PREFACE

Bernard Teissier

La géométrie *modérée* dont le premier exemple est la théorie des ensembles semi-algébriques réels (définis dans un espace $\mathbf{R}^n$ par un nombre fini d'égalités et d'inégalités portant sur des polynômes) est devenue un sujet majeur des Mathématiques contemporaines, où se rencontrent la théorie des modèles en logique et des résultats de géométrie, d'analyse "dure" et de géométrie algébrique et arithmétique.

Le vocable *modéré* fait d'abord référence à des propriétés géométriques de sous-ensembles X de $\mathbf{R}^n$: finitude locale du nombre des composantes connexes, c'est à dire finitude du nombre des composantes connexes de l'intersection de X avec des boules fermées, finitude locale du nombre des "formes locales" qui apparaissent, en bref possibilité de décrire en termes finis et à une seule échelle la topologie locale. Si l'on veut, c'est le contraire de la géométrie fractale. La modération se manifeste aussi dans le comportement des fibres des morphismes modérés (c'est á dire dont le graphe est modéré) entre objets modérés. Certaines des propriétés de modération sont de nature encore plus catégorique et apparaissent dans l'étude des espaces d'applications modérées, par exemple les espaces d'arcs.

Dans le cas des ensembles semi-algébriques, le caractère polynomial est une condition de finitude forte que l'on peut exploiter grâce en particulier au théorème de Cohen-Seidenberg: la projection dans $\mathbf{R}^p$ d'un ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ est semi-algébrique. Ce résultat permet de démontrer par récurrence de nombreuses propriétés de modération géométrique, et il a par ailleurs une interprétation logique en termes d'élimination de quantificateurs existentiels.

Il faut cependant souligner que le cadre semi-algébrique est insuffisant pour nombre d'applications, en particulier en théorie des équations aux dérivées partielles et en théorie du contrôle. Dans ces deux cadres ce sont les fonctions analytiques réelles qui jouent le rôle de solutions idéales permettant en principe une prédictibilité parfaite dans leur domaine de convergence.

Le premier exemple de géométrie modérée après les ensembles semi-algébriques est la théorie des ensembles semi-analytiques, définis localement par des égalités et inégalités portant sur des fonctions analytiques réelles, initiée par S. Łojasiewicz. Elle présente des difficultés radicalement nouvelles et ses méthodes et résultats ont servi de modèle aux développements ultérieurs.

On doit à Łojasiewicz (ses notes de 1965, bien que non publiées, sont restées la référence pendant bien des années) et à Thom d'avoir perçu dans les années 1960, et démontré pour l'essentiel, que la géométrie des ensembles semi-analytiques était "modérée", c'est à dire jouissait des mêmes propriétés de finitude que les semi-algébriques: finitude locale du nombre de composantes connexes, stratifications assurant la finitude du nombre des types topologiques locaux, etc. et cela bien que l'on ne dispose ni de la finitude intrinsèque des polynômes ni d'un théorème à la Cohen-Seidenberg.

En effet l'image par un morphisme analytique propre d'un ensemble semi-analytique n'est pas en général semi-analytique, et cela handicape sévèrement la théorie, comme Łojasiewicz lui-même le savait bien. En 1968 Gabrielov a démontré que le complémentaire de l'image propre d'un semi-analytique est aussi l'image propre d'un semi-analytique, ouvrant ainsi la voie à la théorie des *ensembles sous-analytiques* que Łojasiewicz et Thom appelaient de leurs voeux. Un ensemble sous-analytique est essentiellement une combinaison booléenne d'images de semi-analytiques par des morphismes analytiques propres.

Cette théorie a été ensuite développée et sa modération prouvée d'un côté par Hironaka en utilisant la philosophie de la résolution des singularités, c'est à dire la simplification des problèmes par des morphismes biméromorphes propres, et d'un autre par Łojasiewicz et ses élèves en utilisant la technique qui consiste à étudier soigneusement certaines projections d'un semi-analytique sur des espaces affines réels au moyen de la description des semi-analytiques par des *partitions normales.*

Cette dernière méthode, qui est centrale dans l'approche de Łojasiewicz, est une manière très créative de contourner les difficultés dues à la non semi-analyticité des images propres de semi-analytiques et d'exploiter en même temps le plus fort théorème de finitude locale en géométrie analytique: le théorème de préparation de Weierstrass. Elle fait découvrir que dans le cadre analytique réel comme dans le cadre complexe la finitude la plus importante localement n'est pas due à la polynomialité mais à la polynomialité *relative* que donne le théorème de préparation. C'est le point de départ de la o-minimalité. De plus elle est géométriquement très instructive et est plus liées aux méthodes traditionnellement utilisées par les logiciens que celle de Hironaka, bien que cette dernière situation soit en train de changer.

La méthode des partitions normales utilise et traduit en équations le fait que pour une projection linéaire *assez générale* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ l'image dans $\mathbf{R}^k$ d'un sous-ensemble semi-analytique $X \subset \mathbf{R}^n$ de dimension k est semi-analytique et que le morphisme $X \to \mathbf{R}^k$ est fini. En appliquant ceci à une suite de projections linéaires générales on présente simultanément, au voisinage d'un de ses points (et de ses projections), X et toutes ses projections comme réunions de strates qui sont des graphes de fonctions analytiques définies sur des espaces de dimension inférieure.

Les résultats métriques de la théorie des ensembles semi- et sous-analytiques (Chapitre 3 du livre), à commencer par les fameuses inégalités de Łojasiewicz, qui à la base comparent localement la valeur de deux fonctions analytiques (ou sous-analytiques) s'annulant sur le même ensemble, jouent depuis la preuve de la division des distributions un rôle important en théorie des équations aux dérivées partielles comme en théorie des singularités.
En particulier l'inégalité de Łojasiewicz (Théorème 3.10) reliant la valeur d'une fonction (sous-)analytique en un point et la distance de ce point à l'ensemble des zéros de la fonction est un de ces résultat dont l'intérêt et l'utilité sont universels, et qu'il il est bon de voir dans leur milieu natif.

Parmi les autres sujets importants pour les applications on peut évoquer aussi la variation "modérée" en topologie (Théorème 4.18) et du point de vue métrique des fibres d'un morphisme sous-analytique propre, qui fait l'objet du Chapitre 4 avec le caractère sous-analytique de l'application de Gauss d'un ensemble sous-analytique.
Le développement des théories o-minimales (et maintenant b-minimales), qui sont une sorte d'axiomatisation des géométries modérées que l'on retrouve tant au voisinage du $16^{\text{ème}}$ problème de Hilbert que dans l'intégration motivique, est basé en partie sur la compréhension des méthodes de démonstration des résultats-clés de finitude en géométrie sous-analytique.

Il est donc important qu'il existe une présentation de la théorie des sous-ensembles sous-analytiques par ces méthodes qui soit accessible à des non-spécialistes tout en exposant la théorie dans sa richesse, y compris en détaillant les preuves ingénieuses que l'école de Łojasiewicz a trouvées et qui sont jusqu'ici restées dispersées dans la littérature.

C'est ce qu'accomplit, en peu de pages, ce livre dont l'utilité me semble plus grande encore aujourd'hui qu'à l'époque déjà lointaine où il n'existait que comme projet.

Bernard Teissier

Directeur de recherches au CNRS.