AUTOUR D'UNE QUESTION DE MICHEL HERMAN

par Bernard Teissier

Version provisoire, ne prétendant pas donner une preuve complète *

Soit $f(z_1,\ldots,z_n)=0$ une équation pour un germe d'hypersurface analytique réelle possédant la propriété suivante:
Dans un voisinage de 0 *la famille* $f=\lambda$ *est topologiquement triviale pour* $|\lambda|$ *assez petit.*

Michel Herman a demandé si
Il existe alors un voisinage U *de* 0 *et une déformation* $f(z_1,\ldots,z_n)+vg(v;z_1,\ldots,z_n)$ *de* f *telle que pour* $v\neq 0$ *(et assez petit) la fonction* $F_v(z_1,\ldots,z_n)=f(z_1,\ldots,z_n)+vg(v;z_1,\ldots,z_n)$ *n'ait aucun point critique dans* U *.*

Je donne ici les grandes lignes d'une démonstration dans le cas où la singularité de f en 0 est algébriquement isolée.

1. Généralités

Soit f une série convergente en n variables à singularité algébriquement isolée en 0, c'est à dire que l'idéal jacobien $j(f)=(\frac{\partial f}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial z_n})$ est un espace vectoriel de codimension finie dans l'anneau des séries convergentes. On note μ cette codimension; $\mu=\dim_{\mathbf{R}}\mathbf{R}\{z_1,\ldots,z_n\}/j(f)$. On considère un déploiement de f, disons

$$\lambda=f(z_1,\ldots,z_n)+\sum_{k=1}^{\mu-1}t_kg_k(z_1,\ldots,z_n)$$

qui est miniversel si les images des fonctions $1,g_1,\ldots,g_{\mu-1}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}\{z_1,\ldots,z_n\}/j(f)$, ce que nous supposerons désormais. Cette fonction des variables $z\in\mathbf{R}^n$ et $t\in\mathbf{R}^{\mu-1}$, jointe au morphisme identité de $\mathbf{R}^{\mu-1}$, définit alors un germe de morphisme stable $F:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{\mu-1}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{\mu-1}$. D'après ([13], Chap. 3) le lieu critique $C\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{\mu-1}$ est non singulier et de dimension $\mu-1$ dans ce cas, et le morphisme $\nu:C\to F(C)$ induit par F sur C est fini sur son image $F(C)$, qui est une hypersurface de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{\mu-1}$ notée D et appelée *discriminant* de F. D'après *loc.cit.*, le cone tangent de D en 0 est ensemblistement égal à l'hyperplan $\lambda=0$.

Dans le cas où l'on a $\mu=1$, la fonction f a en zéro une singularité quadratique ordinaire et peut être écrite dans des coordonnées convenables $f=-\sum_1^i x_k^2+\sum_{i+1}^n x_k^2$ où l'entier i, nombre des valeurs propres négatives du hessien de f en 0, est l'*indice* du point critique quadratique ordinaire 0 de f. Il est impossible que la famille $f=\lambda$ soit topologiquement triviale; c'est même ce fait qui est à la base de la théorie de Morse.

Dans tout ce qui suit, nous supposons donc $\mu\geq 2$, nous nous plaçons dans un représentant assez petit du germe F, et les notations telles que $\mathbf{R}^{\mu-1}$, etc.. désignent en fait un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^{\mu-1}$. Plus précisément, d'après les résultats généraux

* *version de Février 1992*

de Thom et Mather (cf [7]), le morphisme F peut être stratifié avec la condition de Thom et cela implique d'après l'ouverture de la transversalité l'existence de polycylindres $U = \mathbf{\Delta}_n \times \mathbf{\Delta}_{\mu-1} \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{\mu-1}$ et $V = \mathbf{\Delta}_1 \times \mathbf{\Delta}_{\mu-1} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mu-1}$ tels que $F^{-1}(V) \cap U$ soit un voisinage de 0 dans lequel le lieu critique C est non singulier et vérifie $C \cap (\delta\mathbf{\Delta}_n \times \mathbf{\Delta}_{\mu-1}) = \emptyset$, les seuls points critiques de F qui apparaissent sont ceux qui tendent vers 0 lorsque t tend vers 0, et chacune des fibres $F^{-1}(t, \lambda)$ pour $(t, \lambda) \in V$ est transverse à $\delta\mathbf{\Delta}_n \times \{t\}$. Toutes les modifications que nous ferons induiront l'identité sur le bord de U.

Nous allons nous intéresser au degré topologique du morphisme $p \circ \nu : C \to \mathbf{R}^{\mu-1}$ induit sur C par le composé $p \circ \nu$ de la projection $p: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mu-1} \to \mathbf{R}^{\mu-1}$ et de F. Soit $B \subset \mathbf{R}^{\mu-1}$ le discriminant de la projection de D sur $\mathbf{R}^{\mu-1}$; au voisinage de 0, c'est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^{\mu-1}$. Pour $t \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ la fonction $F_t = f(z_1, \ldots, z_n) + \sum_1^{\mu-1} t_i g_i(z_1, \ldots, z_n)$ n'a que des points critiques quadratiques, à valeurs critiques distinctes, dont le nombre et l'indice sont constants lorsque t parcourt une composante connexe de $\mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$. Lorsque $\lambda_0 \in \mathbf{\Delta}_1 \times \{t\}$ est plus grand que la plus grande des valeurs critiques correspondantes $\lambda_{max}(t)$ (resp. plus petit que la plus petite $\lambda_{min}(t)$), la fibre $f(z_1, \ldots, z_n) + \sum_1^{\mu-1} t_i g_i(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_0$ est difféomorphe à la fibre $f(z_1, \ldots, z_n) = \lambda$ pour $\lambda > 0$ (resp. pour $\lambda < 0$). Nous noterons $X_{t,\lambda}$ la fibre $F^{-1}(t, \lambda) \cap (\mathbf{\Delta}_n \times \{t\})$.

On sait grâce au théorème de préparation de Weierstrass qu'un germe de fonction analytique réelle sur $\mathbf{R}^n$ singulier en 0 admet, dans des coordonnées convenables, une écriture de la forme

$$f = -\sum_{k=1}^{i} z_k^2 \ + \ \sum_{i+1}^{m} z_k^2 + f_1(z_{m+1}, \ldots, z_n) \text{ avec } f_1(z_{m+1}, \ldots, z_n) \in (z_{m+1}, \ldots, z_n)^3$$

Posons $n_1(f) = n - m$ et $m_1(f) = n_1(f) + i$; ces nombres ne dépendent que du type analytique de f en 0. On a alors

Proposition 1.- *a) Pour $t \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ (et assez proche de 0) les nombres N_i (=*

$N_i(t)$) des points critiques quadratiques d'indice i dans $\mathbf{\Delta}_n$ de la fonction

$$F_t(z_1,\ldots,z_n) = f(z_1,\ldots,z_n) + \sum_{k=1}^{\mu-1} t_k g_k(z_1,\ldots,z_n)$$

qui n'a que des singularités quadratiques ordinaires et le degré topologique de $p\circ\nu\colon C \to \mathbf{R}^{\mu-1}$ satisfont l'égalité

$$\deg\, p\circ\nu \;=\; (-1)^{m_1(f)} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i N_i\ .$$

b) La différence des caractéristiques d'Euler-Poincaré de $X_{t,\lambda}$ pour $\lambda_+ > \lambda_{max}(t)$ et pour $\lambda_- < \lambda_{min}(t)$ est

$$\begin{aligned} \chi(X_{t,\lambda_+}) - \chi(X_{t,\lambda_-}) &= \; 2\sum_{i=0}^{n}(-1)^i N_i \quad \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ \chi(X_{t,\lambda_+}) - \chi(X_{t,\lambda_-}) &= \; 0 \qquad\qquad\qquad\quad \textit{si } n \textit{ est pair} \end{aligned}$$

Remarques 1) Ceci est la version réelle du résultat bien connu pour la situation analogue en géométrie analytique complexe (*cf* [13], Chap. 3) selon lequel le degré de la projection du discriminant sur $\mathbf{C}^{\mu-1}$ est égal au nombre de Milnor μ de f en 0, qui est donc aussi le nombre des points critiques quadratiques d'une morsification de f, et la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une fibre $X_{t,\lambda}$ non singulière est $1+(-1)^{n-1}\mu$ (*cf* [8]).

2) La partie b) de la proposition est proche d'un lemme d'Arnol'd dans [1] (voir plus bas).

Corollaire 1.- *Les indices des points critiques d'une morsification locale d'une fonction f à singularité algébriquement isolée vérifient l'inégalité*

$$|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i N_i| \le \mu^{1-\frac{1}{n_1(f)}}$$

et la somme de gauche est nulle dans le cas $\mu = 2$.

Corollaire 2.- *Si la famille $f=\lambda$ est topologiquement triviale au voisinage de* 0*, on a l'égalité*

$$\deg\, p\circ\nu = 0\ .$$

Démontrons la Proposition 1: Comme il est expliqué dans [13], la géométrie du morphisme $p\circ\nu$ ne change pas si l'on remplace f par f_1. Supposons donc d'abord que f est dans $\mathbf{m}^3$; on peut alors (*loc.cit.*) choisir $g_k = z_k$ pour $1\le k\le n$. On choisit alors comme coordonnées sur le lieu critique C $(z_1, \ldots, z_n, t_{n+1}, \ldots, t_{\mu-1})$ et le morphisme $p \circ \nu$ admet l'écriture suivante:

$$t_j = -\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_n) + \sum_{k=n+1}^{\mu-1} t_k \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_n)\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$t_j = t_j \quad \text{pour} \quad n+1 \leq j \leq \mu - 1$$

on en déduit aussitôt que *l'on a entre la matrice jacobienne $Jac_x(p \circ \nu)$ du morphisme $p \circ \nu$ en un point x de C et la hessienne $H_x(F)$ de F en x (par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_n$) en ce point la relation*

$$Jac_x(p \circ \nu) = \begin{pmatrix} -H_x(F) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id}_{\mu-1-n} \end{pmatrix}.$$

d'où après passage aux déterminants les égalités

$$\mathrm{jac}_x(p \circ \nu) = (-1)^n h_x(F)$$

et donc

$$\mathrm{signe}(\mathrm{jac}_x(p \circ \nu)) = (-1)^n (-1)^{\mathrm{index}(H_x(F))}$$

Le a) de la proposition 1 résulte alors d'un réarrangement des termes et de l'étude de la variation du hessien de F lors du remplacement de f par $f \pm w^2$.
Le point b) est une conséquence bien connue de la théorie de Morse (*cf* [4], Chap. 13, exerc. 2.12, page 191), appliquée à la fonction $F_t(z) = F(z, t)$ (pour t fixé) dans $\mathbf{\Delta}_n$.

Pour démontrer le corollaire 1 on utilise le fait déjà rappelé que le degré du morphisme complexifié de $p \circ \nu$ est égal à μ; on peut d'autre part remplacer f par f_1 et donc supposer $f \in \mathbf{m}^3$ et $n_1(f) = n$. On observe alors que la restriction de $p \circ \nu$ au sous-espace non singulier de C défini par $t_{n+1} = \cdots = t_{\mu-1} = 0$ est encore de degré algébrique μ sur son image et que le sous espace de $\mathbf{R}^{\mu-1}$ défini par $t_{n+1} = \cdots = t_{\mu-1} = 0$ n'est pas contenu dans B (c'est équivalent au fait que le morphisme fini $\mathrm{grad} f \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un revêtement étale au dessus du complémentaire d'une hypersurface, ce qui résulte du théorème de lissité générique), et on applique l'inégalité de [3]. Le cas où $\mu = 2$ se ramène à celui de $f(z) = z^3$ et se vérifie par un calcul direct.

Démontrons le corollaire 2: il résulte aussitôt de la proposition lorsque n est impair et pour y ramener le cas où n est pair, d'après les remarques déjà faites, il suffit de prouver le

Lemme.- *Si la famille $f(z_1, \ldots, z_n) = \lambda$ est topologiquement triviale au voisinage de* 0*, il en est de même de la famille $f(z_1, \ldots, z_n) + w^2 = \lambda$.*

En effet, si l'on se donne deux valeurs λ, λ' assez petites, les fibres correspondantes de la fonction $f + w^2$ s'écrivent

$$\bigcup_w \{(z, w)/f(z) = \lambda - w^2\} \quad \text{et} \quad \bigcup_w \{(z, w)/f(z) = \lambda' - w^2\}$$

où w parcourt un intervalle assez petit par rapport aux valeurs de λ. D'après l'hypothèse l'homéomorphisme $h_{\lambda,\lambda',w}$ qui envoie $\{z/f(z) = \lambda - w^2\}$ sur $\{z/f(z) = \lambda' - w^2\}$ dépend continûment de w, λ, λ' et par conséquent $(z, w) \mapsto (h_{\lambda,\lambda',w}(z), w)$ définit un homéomorphisme ayant les propriétés requises.

2. Esquisse de preuve

Pour répondre positivement à la question d'Herman, il suffit de montrer que si la famille $f = \lambda$ est localement topologiquement triviale, la projection de D sur $\mathbf{R}^{\mu-1}$ n'est pas surjective au voisinage de 0 (ce qui équivaut à dire que $p \circ \nu$ n'est pas surjectif). En effet il existera alors, d'après le lemme des petits chemins, un arc analytique dans $\mathbf{R}^{\mu-1}$ dont aucun point hormis 0 n'est dans l'image de D. La famille $G(z, v)$ de fonctions correspondante satisfait $G(z, 0) = f$ et $G(z, v_0)$ est sans point critique dans $\mathbf{\Delta}_n$ pour $v_0 \neq 0$. Le corollaire 2 nous dit que la condition nécéssaire deg $p \circ \nu = 0$ est réalisée. Nous allons utiliser le fait que cela équivaut à l'égalité $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i N_i = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ pour construire des points de $\mathbf{R}^{\mu-1}$ hors de l'image de $p \circ \nu$.

Les deux points cruciaux sont la version locale (et pas seulement germique) du théorème du déploiement versel, due à Sergeraert et Lassalle (*cf* [9] et [6]), et la méthode d'élimination de couples de points critiques du théorème du h-cobordisme. Il faut y ajouter le fait que les éliminations de points critiques se font en restant dans un voisinage bien choisi de f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{\Delta}_n, \mathbf{R})$.

On remarque d'abord qu'à cause de la théorie du déploiement versel , il suffit de s'assurer dans le cas différentiable que $p \circ \nu$ n'est pas surjectif. En effet puisque nous avons supposé que f est à singularité algébriquement isolée, son déploiement versel différentiable coincide avec son déploiement versel analytique. Nous pouvons donc considérer le déploiement versel de f comme une section transversale au voisinage de f de l'orbite de f sous l'action de Diff($\mathbf{R}^n$) sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Plus précisément, d'après [9] et [6], il existe des un voisinage U de f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ (pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ fine, *cf.* loc. cit.) et des applications continues ϕ et ψ de U dans Diff($\mathbf{R}^n$) telles que pour tout $f' \in U$ il existe des point t et u de $\mathbf{R}^{\mu-1}$ tels que l'on ait :

$$f' = f \circ \phi(f') + t = (f + u) \circ \psi(f').$$

L'étape suivante est de vérifier que les méthodes d'élimination des points critiques décrites dans le livre [2] de Cerf et Gramain sur le h-cobordisme se localisent. On part alors d'un point $t_0 \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ et on élimine successivement les points critiques de la fonction F_{t_0}. Grace à la structure localement conique de B, on peut supposer sans changer le type différentiable de l'application $F_{t_0}\colon \mathbf{\Delta}_n \to \mathbf{R}$ que t_0 est arbitrairement proche de 0, et la construction explicite de [2] devrait permettre de voir que les semi-normes dans $\mathcal{C}^\infty$ de la perturbation de F_{t_0} qui croise ou élimine les points critiques sont höldériennes par rapport à la distance maximale dans $\mathbf{R}^n$ des points critiques de la fonction F_{t_0}, et cette distance maximale est elle-même une fonction höldérienne de t_0 puisque le morphisme $p \circ \nu$ est fini.

Plus précisément, en étudiant le difféomorphisme local $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to F_{t_0}^{-1}(\mathbf{\Delta}_1) \cap \mathbf{\Delta}_n$ qui met la fonction F_{t_0} sous forme normale au voisinage d'un de ses points critiques , on voit que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{M}} & \xrightarrow{\varphi} & F_{t_0}^{-1}(\mathbf{\Delta}_1 \times \{t_0\}) \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow F_{t_0} \\ [-1,1] & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbf{\Delta}_1 \times \{t_0\} \end{array}$$

où h est la forme normale d'un point critique quadratique d'indice i, en choisissant pour φ' la multiplication par la valeur absolue du produit des déterminants extraits du Hessien de F_{t_0} au point critique et intervenant dans le processus de diagonalisation associé à la matrice Hessienne, le calcul donne pour chaque t dans la même composante connexe de $\mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ un difféomorphisme local φ tel que ce diagramme soit un plongement du modèle au sens de *loc. cit.* p. II.12 adapté à f au point critique considéré et tel que toutes les opérations qui y sont décrites sur le modèle canonique se transportent en des perturbations de F_{t_0} qui sont petites avec t_0. La stabilité de F implique que les conditions de transversalité des nappes ascendantes et descendantes nécéssaires pour croiser et éliminer les points critiques sont bien réalisées, et la contractilité de $F_{t_0}^{-1}(\mathbf{\Delta}_1 \times \{t_0\}) \cap \mathbf{\Delta}_n$ implique l'unicité du point d'intersection des nappes montantes et descendantes associées à des points critiques consécutifs d'indices consécutifs.

L'ouverture de la versalité qui résulte du théorème de Sergeraert et Lassalle implique que, après un choix de t_0 assez petit, les éliminations et les croisements de points critiques peuvent être réalisés au moyen de chemins contenus dans l'intersection avec $\mathbf{R}^{\mu-1}$ de l'ouvert V fixé au début. Lorsque tous les points critiques ont été éliminés on a un point de V représentant une fonction sans point critique et dont l'orbite sous Diff($\mathbf{R}^n$) rencontre $\mathbf{R}^{\mu-1}$ en un point t qui est hors de l'image de D et on a terminé. Il n'y a pas d'obstruction de dimension parce qu'on peut ajouter les carrés de nouvelles variables sans changer le discriminant ni le morphisme $p \circ \nu$, et il n'y a pas d'obstruction topologique parce que l'hypothèse implique que toutes les fibres $f = \lambda$ sont contractiles, puisque c'est le cas pour $f = 0$. La condition numérique deg $p \circ \nu = 0$ ci-dessus est exactement, d'après le a) de la proposition 1, celle qu'il faut pour que l'on puisse éliminer successivement *tous* les points critiques selon la méthode exposée dans [2], d'où le résultat. Il faut par contre vérifier que la preuve de Sergeraert et Lassalle s'adapte bien au cas du groupe $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{\Delta}_n)$.

Remarques.- 1) On peut se demander si inversement une fonction f qui admet un déploiement $f + vg$ sans point critique dans un voisinage de 0 est telle que le feuilletage $f = \lambda$ soit topologiquement trivial au voisinage de 0. Comme me l'a fait remarquer J.J. Risler, lorsque $n = 2$ la condition implique que toutes les fibres sont contractiles puisqu'un ovale contient nécessairement un point critique.

2) Appelons *indice de f en 0*,et notons $\mathrm{ind}_0 f$ le degré, pour $\epsilon > 0$ assez petit et non nul, de l'application $\frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|} \colon \mathbf{S}_\epsilon^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$, où $\mathbf{S}_\epsilon^{n-1}$ désigne la sphère de centre 0 et de rayon ϵ. *On a l'égalité*

$$\mathrm{ind}_0 f = (-1)^{n_1(f)} \deg\, p \circ \nu$$

En effet, l'addition à f de $\pm w^2$, où w est une nouvelle variable, multiplie le degré de $\frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|}$ par ± 1; on peut donc supposer $f \in \mathbf{m}^3$ et comme on l'a vu on peut se restreindre au dessus du sous espace de $\mathbf{R}^{\mu-1}$ défini par $t_{n+1} = \cdots = t_{\mu-1} = 0$. Le morphisme déduit de $p \circ \nu$ par cette restriction est le morphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ décrit par

$$t_i = -\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

et a même degré que $p \circ \nu$ à cause de la forme de la matrice $\mathrm{Jac}_x(p \circ \nu)$. Un calcul facile montre que son degré est aussi celui de $-\frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|}$, d'où le résultat. Après cette remarque, la partie b) de la Proposition 1 est bien un avatar du premier lemme du §2 de [1].

3) L'hypothèse que la fonction f soit à singularité algébriquement isolée est indispensable comme le montre l'exemple suivant tiré de [10] : la fonction $f = z_1^3 - 3z_1(z_2^2 + z_3^2)$ sur $\mathbf{R}^3$ a en 0 une singularité isolée au sens réel, elle satisfait $\mathrm{ind}_0 f = 0$ mais aucune de ses petites déformations n'est sans point critique dans un voisinage fixé de 0. Pour le voir, il suffit de considérer la géométrie de l'application $\mathrm{grad} f$, dont on vérifie par un petit calcul qu'elle est de degré 0, et d'autre part le lieu critique $(\mathrm{grad} f)^{-1}(0)$ apparaît ensemblistement comme l'intersection d'un cône quadratique et d'un hyperplan le rencontrant seulement en son sommet. Aucune perturbation de cette configuration ne peut être vide, et donc tout déploiement de f a des points critiques au voisinage de 0, en fait souvent une courbe de points critiques. Le point ici est que la singularité n'est pas algébriquement isolée, l'idéal jacobien de f n'est pas une intersection complète, et les considérations de degré n'ont pas de sens.

4) Le résultat n'est plus vrai si l'on se place dans le cadre des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (*cf* [5] et [11]). On peut se l'expliquer par la perte de différentiabilité dans le théorème de division, qui affecte le théorème du déploiement versel.

Je remercie Adrien Douady pour m'avoir transmis cette question avec vivacité lors de la fête en l'honneur de Haefliger et Kervaire à Genève en Avril 1990, et André Gramain pour ses explications limpides de [2].

3. Appendice 1: L'indice comme nombre de Milnor réel

A un élément $f \in \mathbf{R}\{x_0, \ldots, x_n\}$ ayant une singularité isolée à l'origine, on peut associer le nombre $\mu_{\mathbf{R}}(f, 0) = \mathrm{ind}_0 f = (-1)^{n_1(f)} \deg\, p \circ \nu$; montrons qu'il se comporte comme une version réelle du nombre de Milnor complexe:
a) C'est un invariant du type topologique en 0 de f
b) On a pour la somme $\oplus$ de Thom-Sebastiani $\mu_{\mathbf{R}}(f \oplus g, 0) = \mu_{\mathbf{R}}(f, 0)\mu_{\mathbf{R}}(g, 0)$

4. Appendice 2: retour sur la règle des phases de Gibbs

Soit T_0 la strate de $0 \in \mathbf{R}^\mu$ dans une stratification de Thom du déploiement versel F, et soit $\nu(F)$ le nombre maximum de minima non dégénérés que peut présenter une fonction F_t, pour $t \in \mathbf{R}^{\mu-1}$ arbitrairement proche de 0. Thom avait demandé dans ([16], p.227) si l'on avait l'inégalité

$$\nu(F) \leq \mathrm{codim}_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mu-1}} T_0$$

Selon ses postulats, le terme de gauche représente le nombre ϕ des phases pouvant coexister dans un système régi par un potentiel F_t et le terme de droite représente $k+1$ où k est le nombre des paramètres dont dépend effectivement le système, puisque la famille des fonctions F_t est topologiquement triviale lorsque t parcourt l'image T de T_0 dans $\mathbf{R}^{\mu-1}$, qui est de codimension $\operatorname{codim}_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{\mu-1}} T_0 - 1$ dans $\mathbf{R}^{\mu-1}$; le nombre k est donc le nombre des paramètres topologiques de la situation.

L'inégalité ci-dessus traduit donc celle-ci:

$$\phi \leq k+1$$

qui est essentiellement la règle des phases des thermodynamiciens.

J'avais donné dans [14] (voir aussi [15]) une esquisse de démonstration de l'inégalité demandée par Thom, démonstration dont la partie incomplète était la justification du fait que l'on pouvait par des croisements de points critiques trouver dans un voisinage arbitraire de 0 des points $t \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ tels que la fonction F_t ait tous ses minima au même niveau. L'argument de continuité exposé ci-dessus et s'appuyant sur les présentations explicites de [2] et le théorème de Sergeraert et Lassalle permet de montrer exactement comme plus haut qu'en partant de $t \in \mathbf{R}^{\mu-1} \setminus B$ assez proche de 0 il est possible de construire par croisement de points critiques un point t' contenu dans un voisinage de 0 donné à l'avance et ayant la propriété requise. Ici aussi il faut pour se libérer des conditions de dimension, remarquer que le problème ne change pas si l'on remplace f par $f + w^2$.

Pour la commodité du lecteur j'indique le reste de la démonstration:

On introduit un invariant du morphisme F, noté $\delta(F)$ et qui est *le nombre maximum de points critiques d'une fonction F_t contenus dans une même fibre de celle-ci* lorsqu'on laisse t parcourir un voisinage assez petit de 0. L'inégalité voulue est obtenue en composant les deux inégalités

$$\nu(F) \leq \delta(F) \leq \operatorname{codim}_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{\mu-1}} T_0$$

La première inégalité résulte aussitôt de ce qui précède, et la seconde est établie comme ceci:

D'après le théorème de décomposition en produit dans les déploiements versels de ([13], Chap. 3), l'entier $\delta(F)$ est égal au plus grand entier a tel que l'origine de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mu-1}$ soit adhérente à l'ensemble $\mathrm{Croix}_a(D)$ des points du discriminant D de F au voisinage desquels D est isomorphe à la réunion de a hypersurfaces non singulières en position générale. Remarquons que par sa définition même, le sous ensemble $\mathrm{Croix}_a(F)$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{\mu-1}$ est semi-analytique et de codimension a. Puisque par définition le morphisme F est topologiquement trivial (au sens des morphismes stratifiés) le long de T_0, l'hypersurface D est, localement en 0, topologiquement triviale le long de T_0. Or le fait pour un point de D d'appartenir à $\mathrm{Croix}_a(D)$ est clairement une condition invariante par homéomorphisme stratifié, ce qui implique que l'on a l'inclusion

$$T_0 \subset \overline{\mathrm{Croix}_{\delta(F)}(D)}$$

et la seconde inégalité d'après la remarque sur la codimension de $\mathrm{Croix}_a(D)$.

Références

[1] Vladimir I. Arnol'd, Index of a singular point of a vector field, the Petrovski-Oleinik inequality and mixed Hodge structures. *Funkt. Ana. i Pril.,* **12**, 1, (1978), 1-14.
[2] Jean Cerf et André Gramain : *Le théorème du h-cobordisme (Smale)*, Secrétariat mathématique de l'Ecole normale supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, 1968.
[3] David Eisenbud et Harold Levine, An algebraic formula for the degree of a $\mathcal{C}^\infty$ map-germ, *Annals of Math.* **106** (1977), 1-38.
[4] Claude Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris 1971.
[5] Henry King, The number of critical points in Morse approximations, *Compositio Mathematica,* **34** , 3 , 1977, 285-288.
[6] G. Lassalle, Déploiement universel d'une application de codimension finie, *Annales Sci. E.N.S.,* **7** (1974), 219-234.
[7] John Mather, How to stratify mappings and jet spaces, in *Plans sur Bex 1975,* Springer Lecture Notes No. 535 (1976), 128-176.
[8] John Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press 1968
[9] Francis Sergeraert, Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet,.. *Annales Sci. E.N.S.,* **5** (1972), 599-660.
[10] Carl Simon and Charles Titus, fixed point index of symplectic maps, in *Géométrie symplectique et physique mathématique,* J.-M. Souriau, éd., Editions du C.N.R.S., Paris 1975.
[11] Carl Simon and Charles Titus, The removal of index zero critical points of real analytic functions on $\mathbf{R}^2$, I., regular functions of odd order.*Preprint, University of Michigan, 1978.*
[12] Carl Simon and Charles Titus, perturbations of degenerate singularities, in *Dynamical systems II,* Academic Press 1982.
[13] Bernard Teissier, Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, *Singularités à Cargese* , Astérisque, S.M.F., 1973, p.285-362.
[14] Bernard Teissier, Sur la version catastrophique de la règle des phases de Gibbs et l'invariant δ des singularités d'hypersurfaces, *Rencontre de Cargèse sur les singularités et leurs applications (1975)* Département de Mathématiques, Université de Nice, 1976.
[15] Bernard Teissier, the hunting of invariants in the geometry of discriminants, *Nordic Summer School, Oslo 1976* , Sijthoff and Noordhof 1977.
[16] René Thom, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Christian Bourgois, Paris 1980.