tel que $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k})) \cap \nu_f^{-1}(U)$ soit dense dans $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k}))$.

[On retiendra que, puisque $N_f(X) \subset X \times G$, on a aussi bien $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k})) = N_f(X) \cap (X \times C_k(D_{d-k}))$, ou encore, puisque $X \times G \subset S \times \mathbb{C}^{N+1} \times G$, que $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k})) = N_f(X) \cap (S \times \mathbb{C}^{N+1} \times C_k(D_{d-k}))$].

Il en résulte que l'on peut définir un sous-espace analytique fermé réduit $P_k(f;D_{d-k}) \subset X$, image par ν_f de $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k}))$ et tel que, si D_{d-k} est un sous-espace vectoriel assez général, on ait : $P_k(f;D_{d-k})$ est soit vide, soit de codimension k dans X et $P_k(f;D_{d-k}) \cap U$ est dense dans $P_k(f;D_{d-k})$, donc le sous-espace transformé strict de $P_k(f;D_{d-k})$ par ν_f n'est autre que $\gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k}))$. Par définition, $P_k(f;D_{d-k})$ est appelé <u>variété polaire locale relative</u>, ou simplement <u>variété polaire relative</u> de $f : X \longrightarrow S$ associée) D_{d-k}. Dans le cas ("absolu") où S est un point, on dit seulement "<u>variété polaire locale</u> associée à D_{d-k}" et l'on note $P_k(X;D_{d-k})$.

Puisque la variété des drapeaux (ou la grassmanienne des $D_{d-k} \subset \mathbb{C}^{N+1}$) est connexe, on peut parler de la multiplicité en o (et même du type d'équisingularité en o) de la variété polaire <u>associée à un drapeau assez général</u> : on fabrique aisément, en effet, la famille des variétés polaires $P_k(f;D_{d-k})$ paramétrée par une grassmanienne convenable et munie d'une section piquant l'origine dans chaque variété polaire. Puisque la multiplicité (resp. le type d'équisingularité) est constante sur un ouvert analytique dense de l'espace des paramètres, le résultat en découle. Ici, "type d'équisingularité" s'applique à n'importe quelle notion d'équisingularité, mais dans la pratique, on se restreindra pour le moment aux conditions de Whitney (voir plus bas).

On notera cavalièrement $P_k(f)$ la (classe d'équisingularité de la) variété polaire $P_k(f;D_{d-k})$, pour D_{d-k} assez général. Il faut remarquer que, a priori, les variétés polaires, même générales, dépendent du plongement local $X \subset S \times \mathbb{C}^{N+1}$ choisi, que l'on a utilisé la structure linéaire de $\mathbb{C}^{N+1}$. Il faut vérifier le

<u>Théorème 1</u>

La multiplicité en o $m_o(P_k(f))$ des variétés polaires locales relatives d'un germe de morphisme $f : (X,o) \longrightarrow (S,o)$, associé à un drapeau assez général, ne dépend que du type analytique du morphisme f en o, pour $0 \leqslant k \leqslant d$.

La preuve de ce théorème sera donnée ailleurs (voir cependant la fin du § 4 pour une esquisse de preuve dans le cas où S est un point).

Au morphisme f et au point $o \in X$, on associe donc une suite d'entiers $\Gamma^*_{f,o}$: $(m_o(P_d(f)), m_o(P_{d-1}(f)), \dots, m_o(X))$

§ 2.- <u>EXEMPLES</u>

Donnons d'abord une description "sans modification" des variétés polaires, d'après [L. T.] : installons comme plus haut notre morphisme f :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & S \times \mathbb{C}^{N+1} \arrow[dl, "pr_1"] \\ S & \end{tikzcd}$$

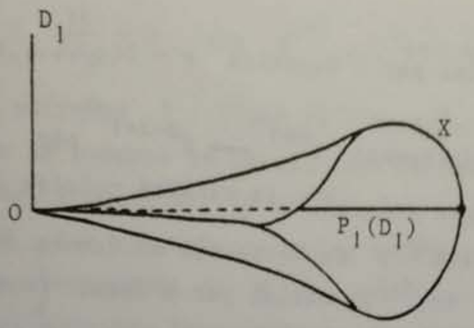
et considérons une projection linéaire $p_o : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ de noyau D_{d-k} et notons $\mathring{P}_k(f;p_o)$ l'ensemble des points x de l'ouvert U tels que la restriction de la projection $\{f(x)\} \times p_o : \{f(x)\} \times \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \{f(x)\} \times \mathbb{C}^{d-}$ à la fibre $X_{f(x)} \subset \{f(x)\} \times \mathbb{C}^{N+1}$ ait un point critique en x.

Alors, pour D_{d-k} assez général, la fermeture dans X de $\mathring{P}_k(f;p_o)$ est $P_k(f;D_{d-k})$.

Ceci résulte aussitôt de ce qui a été vu plus haut.

<u>Exemple 1</u>

Soit $(X,o) \subset (\mathbb{C}^3,o)$ un germe de surface réduite. On a $P_o(X) = X$, $P_2(X) = \emptyset$ et la seule variété polaire nouvelle est $P_1(X)$ que l'on obtient ainsi : soit $p : (\mathbb{C}^3,o) \longrightarrow (\mathbb{C}^2,o)$ une projection linéaire de noyau $D_1 \subset \mathbb{C}^3$. Alors (on suppose D_1 assez général) $P_1(D)$ est la fermeture dans X du lieu critique de la restriction P/X_o de P à la partie non singulière X_o de X



En particulier, si (X,o) est un cône sur une courbe projective $C \subset \mathbb{P}^2$, on voit que $P_1(D)$ est le cône sur l'ensemble des points non-singuliers de C où la tangente à C passe par le point de $\mathbb{P}^2$ correspondant à la direction de projection D_1 . Dans ce cas, la suite des multiplicités en o des variétés polaires est donc $(o,\check{n},n)$, où n est le degré de la courbe C (qui est aussi la multiplicité de X en o) et $\check{n}$ est la classe de la courbe C , c'est-à-dire le degré de la courbe duale $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$.

De façon générale, lorsque X est le cône de sommet o sur une variété projective $V \subset \mathbb{P}^N$, les variétés polaires locales en o sont les cônes sur les variétés polaires de V étudiées par Todd [T_o] (dans le cas où V est non-singulière), puis par Piene [P] dans le cas général. La théorie des variétés polaires locales contient donc la théorie des variétés polaires des variétés projectives.

<u>Exemple</u> 2

Soit $f : (\mathbb{C}^{d+1},o) \longrightarrow (\mathbb{C},o)$ un germe de fonction analytique, telle que $f^{-1}(o)$ soit réduit. L'installation du morphisme f , dans ce cas, n'est autre que son graphe, c'est-à-dire

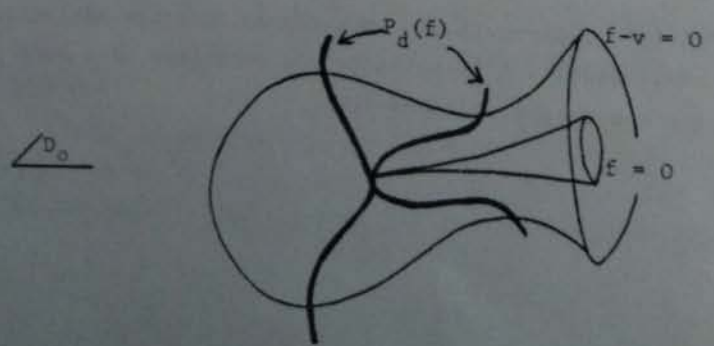
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{d+1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1} \arrow[dl, "pr_1"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$i(\mathbb{C}^{d+1})$ étant défini par l'équation $v - f(z_o,\dots,z_d) = 0$ où v est une coordonnée sur $\mathbb{C}$.

Projetons linéairement $\mathbb{C}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ par $(z_o,\dots,z_d) \longmapsto (z_o,\dots,z_{d-k})$; la variété polaire correspondante est l'adhérence dans $i(\mathbb{C}^{d+1})$ de la partie en dehors du lieu critique de f du sous-espace de $i(\mathbb{C}^{d+1})$ défini par l'idéal $\left(v-f,\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_d}\right)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d+1}$. C'est donc aussi l'adhérence dans $\mathbb{C}^{d+1}$ de la partie en dehors du lieu critique de f du sous-espace défini par l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_d}\right)\mathcal{O}_{d+1}$ (on suppose bien sûr le noyau de la projection "assez général").

Dans le cas particulier où o est un point critique isolé pour f , on retrouve le fait que les variétés polaires relatives de f sont les sous-variétés de $\mathbb{C}^{d+1}$ définies comme ceci : la variété $P_k(f)$ est définie par l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_{d-k+1}},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_d}\right)\mathcal{O}_{d+1}$.

En particulier, pour $k = d$, on retrouve la <u>courbe polaire</u> d'un germe d'hypersurface à singularité isolée, dont l'intérêt a été mis en évidence, du point de vue topologique dans [L.] et du point de vue algébrique, dans [C. E. W.] , $[Te_2]$ et $[Te_1]$. Au voisinage de $o \in \mathbb{C}^{d+1}$, la courbe polaire relative de $f : \mathbb{C}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, associée à un hyperplan D_o au voisinage d'un point critique isolé $o \in \mathbb{C}^{d+1}$ de f , est la courbe décrite, lorsque v varie, par l'ensemble des points de l'hypersurface de niveau (non singulière) $f(z_o,\dots,z_d) - v = 0$ où l'hyperplan tangent est parallèle à l'hyperplan D_o donné



Remarque

Si le morphisme f est décrit par un polynôme homogène, l'hypersurface polaire $P_1(f)$ relative à une direction de projection de noyau D_{d-1} défini par $\xi_i z_o - \xi_o z_i = 0$ $(i = 1 , \ldots , d)$ $(\xi_i \in \mathbb{C})$ a pour équation $\sum_{i=o}^{d} \xi_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0$ dans $\mathbb{C}^{d+1}$, c'est-à-dire est obtenue en polarisant le polynôme f . C'est là l'origine de la terminologie, qui remonte, comme le concept je crois, dans le cas où f est homogène à trois variables, à Poncelet. Il ne faut pas confondre, étant donné $f : \mathbb{C}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, les variétés polaires relatives (à la Poncelet) de f , qui sont des sous-variétés de $\mathbb{C}^{d+1}$, avec les "polar loci" (à la Todd) de $f^{-1}(o)$ qui sont des intersections des précédents avec $f^{-1}(o)$. Le concept de variété polaire relative unifie les deux.

§ 3.- PREMIERS RESULTATS DE TRANSVERSALITE

L'expérience a montré l'utilité de deux types de résultats qui, dans le cas particulier d'un point critique isolé de fonction $f : (\mathbb{C}^{d+1},o) \longrightarrow (\mathbb{C},o)$, avaient déjà rendu de bons services dans [C. E. W.] ; nous nous restreignons ici au cas où $\dim S \leq 1$ et S est non singulier. Etant donné un morphisme $f : X \longrightarrow S$ comme au § 1, plongeons (un représentant assez petit de) X dans $\mathbb{C}^{N+1}$ et considérons le graphe de f , de la manière suivante : posons $C = N + 1 - d$, soit $z_o , \ldots , z_{N+1}$ un système de coordonnées locales sur $\mathbb{C}^{N+1}$ centré en o et soit $(F_1,\ldots,F_m) \in \mathcal{O}_{N+1} = \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_N\}$ une base pour l'idéal I définissant X dans $\mathbb{C}^{N+1}$ en o . Par ailleurs, soit $\tilde{f} : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow S$ un morphisme induisant f et choisissons, dans le cas où $\dim S = 1$, i.e $S = \mathbb{C}$, une coordonnée locale v sur S , $v \circ \tilde{f} = F_{m+1}(z_o,\ldots,z_N)$. Le graphe de f est le sous-espace de $\mathbb{C}^{N+1} \times S$ défini par l'idéal $(F_1(z_o,\ldots,z_N) , \ldots , F_m(z_o,\ldots,z_N) , v - F_{m+1}(z_o,\ldots,z_N)).\mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_N,v\}$. Nous pouvons nous servir du plongement $X \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}^{N+1} \times S$ dont l'image est le graphe de f pour calculer les variétés polaires relatives comme il a été expliqué au § 1.

Théorème 2

Soit $f : (X,o) \longrightarrow (S,o)$ un morphisme analytique comme ci-dessus ;

avec S non-singulier, $\dim S \leq 1$. Pour tout représentant assez petit de f, tout plongement local $X \subset \mathbb{C}^{N+1}$, pour tout entier k, $0 \leq k \leq d$ et un plan D_{d-k} de codimension $d-k+1$ dans $\mathbb{C}^{N+1}$ assez général, on a, en notant C_o le cône tangent en o :

A) La variété polaire relative $P_k(f;D_{d-k})$ est transverse, dans $\mathbb{C}^{N+1}$, à D_{d-k}, en ce sens que $D_{d-k} \cap C_o(P_k(f;D_{d-k})) = \{o\}$.

B) Les limites en o d'espaces tangents aux fibres de f en des points non-singuliers de $X \cap D_{d-k}$ sont transverses à D_{d-k}, en ce sens que pour chaque telle limite T, on a : $\dim(T \cap D_{d-k}) = k-1$.

<u>Démonstration</u>

Comme nous allons voir, ces deux résultats sont d'une certaine manière duaux l'un de l'autre. Considérons le diagramme commutatif de morphismes biméromorphes :

$$\begin{tikzcd}
 & & G \\
N'_f(X) \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\nu'_f"'] & N_f(X) \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[d, "\nu_f"] & \\
X' \arrow[r, "e"] & X &
\end{tikzcd}$$

où ν_f désigne la modification de Nash relative, e l'éclatement de l'origine $o \in X$, e' l'éclatement du sous-espace analytique $\nu_f^{-1}(o)$ dans $N_f(X)$ et ν'_f est le morphisme fourni par la propriété universelle de l'éclatement.

L'assertion A) équivaut à la suivante : la transformée stricte P'_k de $P_k(f;D_{d-k})$ et la transformée stricte $(X \cap D_{d-k})'$ de $X \cap D_{d-k}$ par l'éclatement e sont disjointes : $P_k(f;D_{d-k})' \cap (X \cap D_{d-k})' = \emptyset$.

L'assertion B) équivaut à la suivante : la transformée stricte $\widehat{(X \cap D_{d-k})}$ de $X \cap D_{d-k}$ par ν_f ne rencontre pas $\gamma^{-1}(C_k(D_{d-k}))$ qui, comme nous l'avons vu, n'est autre que la transformée stricte $\widehat{P_k(f;D_{d-k})}$ de la variété polaire par ν_f : ainsi B) équivaut à : $\widehat{P_k(f;D_{d-k})} \cap \widehat{(X \cap D_{d-k})} = \emptyset$.

Traduisons maintenant les deux énoncés en termes de coordonnées. Reprenons les notations introduites plus haut et supposons que D_{d-k} soit défini par $(z_0,\dots,z_{d-k})$, dans $\mathbb{C}^{N+1}$. L'assertion A) du théorème équivaut à la suivante : pour tout i , $d-k < i \leqslant N$, l'élément $z_i \in \mathcal{O}_{P_k(f;D_{d-k}),o}$ est entier dans $\mathcal{O}_{P_k(f;D_{d-k}),o}$ sur l'idéal $(z_0,\dots,z_{d-k})\,\mathcal{O}_{P_k(f;D_{d-k}),o}$.

L'assertion B, elle, équivaut à la suivante : soit J_k l'idéal de $\mathcal{O}_X$ engendré par les mineurs jacobiens $\dfrac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{j_1},\dots,z_{j_c}\right)}$ $(c = N+1-d)$ tels que $\{i_1,\dots,i_c\} \subset \{1,\dots,m+1\}$, $\{j_1,\dots,j_c\} \subset \{0,\dots,N\}$ et $\{j_1,\dots,j_c\} \cap \{0,\dots,d-k\} = \emptyset$. Chacun des éléments $\dfrac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{j_1},\dots,z_{j_c}\right)} \in \mathcal{O}_{X\cap D_{d-k},o}$ $\{i_1,\dots,i_c\} \subset \{1,\dots,m+1\}$, $\{j_1,\dots,j_c\} \subset \{0,\dots,N\}$ est <u>entier</u>, dans $\mathcal{O}_{X\cap D_{d-k},o}$ sur l'idéal $J_k.\mathcal{O}_{X\cap D_{d-k},o}$. La démonstration de ces équivalences est laissée au lecteur, toutes les indications nécessaires se trouvant dans [C. E. W.] .

Nous allons voir que les assertions A) et B) sont toutes deux des conséquences du résultat suivant :

<u>Théorème de Bertini idéaliste le long d'une section</u>

Soient T un espace analytique complexe non-singulier, $\emptyset : Z \underset{\sigma}{\overset{}{\leftrightarrows}} T$ un morphisme muni d'une section, tel que $\Omega^1_{Z/T}$ soit localement libre sur le complémentaire d'un fermé rare de Z .

Il existe un fermé analytique rare $F \subset T_1 = \sigma(T)$ tel que, pour tout point $z \in T_1 \setminus F$, tout plongement local $(Z,z) \subset (T,\emptyset(z)) \times (\mathbb{C}^{M+1},o)$, tel que l'image de T_1 soit $T \times \{o\}$, tout choix de coordonnées locales $(t_1,\dots,t_k)$ et $(u_o,\dots,u_M)$ sur T et $\mathbb{C}^{M+1}$ respectivement et tout choix de générateurs $G_1(t_1,\dots,t_k,u_o,\dots,u_M)$, ... , $G_p(t_1,\dots,t_k,u_o,\dots,u_M)$ définissant ce plongement local, de l'idéal de $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_k,u_o,\dots,u_M\}$ on ait :

Pour chaque entier ℓ , $0 \leqslant \ell \leqslant k$, notant J_K l'idéal de $\mathbb{C}\{t_1,\dots,t_k,u_o,\dots,u_M\}$ engendré par les images des éléments de la forme :

$$u_{k_1} \cdots u_{k_\ell} \frac{\partial\left(G_{i_1},\dots,G_{i_c}\right)}{\partial\left(u_{k_1},\dots,u_{k_\ell},u_{k_{\ell+1}},\dots,u_{k_c}\right)}$$

(où $K = \{k_{\ell+1},\dots,k_c\} \subset \{0,\dots,\overset{M}{\cancel{N}}\}$ est <u>fixé</u> et $c = N+1+k-\dim Z$) , avec $(i,\dots,i_c) \subset \{1,\dots,p\}$, on a :

chaque déterminant jacobien de la forme $\dfrac{\partial\left(G_{i_1},\ldots,G_{i_c}\right)}{\partial\left(t_{j_1},\ldots,t_{j_\ell},u_{k_{\ell+1}},\ldots,u_{k_c}\right)} \in \mathcal{O}_{Z,z}$ est <u>entier</u> sur $J_K.\mathcal{O}_{Z,z}$ dans $\mathcal{O}_{Z,z}$.

La démonstration de ce théorème est une généralisation directe de celle que l'on trouve dans ([Te_4] , § 2, 2^{nd} part). Le lecteur non familier avec la dépendance intégrale sur les idéaux est prié de regarder les références données sous ce titre.

Nous aurons aussi besoin du

<u>Lemme</u>

Soient F_1 , ... , F_c et G des éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{N+1} \simeq \mathbb{C}\{z_o,\ldots,z_N\}$; soient I l'idéal engendré par $(F_1,\ldots,F_c)$, $\{i_1,\ldots,i_c\} \subset \{0,\ldots,N\}$ un ensemble d'indices et J l'idéal de $\mathcal{O}_{N+1}$ engendré par les éléments $\left\{z_j.\dfrac{\partial\left(F_1,\ldots,F_c,G\right)}{\partial\left(z_{i_1},\ldots,z_{i_c},z_j\right)}\ ;\ j\in\{0,\ldots,N\}\right\}$.

On a :

$$G.\frac{\partial\left(F_1,\ldots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\ldots,z_{i_c}\right)}.\mathcal{O}_{N+1}/_I \in \overline{J.\mathcal{O}_{N+1}/_I}$$

où la barre désigne la fermeture intégrale des idéaux.

<u>Démonstration</u>

On va utiliser le critère valuatif de dépendance intégrale : soit $h : (\mathbb{D},o) \longrightarrow (\mathbb{C}^{N+1},o)$ un morphisme, où $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C}/|t| < 1\}$, tel que $F_i \circ h = 0$, $i = 1$, ... , c .

On peut écrire

$$\frac{d}{dt}(G.h) = \sum_{k=o}^{N} \frac{\partial G}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dt}$$

$$0 = \sum_{k=o}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dt} \qquad (1 \leq i \leq c)$$

et d'après la règle de Cramer :

$$\frac{\partial\left(F_1,\ldots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\ldots,z_{i_c},z_j\right)}\circ h.\frac{dz_j}{dt} = \varepsilon\,\frac{d}{dt}(G\circ h).\frac{\partial\left(F_1,\ldots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\ldots,z_{i_c}\right)}\circ h \qquad +$$

$$+ \sum_{k \notin \{i_1,\dots i_c,j\}} \varepsilon_k \frac{\partial\left(F_1,\dots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\dots,z_{i_c},z_k\right)} \circ h \cdot \frac{dz_k}{dt}$$

où les ε valent ± 1 .

D'où, en notant v la valuation de $\mathcal{O}_{\mathbb{D},o}$:

$$v(G\circ h) - 1 + v\left(\frac{\partial\left(F_1,\dots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\dots,z_{i_c}\right)}\circ h\right) \geqslant \min_k \left[v\left(\frac{\partial\left(F_1,\dots,F_c,G\right)}{\partial\left(z_{i_1},\dots,z_{i_c},z_k\right)}\circ h\right) + v(z_k)\right] - 1 ,$$

d'où $v\left(\frac{\partial\left(F_1,\dots,F_c\right)}{\partial\left(z_{i_1},\dots,z_{i_c}\right)}\right) + v(G\circ h) \geqslant v(J)$ pour tout $h : (\mathbb{D},o) \longrightarrow (\mathbb{C}^{N+1},o)$

tel que $I \circ h \equiv 0$ et donc le résultat.

Démontrons maintenant le théorème : plaçons-nous dans le cas où $\dim S = 1$, nous allons appliquer le théorème de Bertini idéaliste à l'espace Z défini dans $\mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C} \times T$, où $T = \mathbb{C}^M$, muni des coordonnées $a_j^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant d-k$, $d-k+1 \leqslant j \leqslant N$ $(M = (d-k+1)(N-d+k))$ par l'idéal engendré par $(F_1)_a$, ... , $(F_m)_a$; $v - (F_{m+1})_a$) où, pour $H \in \mathbb{C}\{z_o,\dots,z_n\}$ la notation $(H)_a$ désigne l'élément de $\mathbb{C}\{z_o,\dots,z_N,a_j^{(i)}\}$ obtenu en substituant $z_i + \sum_{j=d-k+1}^{N} a_j^{(i)} z_j$ à z_i dans H . D'après le théorème de Bertini idéaliste, pour $a_j^{(i)}$ assez généraux, c'est-à-dire pour un point z assez général du sous-espace $0 \times 0 \times T$ de Z défini par l'idéal $(z_o,\dots,z_N,v)$, nous avons les relations de dépendance intégrale suivantes, étant donnés $(i_1,\dots,i_c) \subset \{1,\dots,m+1\}$, ℓ_o , ... , ℓ_δ , $0 \leqslant \ell_i \leqslant d-k$ pour $0 \leqslant i \leqslant \delta$ et $\Delta = \{j_{\delta+2},\dots,j_c\} \subset \{0,\dots,N\}$ <u>fixé</u> :

$$\frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\dots,\left(F_{i_c}\right)_a\right)}{\partial\left(a_{j_1}^{(\ell_o)},\dots,a_{j_{\delta+1}}^{(\ell_\delta)},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)}\,\mathcal{O}_{Z,z} \in \overline{J_\Delta\cdot\mathcal{O}_{Z,z}}$$

(et la même chose avec l'un des z_j remplacé par v) où $J_\Delta\cdot\mathcal{O}_{Z,z}$ désigne l'idéal engendré par les éléments de la forme :

$$z_{m_o} \cdots z_{m_\delta} \cdot \frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\ldots,\left(F_{i_c}\right)_a\right)}{\partial\left(z_{m_o},\ldots,z_{m_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)} \cdot \mathcal{O}_{Z,z} \quad \text{et les éléments}$$

$$v.z_{m_1} \cdots z_{m_\delta} \cdot \frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\ldots,\left(F_{i_c}\right)_a\right)}{\partial\left(v,z_{m_1},\ldots,z_{m_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)} \cdot \mathcal{O}_{Z,z} .$$

Mais grâce au lemme que nous avons démontré plus haut, ces derniers éléments sont tous entiers, dans $\mathcal{O}_{Z,z}$, sur l'idéal engendré par les précédents : il suffit de remarquer que, sur Z, les $(F_i)_a$ sont nuls si $i \neq m+1$ et $v = (F_{m+1})_a$. A dépendance intégrale près, nous pouvons nous restreindre aux éléments où v n'intervient pas.

Par ailleurs, on a, pourvu que $\{j_{\delta+2},\ldots,j_c\} \subset \{0,\ldots,d-k\}$, les identités :

$$\frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\ldots,\left(F_{i_c}\right)_a\right)}{\partial\left(a_{j_1}^{(\ell_o)},\ldots,a_{j_{\delta+1}}^{(\ell_\delta)},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)} = z_{j_1}\cdots z_{j_{\delta+1}} \cdot \left(\frac{\partial\left(F_{i_1},\ldots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{\ell_o},\ldots,z_{\ell_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)}\right.$$

où $\{j_1,\ldots,j_{\delta+1}\} \subset \{d-k+1,\ldots,N\}$.

Remarquons qu'au prix d'un changement linéaire des coordonnées, nous pouvons supposer que tous les $a_j^{(i)}$ sont nuls au point $z \in Z$ et que nous avons les identités suivantes <u>modulo l'idéal</u> $\mathfrak{A}$ <u>engendré par les</u> $a_j^{(i)}$

$$\frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\ldots,\left(F_{i_c}\right)_a\right)}{\partial\left(a_{j_1}^{(\ell_o)},\ldots,a_{j_{\delta+1}}^{(\ell_\delta)},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)} \equiv z_{j_1}\cdots z_{j_{\delta+1}} \cdot \left(\frac{\partial\left(F_{i_1},\ldots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{\ell_o},\ldots,z_{\ell_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)}\right)_a \bmod$$

$$\frac{\partial\left(\left(F_{i_1}\right)_a,\ldots,\left(F_{i_1}\right)_a\right)}{\partial\left(z_{m_o},\ldots,z_{m_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)} \equiv \left(\frac{\partial\left(F_{i_1},\ldots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{m_o},\ldots,z_{m_\delta},z_{j_{\delta+2}},\ldots,z_{j_c}\right)}\right)_a \bmod \mathfrak{A}.$$

Démontrons l'assertion A) du théorème : sur la variété polaire $P_k = P_k(f;D_{d-k})$, où D_{d-k} est défini par $z_o = \ldots = z_{d-k} = 0$, on a par définition

$$\frac{\partial\left(F_{i_1},\ldots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{j_1},\ldots,z_{j_c}\right)} \mathcal{O}_{P_k,o} = 0 \quad \text{si} \quad \{j_1,\ldots,j_c\} \subset \{d-k+1,\ldots,N\} .$$

Par ailleurs, les relations de dépendance intégrale ci-dessus sur Z se préservent par restriction au sous-espace de Z défini~~e~~ par $\mathfrak{A}.\mathcal{O}_Z$, qui n'est autre que X, puis restriction à la variété polaire P_k.

Prenant le cas particulier où $\delta = 1$, il vient donc que, pour tout $j_1 > d - k$ et pour tout ℓ, $0 \leq \ell \leq d - k$, tout $(j_2,\dots,j_c) \subset \{0,\dots,N\}$,

l'élément $z_{j_1} \cdot \dfrac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_\ell, z_{j_2},\dots,z_{j_c}\right)} \cdot \mathcal{O}_{P_k,o}$ est entier, dans $\mathcal{O}_{P_k,o}$ sur

l'idéal de $\mathcal{O}_{P_k,o}$ engendré par les éléments de la forme

$$z_k \frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_k, z_{j_2},\dots,z_{j_c}\right)} \mathcal{O}_{P_k,o} \quad \text{où} \quad (k,j_2,\dots,j_c) \not\subset \{d-k+1,\dots,N\} .$$

Nous pouvons en particulier choisir $\{j_2,\dots,j_c\} \subset \{d-k+1,\dots,N\}$, ce qui force notre idéal à être engendré par un élément $z_\ell \cdot \dfrac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_\ell, z_{j_2},\dots,z_{j_c}\right)}$,

avec $0 \leq \ell \leq d - k$ et donc, pour tout morphisme $h : (\mathbb{D}, o) \longrightarrow (P_k(f;D_{d-k}),o)$, on a $v(z_{j_1}) \geq v(z_\ell)$ pour tout $j_1 \in [d-k+1,\dots,N]$, c'est-à-dire l'assertion A).

Démontrons l'assertion B) : comme plus haut, on travaille sur X, donc modulo l'idéal $\mathfrak{A}$. Prenons $\{j_1,\dots,j_c\} \subset \{0,\dots,N\}$, supposons que $\{j_1,\dots,j_c\} \cap \{0,\dots,d-k\} = \{\ell_o,\dots,\ell_\delta\}$ et écrivons après permutation : $\{j_1,\dots,j_c\} = \{\ell_o,\dots,\ell_\delta, j_{\delta+2},\dots,j_c\}$. Maintenant soit $h : (\mathbb{D},o) \longrightarrow (X \cap D_{d-k},o)$ et supposons que, pour la valuation définie par h, l'élément de valuation minima parmi tous les éléments de la forme

$$z_{k_1} \cdots z_{k_{\delta+1}} \frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{k_1},\dots,z_{k_{\delta+1}}, z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)} \quad \text{soit}$$

$$z_{r_1} \cdots z_{r_{\delta+1}} \frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{r_1},\dots,z_{r_{\delta+1}}, z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)} \quad \text{(certainement, puisque}$$

$z_o = \dots = z_{d-k} = 0$ sur $X \cap D_{d-k}$, on a $(r_1,\dots,r_\delta) \subset \{d-k+1,\dots,N\})$.

En appliquant le théorème de Bertini idéaliste, on voit que l'élément

$$\frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(a_{r_1}^{(\ell_o)},a_{r_2}^{(\ell_1)},\dots,a_{r_{\delta+1}}^{(\ell_\delta)},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)} =$$

$$z_{r_1}\cdots z_{r_{\delta+1}}\frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{\ell_o},\dots,z_{\ell_\delta},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)}$$

a une valuation au moins égale à celle de

$$z_{r_1}\cdots z_{r_{\delta+1}}\frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{r_1},\dots,z_{r_{\delta+1}},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)}$$ et donc la valuation de

$$\frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{\ell_o},\dots,z_{\ell_\delta},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)}$$ est au moins égale à celle de

$$\frac{\partial\left(F_{i_1},\dots,F_{i_c}\right)}{\partial\left(z_{r_1},\dots,z_{r_{\delta+1}},z_{j_{\delta+2}},\dots,z_{j_c}\right)}$$, ce qui montre, grâce au critère valuatif de dépendance intégrale, le résultat souhaité.

Ceci achève la preuve du théorème 2, dans le cas où $\dim S = 1$. La preuve dans le cas où $\dim S = 0$, c'est-à-dire pour les variétés polaires "absolues" est identique, à ceci près que l'on n'a pas besoin d'utiliser le lemme pour se débarrasser des dérivées par rapport à v : on restreint la preuve précédente à $X_o \subset \mathbb{C}^{N+1}$ défini par $(F_1,\dots,F_{m+1})$.

<u>Exemple</u>

Reprenons, comme au § 2, un morphisme $f : (\mathbb{C}^{d+1},o) \longrightarrow (\mathbb{C},o)$. D'après l'assertion A) du théorème 2, avec $k = d$, la courbe polaire associée à un hyperplan assez général est transverse à cet hyperplan et d'après l'assertion B), toujours avec $k = d$, l'ensemble des positions limites en o d'espaces tangents aux fibres $f^{-1}(t)$ en des points lisses et contenus dans un hyperplan assez général ne contient pas cet hyperplan.

Voici, sans démonstration, des conditions équivalentes à la condition B) du théorème 2 (nous reprenons les notations du § 1). Notons X_{d-k+1} pour $(X \cap (D_{d-k} \times S))_{red} \subset D_{d-k} \times S$. Alors la condition B) équivaut aux suivantes, dont la première a déjà été énoncée.

B.1) Dans l'espace $N_f(X)$, la transformée stricte $\hat{X}_{d-k+1}$ de X_{d-k+1} par ν_f vérifie :

$$\hat{X}_{d-k+1} \cap \gamma_f^{-1}(C_k(D_{d-k})) = \emptyset \ .$$

B.2) Le morphisme $X^o_{d-k+1} \longrightarrow X_{d-k+1} \times G_k$ où G_k est la grassmanienne des plans de dimension $k-1$ dans D_{d-k} , qui à un point $x \in X^o_{d-k+1}$, (c'est-à-dire où la fibre de $f|X_{d-k+1}$ est non-singulière) associe $(x \ , T_{f^{-1}(f(x)),x} \cap (D_{d-k} \times \{f(x)\}))$, s'étend en un morphisme $\hat{X}_{d-k+1} \longrightarrow X_{d-k+1} \times G_k$ dont l'image est la modification de Nash relative $N_f(X_{d-k+1})$ et qui est induit par le morphisme naturel $G - C_k(D_{d-k}) \longrightarrow G_k$ qui à T associe $T \cap D_{d-k}$.

B.3) Le morphisme précédent non seulement existe, mais est un morphisme <u>fini</u> de $\hat{X}_{d-k+1}$ dans $N_f(X_{d-k+1})$

$$\begin{tikzcd} N_f(X) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \hat{X}_{d-k+1} \arrow[r] \arrow[d] & N_f(X_{d-k+1}) \arrow[dl] \\ X \arrow[r, leftrightarrow] & X_{d-k+1} & \end{tikzcd}$$

§ 4.- <u>VARIETES POLAIRES LOCALES ET CONDITIONS D'INCIDENCE</u>

<u>Définition 1</u>

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}^M$ muni de la forme hermitienne usuelle $(u,v) = \Sigma u_i \bar{v}_i$. Etant donnés deux sous-espaces vectoriels A et B de $\mathbb{C}^M$, on définit

$$\mathrm{dist}(B,A) = \sup_{\substack{u \in B^{\perp}-\{o\} \\ v \in A-\{o\}}} \left(\frac{(u,v)}{\|u\|\,\|v\|}\right)$$

où $B^{\perp} = \{u \in \mathbb{C}^M / (u,b) = 0$ pour tout $b \in B)$.

On remarque que $\mathrm{dist}(B,A) = 0$ implique que $B \supset A$.

<u>Définition 2</u>

Soient $X \subset U \subset \mathbb{C}^M$ un sous-espace analytique non-singulier d'un ouvert U de $\mathbb{C}^M$, tel que l'adhérence $\bar{X}$ de X dans U soit un sous-espace analytique fermé de U et un sous-espace non-singulier Y , $Y \subset \bar{X} - X$. On dit que le couple (X,Y) satisfait la condition a) de Whitney en un point $o \in Y$ (resp. la condition a) stricte avec exposant 1) si, pour toute suite de points $x_i \in X$ convergeant vers $o \in Y$ et telle que la limite $\lim\limits_{x_i \to o} T_{X,x_i}$ existe dans la grassmanienne appropriée, on a :

$\lim\limits_{x_i \to o} (\mathrm{dist}(T_{X,x_i}, T_{Y,o})) = 0$ (resp. si il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in X$ assez voisin de o , on ait $\mathrm{dist}(T_{X,x_i}, T_{Y,o}) < C.\mathrm{dist}(x,Y)$.

On dit que (X,Y) satisfait la condition b) de Whitney en o (resp. la condition b) stricte avec un exposant $e \in \mathbb{R}_+$) si il existe une rétraction locale $\rho : \mathbb{C}^M \longrightarrow Y$ telle que, pour toute suite $x_i \in X$ comme ci-dessus, $\lim\limits_{x_i \to o}\left(\mathrm{dist}\left(T_{X,x_i}, \overline{x_i\ \rho(x_i)}\right)\right) = 0$ où $\overline{x_i\ \rho(x_i)}$ désigne la droite de $\mathbb{C}^M$ joignant x_i à $\rho(x_i)$ (resp. si il existe $C' > 0$ telle que pour x assez voisin de o , $\mathrm{dist}(T_X,x,\overline{x\rho(x)}) < C'\ \mathrm{dist}(x,Y)^e$. La définition des conditions de Whitney strictes est due à Hironaka $[H_2]$.

<u>Théorème 3</u>

Soient $(X,)$ un genre d'espace analytique complexe réduit de dimension pure $d + t$, (Y,o) un sous-espace fermé non-singulier de X , de dimension t .

Pour tout représentant assez petit du germe (X,o) et tout plongement local $i : X \subset Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ tel que $i(Y) = Y \times o$ et que les limites en o de tangents à X soient transverse à $o \times \mathbb{C}^{N+1}$ (en particulier, notant $\rho : X \longrightarrow Y$ la rétraction induite par la projection $Y \times \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow Y$, on a : $\mathrm{Sing}(\rho^{-1}(y)) = \mathrm{Sing}\, X \cap (\{y\} \times \mathbb{C}^{N+1})$)

les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La suite $\left\{m_y(P_d(\rho)), m_y(P_{d-1}(\rho)), \dots, m_y(P_o(\rho))\right\} = \Gamma^*_{\rho,y}$ des multiplicités au point $y \in Y$ des variétés polaires relatives est localement constante sur Y au voisinage de o .

ii) La suite $\left\{m_y(P_{d+t-1}(X)), m_y(P_{d+t-2}(X)), \dots, m_y(P_o(X))\right\} = \Gamma^*_{X,y}$ des multiplicités au point $y \in Y$ des variétés polaires absolues est localement constante sur Y au voisinage de o .

iii) Le couple d'espaces (X^o,Y) , où X^o désigne la partie lisse de X , satisfait la condition a) de Whitney avec exposant 1 et la condition b) de Whitney avec un exposant $e > 0$ non précisé.

iv) Le couple d'espaces (X^o,Y) satisfait les conditions a) et b) de Whitney en o .

L'équivalence des conditions ii), iii) et iv) a déjà été démontrée dans [Te_3] . Pour montrer que i) $\Longrightarrow$ ii) , on se ramène vite au cas où $t = 1$, et nous allons procéder par récurrence sur d : puisque $P_d(\rho)$ est de codimension d ou vide, elle ne peut être équimultiple le long de Y que si elle est vide. On en déduit, par un argument analogue à celui de [Te_3] , qu'il existe un ouvert dense U dans l'espace $\mathbb{P}^N$ des hyper-plans de $\mathbb{C}^{N+1}$ tel que si $D_o \in U$, D_o est transverse à toutes les directions limites en o d'espaces tangents aux fibres de ρ . On en déduit que pour toute hypersurface non-singulière $H \subset Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ contenant $Y \times o$ et telle que $T_{H,o} = T_{Y,o} \times D_o$, on a : $T_{H,o}$ est transverse en o à toutes les limites en o d'espaces tangents à X^o . En effet sinon, soit T une limite d'espaces tangents telle que $T \subset T_{H,o}$. Alors T est transverse à $o \times \mathbb{C}^{N+1}$ dans $T_{Y,o} \times \mathbb{C}^{N+1}$. En effet sinon, puisque $t = 1$, on a $T \subset o \times \mathbb{C}^{N+1}$, donc $T \subset D_o$ et par conséquent pour une suite $x_i \in X^o$, $\mathrm{dist}(D_o,T_{X,x_i}) \longrightarrow 0$ quand $x_i \longrightarrow o$, mais ceci implique $\mathrm{dist}\left(D_o,T_{\rho^{-1}(\rho(x_i)),x_i}\right) \longrightarrow 0$, d'où une contradiction. Puisque T est transverse à $o \times \mathbb{C}^{N+1}$, on a : $T \cap (o \times \mathbb{C}^{N+1}) = \lim\limits_{x_i \longrightarrow o}\left(T_{\rho^{-1}(\rho(x_i)),x_i}\right)$,

d'où une contradiction puisque $T \cap (o \times \mathbb{C}^{N+1}) \subset D_o$ à nouveau.

Puisque $H \supset Y$ et que $T_{H,o}$ est transverse aux limites en o d'espaces tangents en des points de X^o , d'une part le lieu critique sur X^o de la projection $X \longrightarrow Y \times \mathbb{C}$ induite par ρ et la projection $\pi : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ de noyau D_o est vide, ce qui montre que $\gamma^{-1}(C_d(D_o)) \cap \nu^{-1}(X^o) = \emptyset$, d'autre part, en tout point non-singulier $x_i \in X^o$, l'application tangente $d_\rho : T_{X^o,x} \longrightarrow T_{Y,\rho(x)}$ est surjective et a pour noyau $T_{\rho^{-1}(\rho(x)),x}$ qui est transverse à $D_o \times \{\rho(x)\} \times \mathbb{C}^{N+1}$, puisque par hypothèse $P_d(\rho;D_o) = \emptyset$. Pour la même raison, la limite de ces noyaux est encore transverse à D_o , donc $\lim T_{X^o,x}$ est transverse à D_o . (Sinon, $\lim T_{X^o,x} \subset \{o\} \times \mathbb{C}^{N+1}$, ce qui est exclu par hypothèse). Par conséquent,

D_o est transverse à toutes les limites d'espaces tangents et donc $P_d(X) = \emptyset$ (noter que $D_o \subset \mathbb{C}^{N+1}$ est de codimension 2 dans $Y \times \mathbb{C}^{N+1}$). D'après le théorème de transversalité du § 3, on peut choisir un plan de codimension 2, $D_1 \subset \mathbb{C}^{N+1}$ assez général pour que D_1 soit transverse à la variété polaire relative $P_{d-1}(\rho;D_1)$ en chaque point $y \in Y - \{o\}$ et par conséquent aussi transversal à la surface polaire $P_{d-1}(X) = P_{d-1}(X;D_1)$ associé à $D_1 \subset Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ (de codimension 3), puisque cette surface est équisingulière en tout point de $Y - \{o\}$. Cela fait, nous pouvons encore choisir une hypersurface H dans $Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ telle que $T_{H,o}$ contienne $T_{Y,o} \times D_1$, que $T_{H,o}$ soit transverse à toutes les directions limites de tangentes en des points de $Y - \{o\}$ aux courbes $P_{d-1}(X) \cap (\{y\} \times \mathbb{C}^{N+1})$ et que $T_{H,o}$ soit transverse à toutes les limites en o d'espaces tangents à X^o. Ceci est possible comme le montre un simple argument de dimension. Puisque $T_{H,o} \supset D_1$ et que H est transverse aux limites d'espaces tangents, on a $P_{d-1}(X) \cap H \cap X^o = P_{d-1}(X \cap H) \cap X^o$ et puisque l'hypothèse de i) est encore satisfaite pour $X \cap H$, comme on le vérifie aussitôt, en utilisant le théorème 2, on a $P_{d-1}(X \cap H) = \emptyset$ d'après l'argument vu plus haut pour X, donc $P_{d-1}(X) \cap H \cap X^o = \emptyset$, c'est-à-dire $P_{d-1}(X) \cap H = Y$, ce qui signifie que $P_{d-1}(X)$ est équimultiple le long de Y, puisque H est transversal à la surface $P_{d-1}(X)$ en tout point de $Y - \{o\}$.

Par ailleurs, on a aussi, en choisissant $D_{i-1} \subset D_1$ assez général

$$P_{d-i+1}(\rho;D_{i-1}) \cap H = P_{d-i+1}(\rho|X \cap H;D_{i-1}) \quad \text{et}$$

$$P_{d-i+1}(X) \cap H \cap X^o = P_{d-i+1}(X \cap H) \cap X^o \qquad (3 \leq i \leq d+1)$$

et donc

$$P_{d-i+1}(X) \cap H = P_{d-i+1}(X \cap H) \qquad (3 \leq i \leq d+1),$$

d'où le résultat cherché par récurrence sur d.

Remarques

1) Pour se ramener au cas où $t = 1$, on raisonne ainsi : si les multiplicités des variétés polaires n'étaient pas constantes comme dans ii) pour un plan H assez général de codimension $t - 1$, les variétés polaires de $X \cap H$ ont même multiplicité que celles de X et ne sont pas constantes le long de $Y \cap H$.

(L'hypothèse implique de toutes façons $P_k(X) = \emptyset$ pour $k \geq d$) et l'on utilise à nouveau ici le résultat de transversalité (théorème 2, § 3) pour D_{d-k} assez général et $H \supset D_{d-k}$, la multiplicité de $P_k(X;D_{d-k})' \cap H$ est égale à celle de $P_k(X;D_{d-k})$, tant que codim $H <$ dim $X - k$ et de même pour les $P_k(\rho | X \cap H; D_{d-k})$.

2) L'argument ci-dessus est tout-à-fait analogue à celui qui a été utilisé dans [Te_3] pour montrer l'équimultiplicité des variétés polaires à partir des conditions de Whitney.

Supposons maintenant que (X^o, Y) satisfasse les conditions de Whitney, alors d'après les résultats de [Te_3], on a dim $N^{-1}(o) \leq d - 1$ et par ailleurs, toutes les directions limites d'espaces tangents à X contiennent $T_{Y,o}$; en en déduit qu'il existe un ouvert analytique dense $U \subset \mathbb{P}^N$ tel que tout hyperplan $D_o \subset U$ soit transverse aux limites d'espaces tangents de X en o. On a alors, pour un drapeau

$$\mathcal{D} = D_d \subset D_{d-1} \subset \ldots \subset D_o \subset \mathbb{C}^{N+1} \quad \text{assez général}$$

$$P_k(\rho; \mathcal{D}) = P_k(X; \mathcal{D}) \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq d$$

et l'équimultiplicité des variétés polaires relatives s'ensuit aussitôt.

<u>Remarque</u>

L'on a aussi dans cette situation

$$P_k(\rho; \mathcal{D}) \cap \rho^{-1}(y) = P_k(\rho^{-1}(y); \mathcal{D}) .$$

<u>Exemple</u>

Supposons que $t = 1$ et que $X \subset Y \times \mathbb{C}^{d+1}$ soit une hypersurface dont le lieu singulier coïncide avec $Y \times \{o\}$.

Notons X_y par $X \cap (\{y\} \times \mathbb{C}^{d+1})$, $\mu^{(i)}(X_y)$ pour le nombre de Milnor de l'intersection de X_y avec un plan de dimension i assez général dans $\mathbb{C}^{d+1}$ passant par o. On a alors (cf. [C. E. W.])

$$m_o(P_d(\rho)) = (\mu^{(d+1)}(X_o) + \mu^{(d)}(X_o)) - (\mu^{(d+1)}(X_y) + \mu^{(d)}(X_y)) \quad (\text{pour } y \neq 0)$$

$$m_y(P_k(\rho)) = \mu^{(k+1)}(X_y) + \mu^{(k)}(X_y) \qquad (y \in Y)$$

et l'on retrouve bien le résultat de [C. E. W.].

On peut utiliser le théorème 3 pour montrer que les multiplicités des variétés polaires absolues générales d'un germe d'espace analytique (X,o) purement de dimension d ne dépendent que de l'algèbre analytique $\mathcal{O}_{X,o}$.

Voici une esquisse du raisonnement : il suffit de prouver que $m_o(P_k(D_{d-k}))$ ne dépend pas de ce que l'on a appelé "coordonnées linéaires". Etant donnée une projection $\rho_o : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ générale donnée par $(z_o,\dots,z_N) \longmapsto (z_o,\dots,z_{d-k})$, on considère les séries

$$z_i^* = z_i + \sum_{|A|\geq 2} a_{i,A}\, z^A \quad \text{où} \quad A = (a_o,\dots,a_N) ,$$

où $\sum\limits_A a_{i,A}\, z^A \in B(\rho)$ (algèbre de Banach associée à un polycylindre de rayon ρ) . On pose $E = B(\rho)^{d-k+1}$ et l'on considère le sous-espace $X^* \subset \mathbb{C}^{N+1} \times E$ défini par $f_i(z_o^*, z_1^*,\dots,z_{d-k}^*, z_{d-k+1},\dots,z_N) = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$ où $(f_1,\dots,f_m)$ est un système de générateur pour l'idéal de X dans $\mathbb{C}^{N+1}$. Les variétés polaires relatives de $X^* \xrightarrow{\rho} E$ sont constantes en dehors d'un fermé analytique banachique de E, dont on veut démontrer qu'il est vide. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour tout sous-espace analytique de dimension finie $Y \subset E$, $\rho^{-1}(Y) = X_Y \longrightarrow Y$ a ses variétés polaires relatives équimultiples. On s'est donc ramené au cas de dimension finie. On a alors $X_Y \subset Y \times \mathbb{C}^{N+1}$ et il suffit de montrer que X_Y satisfait les conditions de Whitney le long de $Y \times o$, ce qui est très facile étant donnée la structure de X^*.

BIBLIOGRAPHIE

[C.E.W.] B. TEISSIER : Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Astérisque n° 7-8 (1973).

[H_1] H. HIRONAKA : Stratification and flatness. Proc. Nordic Summer School Oslo 1976, Noordhoff, 1977.

[H_2] H. HIRONAKA : Normal cones in analytic Whitney stratifications. Publ. Math. IHES n° 36, 1969, p. 127-138.

[K] S. KLEIMAN : Transversality of a general translate. Compositio Math. 28, 4, 1974, p. 287-297.

[L_1] LÊ DŨNG TRÀNG : Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe. Ann. Inst. Fourier, tome 23, Fasc. 4 (1973), p. 261.

[L.T.] LÊ DŨNG TRÀNG et B. TEISSIER : Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. A paraître dans Annals of Maths.

[P] RAGNI PIENE : Polar classes of singular varieties. Annales Sci. E.N.S. 11 (1978).

[Te_1] B. TEISSIER : Variétés polaires I . Inventiones Math., 40, 1977, p. 267,292.

[Te_2] B. TEISSIER : Introduction to equisingularity problems. Proc. A.M.S. Symp. n° 29, Arcata 1974, 1975.

[Te_3] B. TEISSIER : Variétés polaires locales et conditions de Whitney. C.R.A.S. Paris, 290, Série A (1980), p. 799.

[Te_4] B. TEISSIER : The Hunting of invariants.... Proc. Nordic Summer School, Oslo 1976, Noordhoff 1977.

[T_o] J. A. TODD : The arithmetical invariants of algebraic loci. Proc. London Math. Soc. 43 (1937).