FRACTIONS LIPSCHITZIENNES D'UNE ALGEBRE ANALYTIQUE COMPLEXE ET SATURATION DE ZARISKI.

Frédéric PHAM
Service de Physique Théorique C.E.N. Saclay.

et

Bernard TEISSIER
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

N° M17.0669

Juin 1969

INTRODUCTION

En cherchant à définir une "bonne" notion d' "équisingularité", Zariski a été amené [10] à définir ce qu'il appelle la "saturation" d'un anneau local : l'anneau saturé $\tilde{A}$ d'un anneau A contient celui-ci et est contenu dans son normalisé $\bar{A}$, et pour un anneau complet intègre de dimension 1, la donnée du saturé équivaut à la donnée des exposants caractéristiques de Puiseux de la courbe algébroide correspondante.

Dans le cas des algèbres analytiques complexes, il est bien connu que l'algèbre normalisée $\bar{A}$ coincide avec l'ensemble des germes de fonctions méromorphes bornées en module; parmi les algèbres intermédiaires entre A et $\bar{A}$, l'une s'introduit alors assez naturellement : c'est l'algèbre des germes de fonctions méromorphes continues au sens de Lipschitz. Nous nous proposons d'étudier cette algèbre, d'abord formellement (§1), puis géométriquement (§2), et de démontrer (§§3 et 5) qu'au moins dans le cas des hypersurfaces, elle coincide avec la saturée de Zariski. Au §4, nous montrons comment dans le cas d'une courbe réduite, mais non nécessairement irréductible, les constructions des §§ 1 et 2 fournissent une suite d'exposants fractionnaires (définie intrinsèquement, sans référence à aucun système de coordonnée), qui généralise la suite des exposants caractéristiques de Puiseux d'une courbe irréductible. Enfin, au §6, nous retrouvons très simplement le résultat de Zariski d'après lequel l'équisaturation d'une famille d'hypersurfaces implique leur "équisingularité topologique" (nous obtenons même d'ailleurs l' "équisingularité lipschitzienne", réalisée par une déformation lipschitzienne de l'espace ambiant).

Tous les raisonnements reposent sur la technique des "éclatements normalisés" (rappelée dans les "Préliminaires"), et nous remercions le Professeur H.Hironaka qui nous l'a enseignée.

PRELIMINAIRES.

(RAPPELS SUR LA TECHNIQUE DES ECLATEMENTS NORMALISES ET LES MAJORATIONS DE FONCTIONS ANALYTIQUES).

P.0 CONVENTIONS : Dans ce qui suit les anneaux sont commutatifs, unitaires et noethériens, un anneau A est dit normal s'il est intégralement fermé dans son anneau total de fractions tot (A). Un espace analytique $(X,\mathcal{O}_X)$ est dit normal si en tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est normal. On notera $\bar{A}$ la fermeture intégrale d'un anneau A dans tot (A).

P.1 PROPRIETE UNIVERSELLE DE LA NORMALISATION.

Soit $n : \bar{X} \to X$ la normalisation d'un espace analytique X : $\bar{X} = \mathrm{Specan}_X \bar{\mathcal{O}}_X$, où $\bar{\mathcal{O}}_X$ est une $\mathcal{O}_X$ -algèbre finie vérifiant $(\bar{\mathcal{O}}_X)_x = \overline{\mathcal{O}_{X,x}}$

Proposition : Pour tout espace analytique normal $Y \xrightarrow{f} X$ au-dessus de X, tel que l'image par f d'aucune composante irréductible de Y ne soit contenue dans $N = \mathrm{Supp}\ \bar{\mathcal{O}}_X/\mathcal{O}_X$ (sous-espace analytique des points de X où $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas normal), il existe une factorisation unique :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \bar{X} \arrow[d, "n"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Preuve :

a) Version algébrique.

Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.
Soient $(\mathfrak{p}_i)_{i=1,..,k}$ les idéaux premiers de 0 dans B.
On suppose :
i) B est normal
ii) $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}_i) \not\supset C_{\bar{A}}(A) \qquad i = 1,\ldots,k$
où $C_{\bar{A}}(A)$ désigne le conducteur de A dans $\bar{A}$:

$$C_{\bar{A}}(A) = \{g \in A \mid g\bar{A} \subset A\}.$$

Alors, il existe une factorisation unique :

$$\begin{tikzcd} & \bar{A} \arrow[dr, "\bar{\varphi}"] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"'] & & B \end{tikzcd}$$

En effet, par le lemme d'évitement, il existe $g \in C_{\bar{A}}(A)$, tel que $g \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ $i = 1,\ldots,k$, ce qui entraîne que $\varphi(g)$ n'est pas diviseur de 0 dans B. Pour tout $h \in \bar{A}$, on pose :

$$\bar{\varphi}(h) = \frac{\varphi(g.h)}{\varphi(g)} \in \text{tot }(B)$$

mais h étant entier sur A, $\bar{\varphi}(h)$ est entier sur $\varphi(A)$ donc sur B. Donc $\bar{\varphi}(h) \in B$ et $\bar{\varphi}$ est la factorisation cherchée. L'unicité est évidente

b) Version géométrique.

Soit $Y \xrightarrow{f} X$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Les conditions de l'énoncé restent vrai localement en $y \in Y$ puisque si $\varphi^{-1}(N)$ contient localement une composante irréductible de Y, il la contient globalement. On en déduit que l'homomorphisme local :

$$\mathcal{O}_{X,f(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

satisfait les conditions de la version algébrique.

D'où factorisation unique :

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{O}_{X,f(y)}} \arrow[dr] & \\ \mathcal{O}_{X,f(y)} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{O}_{Y,y} \end{tikzcd}$$

et par la cohérence de $\bar{\mathcal{O}}_X$, l'existence et l'unicité du morphisme cherché.

P.2 PROPRIETE UNIVERSELLE DE L'ECLATEMENT (voir [2]).

Soit $X \hookleftarrow Y$ deux espaces analytiques, $\mathcal{Y}$ l'Idéal de Y dans X. Il existe un unique espace analytique $Z \xrightarrow{\pi} X$ au-dessus de X tel que :

i) $\pi^{-1}(Y)$ est un diviseur de Z, i.e. $\mathcal{Y}.\mathcal{O}_Z$ est inversible.

ii) pour tout morphisme $T \xrightarrow{\varphi} X$ tel que $\mathcal{Y}.\mathcal{O}_T$ soit inversible, il existe une factorisation unique :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "Bl(\varphi)"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

le morphisme $Z \xrightarrow{\pi} X$ s'appelle éclatement de X le long de Y. On rappelle que π est biméromorphe, propre et surjectif et que $\pi|Z-\pi^{-1}(Y)$ est un isomorphisme sur X - Y .

P.3 PROPRIETE UNIVERSELLE DE L'ECLATEMENT NORMALISE.

<u>Proposition</u> : <u>Soient</u> $Y \hookrightarrow X$ <u>tels que</u> X <u>soit normal à l'extérieur de</u> Y. Alors, pour tout morphisme $T \xrightarrow{\varphi} X$ tel que :

i) T soit normal

ii) $\mathcal{Y}.\mathcal{O}_T$ soit inversible,

il existe une factorisation unique :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\overline{Bl(\varphi)}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \bar{Z} \arrow[d, "n\circ\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de vérifier que la factorisation $T \xrightarrow{Bl(\varphi)} Z$ vérifie les conditions de P.1 . Puisque $\pi|Z-\pi^{-1}(Y)$ est un isomorphisme, $Z-\pi^{-1}(Y)$ est normal et il suffit de vérifier que l'image de chaque composante irréductible de T rencontre $Z-\pi^{-1}(Y)$. Mais l'image réciproque de $\pi^{-1}(Y)$ par $Bl(\varphi)$ est un diviseur par hypothèse. T étant normal, ce diviseur ne saurait contenir aucune composante irréductible.

P.4 ECLATEMENT NORMALISE ET FERMETURE INTEGRALE D'UN IDEAL.(voir aussi [4] Chap.II).

Soient A l'algèbre analytique d'un germe d'espace analytique X, I un idéal de A, $Y \hookrightarrow X$ le sous-germe correspondant. On sait que l'éclatement du germe Y dans le germe X est l'objet en variétés projectives $Z = \mathrm{Proj}_A E$ associé à l'algèbre graduée $E = \bigoplus_{n\geq 0} I^n$.

Le normalisé de Z peut s'écrire $\bar{Z} = \mathrm{Proj}_A \bar{E}$, avec $\bar{E} = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^n}$ (où pour un idéal de J de A, on a défini :

$$\bar{J} = \{h \in \mathrm{tot}(A) \mid \exists\, j_1 \in J,\ j_2 \in J^2, \ldots, j_k \in J^k :\ h^k + j_1 h^{k-1} + \ldots + j_k = 0\}$$

idéal de $\bar{A}$ appelé <u>fermeture intégrale de l'idéal J dans $\bar{A}$</u>.)

Comme objet au-dessus de $\bar{X}$, $\bar{Z} = \mathrm{Proj}_{\bar{A}} \bar{E}$. Mais $\bar{E}$ étant une $\bar{A}$-algèbre graduée de type fini, il existe un entier positif s tel que l'algèbre graduée $\bar{E}^{(s)} = \bigoplus_{n\geq 0} \overline{I^{n.s}}$ soit engendrée par ses éléments de degré 1 : $\bar{E}_1^{(s)} = \overline{I^s}$. Mais alors $\bar{E}_n^{(s)} = (\overline{I^s})^n$, et comme l'on sait qu'il y a isomorphisme canonique $\bar{Z} = \mathrm{Proj}_{\bar{A}} \bar{E}^{(s)}$, on voit que :

<u>L'éclatement normalisé $\bar{Z}$ de I dans A, muni de sa flèche canonique dans $\bar{X}$, coincide avec l'éclatement de $\overline{I^s}$ dans $\bar{A}$</u> .

<u>Proposition</u> i) : I et $\bar{I}$ <u>engendrent le même Idéal de</u> $\mathcal{O}_{\bar{Z}}$, i.e. $I\mathcal{O}_{\bar{Z}} = \bar{I}\mathcal{O}_{\bar{Z}}$.

<u>Preuve</u> : $\bar{E}$ est un E-module de type fini donc pour N assez grand $I.\overline{I^N} = \overline{I^{N+1}}$ or $\bar{I}.\overline{I^N} \subset \overline{I^{N+1}}$ d'où l'on tire :

$$(*) \qquad \bar{I}\mathcal{O}_{\bar{Z}} \,.\, \overline{I^N}\mathcal{O}_{\bar{Z}} \subset I\mathcal{O}_{\bar{Z}} \,.\, \overline{I^N}\mathcal{O}_{\bar{Z}}$$

Mais si: $N = k.s$, $\overline{I^N}.\mathcal{O}_{\bar{Z}} = (\overline{I^s})^k.\mathcal{O}_{\bar{Z}}$, ce dernier idéal étant inversible, on peut simplifier par $\overline{I^N}\mathcal{O}_{\bar{Z}}$ dans (*). D'où $\bar{I}\mathcal{O}_{\bar{Z}} \subset I\mathcal{O}_{\bar{Z}}$, et l'inclusion inverse est évidente.

<u>Proposition ii)</u> : $\bar{I}$ <u>coincide avec l'ensemble des éléments de $\bar{A}$ qui définissent une section de</u> $I.\mathcal{O}_{\bar{Z}}$.

<u>Preuve</u> : Si $f \in \bar{I}$, f définit évidemment une section de $\bar{I}\mathcal{O}_{\bar{Z}}$. Mais $\bar{I}\mathcal{O}_{\bar{Z}} = I\mathcal{O}_{\bar{Z}}$ d'après la proposition i). Réciproquement, supposons que $f \in \bar{A}$ définisse une section de $I\mathcal{O}_{\bar{Z}}$: en écrivant ce que cela signifie dans des ouverts affines $\bar{Z}_{(g_k)} \subset \bar{Z}$, où $g_k \in \overline{I^s}$, on trouve qu'il doit exister des entiers μ_k tels que : $f.g_k^{\mu_k} \in I.(\overline{I^s})^{\mu_k}$.

Soit (g_k) une famille finie de générateurs de $\overline{I^s}$. Pour N assez grand, tout monôme de degré N dans les g_k contiendra l'un des $g_k^{\mu_k}$ en facteur, de sorte que:

$$f.(\overline{I^s})^N \subset I.(\overline{I^s})^N,$$

c'est-à-dire, en choisissant une base (e_i) de $(\overline{I^s})^N$:

$$fe_i = \Sigma\, a_{ij} e_j \,,\ a_{ij} \in I \,,$$

d'où l'on déduit, puisque $\bar{A}$ peut être supposée intègre,

$$\det(f.\mathbb{1} - \|a_{ij}\|) = 0 \,,$$

qui est bien une équation de dépendance intégrale de f sur I.

P.5 THEOREMES DE MAJORATION.

Théorème M_1. (bien connu, voir par exemple [1]).

Soient A une algèbre analytique complexe, X le germe associé. Pour $h \in \operatorname{tot}(A)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $h \in \bar{A}$

ii) h définit sur X^{red} un germe de fonction bornée en module.

Théorème M_2.

Soient A une algèbre analytique complexe, X le germe associé, $I = (x_1,..,x_p)$ un idéal de A, $\bar{Z}$ l'éclatement normalisé de I dans X. Pour $h \in \operatorname{tot}(A)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $h \in I.\mathcal{O}_{\bar{Z}}$

ii) h définit sur X^{red} un germe de fonction majorée en module par $\operatorname{Sup}|x_i|$ (à un facteur près).

Preuve :

Lemme : Soient A un anneau local noethérien, $I = (x_1,..,x_p)$ un idéal de A qui est principal. Alors I est engendré par un des x_i (conséquence facile du lemme de Nakayama).

Ainsi, $\bar{Z}$ est recouvert par des ouverts en nombre fini dans chacun desquels un des x_i engendre $I.\mathcal{O}_{\bar{Z}}$.

Pour montrer que $\frac{|h|}{\mathrm{Sup}|x_i|}$ est borné sur X, il suffit de montrer qu'il l'est sur chacun de ces ouverts puisque $\bar{Z} \longrightarrow X$ est propre et surjectif. Dans l'ouvert où x_i engendre $I.\mathcal{O}_{\bar{Z}}$, $\frac{|h|}{\mathrm{Sup}|x_i|}$ borné équivaut à $\frac{|h|}{|x_i|}$ borné et l'on est ramené au théorème 1.

<u>Corollaire M_2</u> (d'après P.4)

Pour $h \in \bar{A}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $h \in \bar{I}$

ii) h définit sur X^{red} un germe de fonction majorée en module par $\mathrm{Sup}|x_i|$ (à un facteur près).

I. CARACTERISATION ALGEBRIQUE DES FRACTIONS LIPSCHITZIENNES.

Soit A une algèbre analytique complexe réduite, et soit $\bar{A}$ sa normalisée ($\bar{A}$ est une somme directe d'algèbres analytiques normales, donc intègres, une par composante intègre de A). Considérons l'idéal :

$$I_A = \mathrm{Ker}(\bar{A} \underset{\mathbb{C}}{\widehat{\otimes}} \bar{A} \to \bar{A} \underset{A}{\otimes} \bar{A})$$

où l'on a symbolisé par $\widehat{\otimes}$ l'opération sur les algèbres qui correspond au produit cartésien des espaces analytiques.*)

<u>Définition 0</u>. Nous appellerons "<u>saturée lipschitzienne</u>" de A l'algèbre :

$$\tilde{A} = \{f \in \bar{A} \mid f \otimes 1 - 1 \otimes f \in \overline{I_A}\}$$

où $\overline{I_A}$ désigne la "fermeture intégrale" (au sens de P.4) de l'idéal I_A.

<u>Théorème 0</u>. $\tilde{A}$ <u>est l'ensemble des fractions de</u> A <u>qui définissent des germes de fonctions lipschitziennes sur le germe d'espace analytique</u> X <u>associé à</u> A.

<u>Preuve</u>. Remarquons d'abord que toute fonction lipschitzienne est localement bornée, et l'ensemble des fractions bornées de A constitue l'algèbre normalisée $\bar{A}$ (P.5, théorème M_1). Ceci dit, en désignant par $\bar{X}$ la somme disjointe de germes d'espaces analytiques normaux associée à l'algèbre $\bar{A}$, la condition de Lipschitz $|f(x) - f(x')| \leq C \operatorname{Sup}|z_i - z'_i|$ pour un élément $f \in \bar{A}$ équivaut à dire que sur $\bar{X} \times \bar{X}$ la fonction $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ est bornée en module par le supremum des modules des $z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i$, où (z_i) désigne un système de générateurs de l'idéal maximal de A. Or, l'idéal engendré par les $z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i$ n'est autre que l'idéal I_A défini ci-dessus. Le théorème 0 est donc une simple application de P.5, Coroll. M_2.

*) La notation $\widehat{\otimes}$ est choisie pour rappeler le "produit tensoriel complété" $\hat{\otimes}$, qui interviendrait si l'on travaillait "dans l'algébroide" au lieu de travailler "dans l'analytique".

<u>Corollaire 0.</u> <u>$\widetilde{A}$ est une algèbre locale</u> (donc une "<u>algèbre analytique</u>").

En effet, étant intermédiaire entre A et $\bar{A}$, l'algèbre $\widetilde{A}$ est une somme directe d'algèbres analytiques. Si cette somme comprenait plus d'un terme, l'élément $1 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0$ de $\widetilde{A}$ définirait sur X un germe de fonction égale à 1 sur au moins l'une des composantes irréductibles de X et à 0 sur une autre de ces composantes. Mais une telle fonction ne saurait être continue sur X, ni a fortiori lipschitzienne.

La construction géométrique suivante, qui découle de P.4, jouera un rôle fondamental dans la suite : au germe d'espace analytique X, on associera le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} D_X \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_X \arrow[d] \\ \bar{X} \times_X \bar{X} \arrow[r, hook] & \bar{X} \times \bar{X} \end{tikzcd}$$

où E_X désigne l'objet en variétés projectives sur $\bar{X} \times \bar{X}$, obtenu par <u>éclatement de centre</u> $\bar{X} \times_X \bar{X}$ suivi de <u>normalisation</u> (c'est-à-dire E_X est l'éclatement normalisé de l'idéal I_A qui définit $\bar{X} \times_X \bar{X}$ dans $\bar{X} \times \bar{X}$); D_X es le "<u>diviseur exceptionnel</u>", image réciproque de $\bar{X} \times_X \bar{X}$ dans E_X. D'après P la condition :

$$f \otimes 1 - 1 \otimes f \in \overline{I_A}$$

qui définit $\widetilde{A}$ est équivalente à :

$$(f \otimes 1 - 1 \otimes f) \mid D_X = 0 \,.$$

Autrement dit, <u>le germe</u> $\widetilde{X}$ <u>associé à l'algèbre analytique</u> $\widetilde{A}$ <u>n'est autre qu</u>

<u>le conoyau de la double flèche canonique.</u>*)

$$D_X \rightrightarrows \bar{X}$$

Ce germe d'espace analytique $\tilde{X}$ sera appelé "<u>saturé lipschitzien</u>" du germe X.

Il est facile de voir que la construction faite localement se <u>globalise</u> : c'est bien connu pour les objets E_X , D_X , qui proviennent d'éclatements et de normalisations; de même pour $\tilde{X}$: il est facile de définir sur un espace analytique $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ le faisceau $\tilde{\mathcal{O}}_X$ <u>des germes de fractions lipschitziennes</u>, et de vérifier qu'il s'agit d'un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$ -modules(comme sous-faisceau du faisceau cohérent $\bar{\mathcal{O}}_X$) ; on définit ainsi un espace analytique $\tilde{X} = (|X|, \tilde{\mathcal{O}}_X)$ appelé "<u>saturé lipschitzien</u>" de $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$, dont l'espace topologique sous-jacent $|X|$ coincide avec celui de X (en fait, le morphisme canonique $\tilde{X} \to X$ est bi-méromorphe à inverse lipschitzien, donc c'est un homéomorphisme).

<u>Question 1</u> : L'inclusion $\tilde{A} \subset \bar{A}$ était évidente dans l'interprétation transcendante : "<u>toute fraction lipschitzienne est bornée</u>".

Mais si l'on s'intéresse à d'autres objets que des algèbres analytiques, par exemple à des algèbres de séries formelles, on n'a plus de raisons de faire jouer un rôle particulier à $\bar{A}$ dans la définition de $\tilde{A}$: par exemple, on pourra définir, pour toute extension B de A dans son anneau total de fraction, la "<u>saturée lipschitzienne de A dans B</u>" :

$$\tilde{A}(B) = \{ f \in B \mid f \otimes 1 - 1 \otimes f \in \overline{I_{A(B)}} \}$$

avec :
$$I_{A(B)} = \operatorname{Ker}(B \underset{\mathbb{C}}{\hat{\otimes}} B \to B \underset{A}{\otimes} B) ;$$

<u>la question se pose alors de savoir si l'on a encore l'inclusion</u> $\tilde{A}(B) \subset \bar{A}$.

*) On a donc un morphisme canonique :

$$D_X \longrightarrow \tilde{X} .$$

II. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DU DIVISEUR EXCEPTIONNEL D_X : COUPLES DE POINTS INFINIMENT VOISINS SUR X.

Chaque point de D_X^{red} (espace réduit du diviseur exceptionnel D_X) pourra s'interpréter comme "couple de points infiniment voisins" sur X. Aux différentes composantes irréductibles ${}^{\tau}D_X^{red}$ de D_X^{red}, repérées par l'indice τ, correspondront différents "types" de points infiniment voisins. L'image dans X de ${}^{\tau}D_X^{red}$ (par l'application canonique ${}^{\tau}D_X^{red} \hookrightarrow D_X \to \tilde{X} \to X$) est un germe de sous-ensemble analytique irréductible ${}^{\tau}X \subset X$, que l'on pourra appeler "lieu de confluence des points infiniment voisins de type τ". Parmi les types de points infiniment voisins , il convient de distinguer les "types triviaux", dont les lieux de confluence sont les composantes irréductibles de X : un ${}^{\tau}D_X^{red}$ "trivial" aura pour point "générique" un couple obtenu en faisant tendre deux points de X vers un même point lisse de X. Tous les autres types ("non triviaux") ont des lieux de confluence constitués de points singuliers de X : par exemple, nous verrons tout à l'heure que toute hypersurface a pour lieux de confluence non triviaux les composantes de codimension 1 de son lieu singulier.

Que deviennent dans ce contexte les fractions lipschitziennes ? Nous avons vu au §1 qu'une fraction lipschitzienne était un élément $f \in \bar{A}$ tel que $(f \otimes 1 - 1 \otimes f) \mid D_X = 0$. Mais, puisque D_X est un diviseur de l'espace normal E_X, cette condition sera satisfaite partout si seulement elle l'est au voisinage d'un point de chaque composante irréductible de ce diviseur; ou en langage intuitif : "pour vérifier la condition de Lipschitz il suffit de le faire pour un couple de points infiniment voisins de chaque type"
- encore n'avons-nous pas à nous inquiéter des types triviaux, pour lesquels la condition est trivialement satisfaite pour tout $f \in \bar{A}$ (remarquons d'ailleurs que les ${}^{\tau}D_X$ triviaux sont réduits).

Nous en déduisons le :

Théorème 1 : Une fonction méromorphe localement bornée sur l'espace analy-

<u>tique complexe X est localement lipschitzienne en tout point si seulement elle l'est en un point de chaque lieu de confluence</u> ${}^{\tau}X$.

Pour nous faire une première idée (très grossière) de l'allure des ${}^{\tau}D_X^{red}$, regardons leurs images dans l'espace $\hat{E}_X$ défini en <u>éclatant</u> l'idéal I_A dans $\bar{X} \times \bar{X}$; l'espace E_X qui nous intéresse en réalité est le <u>normalisé</u> de $\hat{E}_X$, mais $\hat{E}_X$ a une interprétation géométrique plus simple : c'est l'adhérence dans $\bar{X} \times \bar{X} \times \mathbb{P}^{N-1}$ du graphe de l'application

$$\Gamma : (\bar{X} \times \bar{X} - \bar{X} \underset{X}{\times} \bar{X}) \longrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$$

qui à tout couple $(\bar{x},\bar{x}')$ hors de la diagonale associe la droite de coordonnées homogènes

$$(z_1 - z_1' : z_2 - z_2' : \dots : z_N - z_N') ,$$

où $(z_1, z_2, \dots, z_N)$ désigne une base de l'idéal maximal de X .

Nous noterons $\hat{z} : \hat{E}_X \to \mathbb{P}^{N-1}$ le morphisme qui s'en déduit, et $\hat{z}' : \hat{D}_X \to \mathbb{P}^{N-1}$ la restriction de $\hat{z}$ au-dessus de $\bar{X} \underset{X}{\times} \bar{X}$ (ces morphismes dépendent du choix de la base $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$). La fibre $\hat{D}_{X,x}$ du "diviseur exceptionnel" $\hat{D}_X$ au-dessus d'un point *) $x \in X$ est une somme disjointe d'un nombre fini de variétés algébriques (autant que $\bar{X} \underset{X}{\times} \bar{X}$ a de points au-dessus de x) qui <u>s'immergent</u> dans $\mathbb{P}^{N-1}$ par l'application $\hat{z}' | \hat{D}_{X,x}$ — en particulier, si x est un point lisse, $\hat{D}_{X,x}$ n'est autre que l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$ associé à l'espace tangent à X en x.

Par composition avec les morphismes <u>finis</u> $E_X \to \hat{E}_X$ (normalisation)

*) Ici, comme à d'autres endroits, nous faisons l'abus de langage d'identifier le germe X à un de ses représentants.

et $D_X \to \hat{D}_X$, on déduit de $\hat{z}$ et $\hat{z}'$ des morphismes

$$\tilde{z} : E_X \to \mathbb{P}^{N-1}$$

$$\tilde{z}' = \tilde{z}|D_X : D_X \to \mathbb{P}^{N-1}$$

où $\tilde{z}'$ jouit de la propriété suivante :

Sa restriction à $D_{X,x}$, fibre de D_X au-dessus de $x \in X$, est un morphisme fini.

Corollaire : Si $X \subset \mathbb{C}^N$ est de dimension pure n, les lieux de confluence ${}^{\tau}X$ sont de dimension au moins égale à 2n-N.

En effet, d'après la finitude du morphisme ci-dessus, $\dim D_{X,x} \leq N-1$ de sorte que chaque composante irréductible ${}^{\tau}D_X^{red}$ de D_X aura dans X une image ${}^{\tau}X$ de dimension :

$$\dim {}^{\tau}X \geq \dim {}^{\tau}D_X^{red} - (N-1) = (2n-1)-(N-1) = 2n-N .$$

Cas particulier des hypersurfaces : N = n+1, donc les lieux de confluence sont de dimension au moins égale à n-1. Les seuls lieux de confluence non triviaux sont les composantes de codimension 1 du lieu singulier de X -de plus, les fibres ${}^{\tau}D_{X,x}$ des ${}^{\tau}D_X$ non triviaux s'envoient sur $\mathbb{P}^{N-1}$ par des morphismes finis (surjectifs par raison de dimension).

Le théorème 1 dans le cas particulier des hypersurfaces se formule donc ainsi :

Théorème 1^H : Une fonction méromorphe sur une hypersurface analytique complexe X est localement lipschitzienne en tout point si seulement elle l'est en un point de chaque composante irréductible (de codimension 1) de son lieu polaire.

Multiplicité du diviseur ${}^{\tau}D_X$.

En un point générique du diviseur ${}^{\tau}D_X^{red}$, celui-ci est un diviseur lisse de l'espace lisse E_X. Soit s son équation locale irréductible. L'Idéal du diviseur non réduit ${}^{\tau}D_X$ est alors localement de la forme $(s^{\mu(\tau)})$, où $\mu(\tau)$ est un entier positif, la "multiplicité du diviseur ${}^{\tau}D_X$ ".

III. FRACTIONS LIPSCHITZIENNES RELATIVEMENT A UN PARAMETRAGE.

Soient $R \subset A$ une sous-algèbre analytique de A, et S le germe d'espace analytique associé. En considérant X comme un "espace analytique relatif" sur S, on est conduit à une construction analogue à celle du §1, avec le produit $\bar{X} \times \bar{X}$ remplacé par le produit fibré sur S, ce qui donne un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D_{X/S} & \hookrightarrow & E_{X/S} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{X} \underset{X}{\times} \bar{X} & \hookrightarrow & \bar{X} \underset{S}{\times} \bar{X} \end{array}$$

permettant de définir l' "algèbre des fractions lipschitziennes relativement à S " :

$$\tilde{A}^R = \{ f \in \bar{A} \mid (f \otimes 1 - 1 \otimes f) | D_{X/S} = 0 \}$$

dont l'interprétation géométrique est donnée par l'analogue "relatif" du Théorème 0 :

Théorème 0 "relatif" :

$\tilde{A}^R$ est l'ensemble des fractions de A qui satisfont à une condition de Lipschitz

$$|f(x) - f(x')| \leq C \sup_i |z_i - z_i'|$$

pour tout couple de points (x,x') pris dans la même fibre de X/S (avec la même constante C pour toutes les fibres).

Notons l'inclusion $\tilde{A} \subset \tilde{A}^R$, évidente dans l'interprétation géométrique. Formellement, cette inclusion peut aussi se déduire de l'existence d'un "morphisme" du diagramme "relatif" ci-dessus dans le diagramme "absolu" du § 1 :

$$\begin{tikzcd}
 & D_X \arrow[rr, hook, dotted] \arrow[dd, dashed] & & E_X \arrow[dd, dashed] \\
D_{X/S} \arrow[ur, dotted] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed] & & E_{X/S} \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\
 & \bar{X} \times_X \bar{X} \arrow[r, hook] & \bar{X} \times_S \bar{X} \arrow[r, hook] & \bar{X} \times \bar{X}
\end{tikzcd}$$

où la flèche -------> est définie par la propriété "universelle" de l'éclatement normalisé (cf P.3 en notant bien que $X \times X$ est normal.

Nous supposerons dorénavant que X est <u>de dimension pure</u> n, et nous nous intéresserons au cas où R est un "<u>paramétrage</u>" de A, c'est-à-dire l'algèbre régulière $\mathbb{C}\{z_1, z_2, .., z_n\}$ engendrée par un "système de paramètres" de A (n-uple d'éléments tels que l'idéal engendré dans A contienne une puissance de l'idéal maximal). Autrement dit $X \to S$ est un morphisme <u>fini</u> de X sur un espace euclidien de dimension égale à celle de X.
Soit $z = (z_1, z_2, .., z_N)$ un système de générateurs de l'idéal maximal de A, et considérons-en n combinaisons linéaires :

$$(az)_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1N}z_N$$
$$(az)_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2N}z_N$$
$$(az)_n = a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nN}z_N$$
$$(a_{ij} \in \mathbb{C}).$$

L'ensemble des a pour lesquels $\mathbb{C}\{(az)_1, (az)_2, .., (az)_n\}$ est un paramétrage de A forme évidemment un ouvert dense de l'espace L_N^n de toutes les matrices $N \times n$. Nous dirons plus généralement qu'une famille $\mathcal{P}$ de paramétrages est "<u>générique</u>" si, <u>pour tout système</u> $z = (z_1, z_2, .., z_N)$ de générateurs de l'idéal maximal de A, l'ensemble des matrices a pour lesquelles $\mathbb{C}\{(az)_1, (az)_2, .., (az)_n\} \in \mathcal{P}$ <u>contient un ouvert dense de</u> L_N^n.

Nous nous proposons de démontrer le :

<u>Théorème 2</u> : <u>Pour toute famille générique</u> $\mathcal{P}$ <u>de paramétrages</u>,

$$\boxed{\tilde{A} = \bigcap_{R \in \mathcal{P}} \tilde{A}^R}\ .$$

Il résulte de ce théorème que les deux questions suivantes admettent des réponses identiques :

<u>Question 2</u> : <u>L'égalité</u> $\widetilde{A} = \widetilde{A}^R$ <u>est-elle vraie génériquement</u> (c.à.d. pour une famille générique de paramétrages R)?

<u>Question 2'</u>: $\widetilde{A}^R$ <u>est-elle génériquement indépendante de</u> R ?

Nous verrons qu'au moins dans le cas des hypersurfaces la réponse à ces deux questions est oui.

<u>Preuve du théorème 2.</u>

Nous avons déjà vu que $\widetilde{A} \subset \widetilde{A}^R$ pour tout R. Réciproquement, donnons-nous une fonction $f \in \bigcap_{R\in\mathcal{P}} \widetilde{A}^R$; appartient-elle à $\widetilde{A}$?

Considérons dans E_X la famille de diviseurs irréductibles constituée par les ${}^{\tau}D_X^{red}$ et par les composantes irréductibles de $\{f\otimes 1 - 1\otimes f = 0\}$. Désignons par ${}^{\tau}\Delta_f$ l'ensemble des points de ${}^{\tau}D_X^{red}$ qui :

1°) n'appartiennent à aucun autre diviseur irréductible de la famille ci-dessus ;

2°) sont des points lisses de ${}^{\tau}D_X^{red}$ et de E_X.

Comme E_X est normal, donc non singulier en codimension 1, ${}^{\tau}\Delta_f$ est un <u>ouvert dense de Zariski</u> de ${}^{\tau}D_X^{red}$. En tout point $w \in {}^{\tau}\Delta_f$, l'idéal local de ${}^{\tau}D_X$ dans E_X est de la forme $(s^{\mu(\tau)})$, où s est une fonction coordonnée d'une carte locale de E_X, et $\mu(\tau)$ un entier ≥ 1 (la"<u>multiplicité du diviseur</u>" ${}^{\tau}D_X$) ; quant à la fonction $f\otimes 1 - 1\otimes f$, elle est de la forme $us^{\nu(\tau)}$, où u est une <u>unité</u> de l'anneau local de E_X au point w, et $\nu(\tau)$ un entier ≥ 0.

<u>Tout se ramène donc</u> (cf.§2) <u>à démontrer que</u> $\nu(\tau) \geq \mu(\tau)$ <u>pour tout</u> τ.

Soit alors S le germe associé à un paramétrage $R\in\mathcal{P}$, et désignons par $\overset{*}{E}_{X/S}$ resp. $\overset{*}{D}_{X/S}$ l'image dans E_X de $E_{X/S}$ resp. $D_{X/S}$ (par l'application canonique $E_{X/S}$ ----> E_X définie au début du paragraphe). Par définition,

$D^*_{X/S} = E^*_{X/S} \cap D_X$, de sorte que si $E^*_{X/S}$ contient un point $w \in {}^\tau\Delta_f$, $D^*_{X/S}$ sera donné dans $E^*_{X/S}$, au voisinage de ce point, par l'idéal $(s^{\mu(\tau)})$. Si cet idéal n'est pas zéro, c.a.d. si $E^*_{X/S}$ n'est pas inclus dans D_X, la condition de Lipschitz relative :

$$(f\otimes 1 - 1\otimes f) \mid D_{X/S} = 0$$

implique que la fonction $(f\otimes 1 - 1\otimes f) \mid E^*_{X/S}$ est divisible par $s^{\mu(\tau)}$ au voisinage de w.

Ecrivant $f\otimes 1 - 1\otimes f = us^{\nu(\tau)}$, et remarquant que u, unité de E_X, reste une unité après restriction à $E^*_{X/S}$, on en déduit bien que $\nu(\tau) \geq \mu(\tau)$.

En cours de route, il nous a fallu admettre qu'il existait un $R \in \mathcal{P}$ tel que, pour tout type τ non trivial, $E^*_{X/S}$ rencontre ${}^\tau\Delta_f$ et ne soit pas inclus localement dans ${}^\tau\Delta_f$. Pour nous en assurer, et donc pour terminer la démonstration du Théorème 2, il nous suffira de démontrer le :

Lemme 1. Pour tout ouvert dense de Zariski ${}^\tau\Delta \subset {}^\tau D^{red}_X$ (τ non trivial), formé de points lisses pour ${}^\tau D^{red}_X$ et lisses pour E_X, il existe une famille générique de paramétrages R pour lesquels l'application $E_{X/S} \to E_X$ rencontre ${}^\tau\Delta$ en au moins un point w et est en ce point une immersion transverse à ${}^\tau\Delta$.

(la condition d'"immersion transverse" est évidemment plus forte que ce que nous demandions, mais va s'avérer plus maniable).

Soit $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$ un système de générateurs de l'idéal maximal de X, et notons ${}^\tau\tilde{z} : {}^\tau D^{red}_X \to \mathbb{P}^{N-1}$ la restriction du morphisme $\tilde{z} : E_X \to \mathbb{P}^{N-1}$ du §2. A tout paramétrage $R(a) = \mathbb{C}\{(az)_1, (az)_2, \ldots, (az)_n\}$ défini par une matrice $a \in L^n_N$, associons le $(N-n-1)$-plan $\mathbb{P}^{N-n-1}(a) \subset \mathbb{P}^{N-1}$, sous-espace projectif associé au noyau de la matrice a.

Lemme 2. Pour que l'application $E_{X/S(a)} \to E_X$ passe par le point $w \in {}^\tau\Delta$, et soit en ce point une immersion transverse à ${}^\tau\Delta$, il suffit que l'application ${}^{\tau}\tilde{z} : {}^{\tau}\Delta \to \mathbb{P}^{N-1}$ soit "<u>effectivement transverse</u>"*) à $\mathbb{P}^{N-1}(a)$ au point w.

<u>Preuve du lemme 2</u>.

Comme ${}^{\tau}\tilde{z}$ est la restriction de l'application $\tilde{z} : E_X \to \mathbb{P}^{N-1}$, la transversalité de ${}^{\tau}\tilde{z}$ implique la transversalité de $\tilde{z}$.

<u>Donc</u> $\tilde{z}^{-1}(\mathbb{P}^{N-n-1}(a)$ <u>est une sous-variété lisse à n dimensions de</u> E_X, <u>qui coupe</u> ${}^{\tau}\Delta$ <u>transversalement suivant une sous-variété lisse à</u> n-1 <u>dimensions</u> ${}^{\tau}\tilde{z}^{-1}(\mathbb{P}^{N-n-1}(a))$. En particulier, la première est l'adhérence du complémentaire de la seconde, c.à.d. l'adhérence de sa partie située hors du diviseur exceptionnel. Or, en dehors du diviseur exceptionnel, la flèche de droite du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_{X/S(a)} & \longrightarrow & E_X \\ {\scriptstyle (sur)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (iso)} \\ \bar{X} \underset{S(a)}{\times} \bar{X} & \hookrightarrow & \bar{X} \times \bar{X} \end{array}$$

est un isomorphisme (puisque $\bar{X} \times \bar{X}$ est normal), tandis que la flèche de gauche est surjective, de sorte que l'image $E^{*}_{X/S(a)}$ de la flèche supérieure

*) La phrase : "l'application est <u>transverse en</u> w" exprime l'une des deux éventualités suivantes :

1°) w s'envoie en dehors de la sous-variété considérée ;

2°) w s'envoie dans la sous-variété considérée, et l'image de l'application tangente au point w est un sous-espace vectoriel transverse à l'espace tangent de cette sous-variété.

Nous dirons que l'application est "<u>effectivement transverse en</u> w " si c'est la seconde éventualité qui est réalisée.

s'identifie à $\bar{X} \underset{S(a)}{\times} \bar{X}$, c.à.d. à $\tilde{z}^{-1}(\mathbb{P}^{N-n-1}(a))$. <u>Vraie en dehors du diviseur exceptionnel, cette égalité</u> :

$$E^{*}_{X/S(a)} = \tilde{z}^{-1}(\mathbb{P}^{N-n-1}(a))$$

<u>est donc vraie partout, par raison d'adhérence</u>.

Il reste seulement à démontrer que $E_{X/S(a)} \to E^{*}_{X/S(a)}$ est un <u>isomorphisme</u> (au voisinage de w) mais c'est évident, car il s'agit d'un germe de morphisme entre deux variétés lisses de même dimension , qui envoie un diviseur lisse de l'une sur un diviseur lisse de l'autre, et est un isomorphisme en dehors de ces diviseurs.

Grâce au Lemme 2 ainsi démontré, nous pourrons considérer le Lemme 1 comme une simple conséquence du :

<u>Lemme 3</u>. Il existe un ouvert dense de matrices $a \in L^n_N$ pour lesquelles l'application ${}^{\tau}\tilde{z} : {}^{\tau}\Delta \to \mathbb{P}^{N-1}$ est effectivement transverse à $\mathbb{P}^{N-n-1}(a)$ en au moins un point $w \in {}^{\tau}\Delta$.

<u>Preuve du Lemme 3</u>.

Fabriquons une <u>stratification</u> de ${}^{\tau}D^{red}_{X}$ telle que chacun des ensembles analytiques suivants soit une union de strates :

1°) ${}^{\tau}D^{red}_{X,0}$, fibre(réduite)de ${}^{\tau}D^{red}_{X}$ au-dessus de l'origine $0 \in X$;

2°) le complémentaire de l'ouvert de Zariski ${}^{\tau}\Delta$. Désignons par W la strate maximale de cette stratification (évidemment $W \subset {}^{\tau}\Delta$) et par W_0 la strate maximale de l'une quelconque des composantes irréductibles de ${}^{\tau}D^{red}_{X,0}$. Nous supposerons que la stratification a été choisie assez fine pour que la "propriété a) de Whitney" [5] soit satisfaite pour tous les couples de strates (W_0,V), où V parcourt l' "étoile" de W_0. Dans ces conditions, il résulte de l'Appendice que si l'application ${}^{\tau}\tilde{z} : {}^{\tau}D^{red}_{X} \to \mathbb{P}^{N-1}$ a sa restriction à W_0 effectivement transverse à $\mathbb{P}^{N-n-1}(a)$ en un point $w_0 \in W_0$, sa restriction à W sera effectivement transverse à $\mathbb{P}^{N-n-1}(a)$ en au moins un point $w \in W$ voisin de w_0.

Or, nous allons démontrer le :

<u>Lemme 4</u>. Il existe un ouvert dense de matrices $a \in L_N^n$ pour lesquelles l'application ${}^{\tau}\tilde{z}|W_o : W_o \to \mathbb{P}^{N-1}$ est effectivement transverse à $\mathbb{P}^{N-n-1}(a)$ en au moins un point $w_o \in W_o$.

<u>Preuve du Lemme 4</u>.

Comme τ est un type non trivial, l'image de la projection ${}^{\tau}D_X^{red} \to X$ est de dimension $\leq n-1$, de sorte que <u>la dimension de la fibre</u> ${}^{\tau}D_{X,o}^{red}$ <u>devra être au moins</u> n (car $\dim {}^{\tau}D_X^{red} = 2n-1$). Or, on sait (§2) que l'application ${}^{\tau}\tilde{z}$ restreinte à ${}^{\tau}D_{X,o}^{red}$ est un <u>morphisme fini</u>. Considérant dans $\mathbb{P}^{N-1}$ la variété algébrique de dimension $\geq n$, image d'une composante de ${}^{\tau}D_{X,o}^{red}$, et l'ouvert dense de Zariski de cette variété, image de l'ensemble des points de W_o où le morphisme est un isomorphisme local, nous voyons donc que le Lemme 4 se ramène au :

<u>Lemme 5</u>. Etant donné dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{N-1}$ une variété algébrique de dimension $\geq n$ et un ouvert dense de Zariski de cette variété, l'ensemble des $(N-n-1)$-plans de $\mathbb{P}^{N-1}$ qui rencontrent cet ouvert en au moins un point lisse, et le rencontrent transversalement en ce point, contient un ouvert dense de la Grassmannienne.

La preuve de ce Lemme sera laissée au lecteur.

<u>Récapitulons</u>:

$$\text{Lemme } 5 \Longrightarrow \text{Lemme } 4 \Longrightarrow \left.\begin{matrix}\text{Lemme } 3\\ \text{Lemme } 2\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{Lemme } 1 \Longrightarrow$$

<u>le théorème 2</u> est <u>démontré</u>.

Remarque 2.

Les raisonnements du §2 se généralisent sans difficulté au cas "relatif" : ainsi on a, pour toute sous-algèbre analytique $R \subset A$, la notion de "lieu de confluence relativement à R", et l'analogue relatif du théorème 1. Si R est un paramétrage de A on voit, par un argument calqué sur celui du §2, que la dimension des lieux de confluence relatifs admet la même borne inférieure 2n-N que dans le cas absolu ; en particulier, les lieux de confluence d'une hypersurface X relativement à tout paramétrage sont les composantes de codimension 1 du "lieu singulier relatif" de X, c'est-à-dire de l'ensemble des points de X où le morphisme fini $X \longrightarrow S$ n'est pas une submersion de variétés lisses; on en déduit le :

Théorème 1^H relatif :

Soit $X \longrightarrow S$ un morphisme fini d'une hypersurface analytique complexe sur une variété lisse de même dimension. Alors une fonction méromorphe sur X est localement lipschitzienne relativement à S en tout point de X si seulement elle l'est en un point de chaque composante irréductible (de codimension 1) de son lieu polaire.

IV. CAS PARTICULIER DES COURBES PLANES.

Soient $X \xhookrightarrow{(x,y)} \mathbb{C}^2$ un germe de courbe analytique plane réduite, $\tilde{z} : E_X \to \mathbb{P}^1$ le morphisme correspondant au germe d'immersion (x,y) (§2).

Soit U l'ouvert dense de $\mathbb{P}^1$ complémentaire des directions des tangentes de X

Soit $u \in U$. Au prix d'un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que u correspond à la direction de $\{x=0\}$. On prend comme coordonnée locale v dans $\mathbb{P}^1$ au voisinage de u l'inverse de la pente dans ces coordonnées.

<u>Proposition 1</u>. Dans un voisinage de tout point $w \in D_X \cap \tilde{z}^{-1}(u)$, $\tilde{z}|D_X^{red}$ est un isomorphisme, E_X est lisse, et $E_X \simeq E_{X/S(u)} \times D_X^{red}$.

<u>Preuve</u> : Remarquons d'abord que pour $|v|$ et $|t|$,(et évidemment $|x|$ et $|y|$), assez petits, la droite $x-vy = t$ reste non tangente à X, donc si x et y sont non nuls, coupe X en des points tous distincts.

Soit $\Gamma \subset (\bar{X} \times \bar{X} - \bar{X} \underset{X}{\times} \bar{X}) \quad \mathbb{P}^1$ le graphe de l'application définie au §2. On considère l'application $(P, P', v) \rightsquigarrow (x(P)-vy(P), v) : \Gamma \xrightarrow{\Psi o} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ (en remarquant que par définition $x(P)-vy(P) = x(P')-vy(P')$). Ψo s'étend en une application méromorphe $\hat{E}_X \xrightarrow{\Psi 1} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$, qui est évidemment bornée, donc s'étend localement en un morphisme unique $E_X \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ (tout cela est fait au voisinage d'un point w de $\tilde{z}^{-1}(u)$ sur E_X).

Il est facile de vérifier , et d'ailleurs évident géométriquement, que Ψ est à fibres finies. De plus, il est clair par la remarque du début que Ψ est non ramifié à l'extérieur de $\{0\} \times \mathbb{P}^1$. Le lieu de ramification est donc $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ (à moins qu'il ne soit vide).

Ainsi, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial v}$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ est tangent au lieu de ramification de Ψ. Il se relève donc (voir [8], Théorème 2)*) en un champ

*) On peut aussi le voir par un raisonnement analogue à celui du Lemme 6, §6 ci-après.

de vecteurs holomorphe sur l'espace normal E_X. L'intégration de ce champ de vecteurs munit E_X, localement au point $w \in D_X \cap \tilde{z}^{-1}(u)$, d'une structure de produit $E_X \simeq \tilde{z}^{-1}(u) \times \Psi^{-1}(\{0\}\times\mathbb{P}^1)$.

Mais, d'une part, on peut maintenant appliquer le Lemme 2 du §3 ce qui montre que $\tilde{z}^{-1}(u) \simeq E_{X/S(u)}$ au voisinage de w, d'autre part, toujours d'après la remarque faite au début, $\tilde{z}^{-1}(u)$ ne rencontre aucun ${}^{\tau}D_X$ pour un type τ trivial.

On conclut en remarquant que puisque l'origine, seule singularité éventuelle du germe X, est le support de tous les lieux de confluence ${}^{\tau}X$ non triviaux, on a :

$$\Psi^{-1}(\{0\}\times\mathbb{P}^1) = \bigcup_{\tau \text{ non trivial}} {}^{\tau}D_X .$$

<u>Corollaire</u> (voir §2) <u>Dans cette situation</u>, <u>l'équation de</u> $D_{X/S(u)}$ <u>dans</u> $E_{X/S(u)}$ <u>est l'équation de</u> D_X <u>dans</u> E_X.

On va maintenant étudier la situation relative :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "{(x,y)}"] \arrow[dr, "{(x)}"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "pr_1"] \\ & S = \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

en supposant que $\{x = 0\}$ n'est pas tangente à X en 0.

On notera X_α les composantes irréductibles de X, n_α leurs multiplicités.

Pour un anneau local de dimension 1, l'éclatement normalisé d'un idéal <u>est un</u> anneau régulier qui n'est autre que le normalisé . Ainsi, $E_{X/S} = \bar{\bar{X}} \times_S \bar{\bar{X}}$. On calcule facilement les composantes irréductibles de $E_{X/S}$ et le morphisme $E_{X/S} \to S$ grâce aux lemmes suivants, après avoir remarqué qu'une composante irréductible de $E_{X/S}$ a pour projections un couple de composantes irréductibles de $\bar{X}$.

<u>Lemme 1</u>. Si $m_{\alpha\alpha'} = \text{p.p.c.m.}\,(n_\alpha, n_{\alpha'})$, soit $\varphi : \mathbb{C}\{x\} \to \mathbb{C}\{s\}$ donné par $\varphi(x) = s^{m_{\alpha\alpha'}}$. L'ensemble B des $\mathbb{C}\{x\}$-homomorphismes :

$$\mathbb{C}\{x^{1/n_\alpha}\} \underset{\mathbb{C}\{x\}}{\otimes} \mathbb{C}\{x^{1/n_{\alpha'}}\} \longrightarrow \mathbb{C}\{s\}$$

s'identifie à l'ensemble des couples $\{(\beta,\beta') \in \mathbb{C}^2 \quad \beta^{n_\alpha} = 1\ ,\ \beta'^{n_{\alpha'}} = 1\}$ par la loi :

$$\begin{cases} x^{1/n_\alpha} \otimes 1 \longmapsto \beta\ s^{m_{\alpha\alpha'}/n_\alpha} \\ 1 \otimes x^{1/n_{\alpha'}} \longmapsto \beta' x^{m_{\alpha\alpha'}/n_{\alpha'}} \end{cases}$$

(les (β,β') correspondent aux couples de déterminations de $(x^{1/n_\alpha}, x^{1/n_{\alpha'}})$).

Si l'on munit B de la relation d'équivalence : $b_1 \sim b_2$, si b_1 et b_2 diffèrent par un $\mathbb{C}\{x\}$-automorphisme de $\mathbb{C}\{s\}$ (c'est l'équivalence des couples de déterminations "modulo la monodromie"), l'ensemble $B/\sim$ a $(n_\alpha, n_{\alpha'})$ éléments.

<u>Lemme 2</u>: $$\overline{\mathbb{C}\{x^{1/n_\alpha}\} \underset{\mathbb{C}\{x\}}{\otimes} \mathbb{C}\{x^{1/n_{\alpha'}}\}} = \bigoplus_{B/\sim} \mathbb{C}\{x^{1/m_{\alpha\alpha'}}\}$$

<u>avec les flèches évidentes.</u>

Le lemme 2 peut se démontrer à l'aide de la propriété universelle de la normalisation à partir du lemme 1 dont la démonstration est laissée au lecteur.

Nous pouvons maintenant calculer l'équation de $D_{X/S}$ dans $E_{X/S}$.

En un point d'une composante irréductible de $E_{X/S}$, l'idéal de ${}^{\tau}D_{X/S}$ est engendré par $y \otimes 1 - 1 \otimes y = a_\tau s^{\mu(\tau)}$, (où a_τ est une unité de $\mathbb{C}\{s\}$), qui peut s'interpréter comme la différence $y_{\alpha\beta}(x) - y_{\alpha'\beta'}(x)$ des développements de Puiseux de y_α et $y_{\alpha'}$ calculés pour les "déterminations" (β,β') de $(x^{1/n_\alpha}, x^{1/n_{\alpha'}})$ correspondant à la composante irréductible choisie :

$$y_{\alpha\beta}(x) - y_{\alpha'\beta'}(x) = a_{\beta\beta'} x^{\mu(\beta,\beta')/m_{\alpha\alpha'}}$$

(ou $a_{\beta\beta'}$ est une unité de $\mathbb{C}\{x^{1/m_{\alpha\alpha'}}\}$) et $a_{\beta\beta'} = a_\tau$ et $\mu(\beta,\beta') = \mu(\tau)$.

Dans le cas particulier où X est irréductible, de multiplicité n à l'origine, on déduit de ce qui précède que la suite des $\mu(\tau)$ distincts (pour τ non trivial) rangée par ordre croissant coincide avec la suite :

$$\left\{ \frac{m_1}{n_1} n, \frac{m_2}{n_1 n_2} n, \ldots, \frac{m_g}{n_1 \ldots n_g} n \right\}$$

où les $\frac{m_i}{n_1 \ldots n_i}$ sont les exposants caractéristiques de Puiseux.

On revient maintenant à E_X et D_X : Si ${}^\tau D_X$ est une composante irréductible de D_X, on a vu au §2 que $\tilde{z}|{}^\tau D_X$ était un morphisme fini, et il résulte de la proposition 1 que son lieu de ramification est au plus formé des directions des tangentes aux composantes irréductibles X_α et $X_{\alpha'}$ correspondant à ${}^\tau D_X$.

<u>Proposition 2</u>.

i) Si X_α et $X_{\alpha'}$ ont même tangente, deg $\tilde{z}|{}^\tau D_X = 1$, de sorte que le nombre de types τ correspondants au couple (α,α') est $(n_\alpha, n_{\alpha'})$.

ii) Si X_α et $X_{\alpha'}$ ont des tangentes distinctes, deg $\tilde{z}|{}^\tau D_X = (n_\alpha, n_{\alpha'})$: il n'y a qu'un seul type τ.

Dans le premier cas soit $r \in \mathbb{P}^1$ la direction de la tangente commune. Puisque $\mathbb{P}^1 - \{r\}$ est contractile, ${}^\tau D_X - \tilde{z}^{-1}(r)$ est un fibré trivial sur $\mathbb{P} - \{r\}$. Ce fibré est connexe puisque ${}^\tau D_X$ est irréductible, c'est donc un revêtement de degré 1.

Le second cas est plus délicat. Soient r_1 et r_2 les deux directions tangentes. Soit $u \in \mathbb{P}^1 - \{r_1, r_2\}$. Il faut montrer que l'on peut joindre deux points quelconques de $E_{X/S(u)}$ par un chemin contenu dans ${}^\tau D_X$ et évitant $\tilde{z}^{-1}(r_1) \cup \tilde{z}^{-1}(r_2)$. On peut s'en convaincre en regardant deux couples de points $(P_\alpha, P_{\alpha'}), (Q_\alpha, Q_{\alpha'})$ où $P_\alpha, Q_\alpha \in X_\alpha - \{0\}$, $P_{\alpha'}, Q_{\alpha'} \in X_{\alpha'} - \{0\}$ situés sur une même droite de pente u, proches de l'origine; il est possible de passer continument du couple $(P_\alpha, P_{\alpha'})$ au couple $(Q_\alpha, Q_{\alpha'})$ de telle façon que la pente des droites joignant les couples intermédiaires reste à distance finie de r_1 et r_2. Il reste à voir que le passage à la limite se fait bien.

V. SATURATION LIPSCHITZIENNE ET SATURATION DE ZARISKI.

Soit $R \subset A$ un paramétrage de l'algèbre analytique complexe A, et soit $X \to S$ le germe de morphisme d'espaces analytiques associé. Zariski définit [10] entre fractions de A une relation de "dominance" qui, traduite en termes transcendants, peut se formuler ainsi :

"f domine g par rapport à R" ($f \underset{R}{>} g$) si, et seulement si, pour tout couple $g_\beta(x)$, $g_{\beta'}(x)$ de "déterminations" distinctes de g, considérée comme fonction "multiforme" de $x \in S$, le quotient :

$$\frac{f_\beta(x) - f_{\beta'}(x)}{g_\beta(x) - g_{\beta'}(x)}$$

est borné en module, où $f_\beta(x)$ et $f_{\beta'}(x)$ désignent les"déterminations correspondantes" de f.

Une extension B de A dans son anneau total de fractions est dite "saturée par rapport à R" si toute fraction qui domine un élément de B appartient à B.

L'algèbre "saturée de A" (par rapport à R) est définie comme la plus petite algèbre saturée contenant A.

Question 3 : Y a-t-il un rapport entre l'algèbre saturée au sens de Zariski et l'algèbre $\widetilde{A}^R$ définie au §3 ?

Dans le cas particulier des hypersurfaces, $A = R[y]$, on voit facilement que la saturée de Zariski coincide avec l'ensemble des fractions qui dominent y , c.à.d. dans ce cas avec l'algèbre $\widetilde{A}^R$ des fractions lipschitziennes relativement au paramétrage R.

Dans le cas de la codimension quelconque, $A = R[y_1, y_2, \ldots, y_k]$, aussi bien la saturée de Zariski que la saturée lipschitzienne sont plus compliquées à définir, et la réponse à la question 3 ne nous semble pas facile à donner.

Dans un certain nombre de cas, incluant le cas des hypersurfaces, Zariski sait démontrer que sa saturée est indépendante du paramétrage choisi pourvu que celui-ci soit générique. On obtient par conséquent dans le cas des hypersurfaces une réponse affirmative aux questions 2 et 2' du §3. Plus précisément, on a le :

Théorème 3. Soit A l'algèbre analytique complexe d'un germe d'hypersurface X, et considérons la famille (générique) $\mathcal{P}$ des paramétrages définis par une "direction de projection" "transverse à X" (c.à.d. n'appartenant pas au cône tangent) en un point générique de chaque composante irréductible de codimension 1 du lieu singulier. Alors, pour tout $R \in \mathcal{P}$, $\widetilde{A} = \widetilde{A}^R$ = saturée de Zariski.

En effet, cette famille $\mathcal{P}$ de paramétrages est celle pour laquelle Zariski démontre l'invariance de sa saturation ([10], théorème 8.2).

VI. EQUISATURATION ET EQUISINGULARITE LIPSCHITZIENNE.

Dans tout ce paragraphe, la notion de "<u>saturation</u>" utilisée est la <u>saturation lipschitzienne</u>, dont nous venons de voir qu'elle coincide avec la saturation de Zariski dans le cas des hypersurfaces.

Soit $r : X \longrightarrow T$ une rétraction analytique d'un germe d'espace analytique complexe réduit X sur un germe de sous-variété lisse $T \hookrightarrow X$. Désignons par $X_0 = r^{-1}(0)$ la fibre de cette rétraction au-dessus de l'origine $0 \in T$.

<u>Définition 1</u>. Nous dirons que (X,r) est <u>équisaturé le long de</u> T si le germe saturé $\tilde{X}$ admet une structure de produit :

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 \times T$$

compatible avec la rétraction r (c.à.d. dont la deuxième projection est $\tilde{X} \longrightarrow X \xrightarrow{r} T$).

<u>Théorème 4</u>.

(X,r) <u>équisaturé le long de</u> $T \Longrightarrow$

(X,r) <u>topologiquement</u> (et même <u>lipschitziennement</u>) <u>trivial le long de</u> T.

Par "trivialité topologique", nous entendons la propriété suivante pour tout plongement

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{C}^N \arrow[dl, "r^N"] \\ T & \end{tikzcd}$$

de la rétraction r dans une rétraction r^N d'espace euclidien, la paire $(\mathbb{C}^N, X)$ est <u>homéomorphe</u> à un produit $(\mathbb{C}^{N-p} \times T\ ,\ X_0 \times T)$, de façon compatible avec la rétraction r^N;
par "<u>trivialité lipschitzienne</u>", nous entendons que l'homéomorphisme ci-dessus est lipschitzien ainsi que son inverse.

Preuve du Théorème 4.

Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ un système de coordonnées locales sur T. Utilisant la structure de produit $\tilde{X} = \tilde{X}_o \times T$, désignons par V_i le champ de vecteurs de $\tilde{X}$ dont la première projection est nulle et la deuxième projection égale à $\frac{\partial}{\partial t_i}$. Si A désigne l'algèbre de X, V_i est une dérivation de $\tilde{A}$ dans $\tilde{A}$, donc définit par restriction une dérivation de A dans $\tilde{A}$. Donnons-nous un plongement de X dans $\mathbb{C}^N$, c.à.d. un système de N générateurs de l'idéal maximal de A, soit :

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{N-p}\ ,\ t_1 or, t_2 or, \ldots, t_p or)$$

(par changement de coordonnées, tout système peut se ramener à cette forme). $V_i z_1$, $V_i z_2, \ldots$, $V_i z_{N-p}$ sont des fonctions lipschitziennes sur X, et peuvent donc s'étendre en des fonctions $g_{i,1}$, $g_{i,2}, \ldots$, $g_{i,N-p}$ lipschitziennes dans tout $\mathbb{C}^N$. On dispose ainsi dans $\mathbb{C}^N$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, d'un champ de vecteurs lipschitzien :

$$g_{i,1} \frac{\partial}{\partial z_1} + g_{i,2} \frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots + g_{i,N-p} \frac{\partial}{\partial z_{N-p}} + \frac{\partial}{\partial t_i}$$

qui est tangent à X et qui se projette sur le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t_i}$ de T.

Etant lipschitziens, ces p champs de vecteurs sont localement intégrables, et leur intégration réalise la trivialité topologique de X.

EQUISATURATION RELATIVE.

Nous allons maintenant définir une notion *relative* d'équisaturation. Soit X/S un germe d'espace analytique "*relatif à un paramétrage*", consistant en la donnée d'un germe d'espace analytique réduit X, de dimension pure n, et d'un germe de morphisme fini $X \longrightarrow S$ sur un germe de variété lisse S de dimension n. Soit :

$$r : X/S \longrightarrow T$$

une "*rétraction analytique de l'espace analytique relatif* X/S *sur une sous-variété lisse* T " : nous entendons par là la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, hook] \arrow[rr, dashed, bend left, "\text{identité}"] \arrow[dr, hook] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d] & T \\ & S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Notons X_0/S_0 l'espace analytique relatif, image réciproque du point $0 \in T$ par cette rétraction.

Définition 1 "relative". Nous dirons que $(X/S, r)$ est *équisaturé le long de* T, si le germe d'espace saturé relatif $\tilde{X}^S/S$ admet une structure de produit :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^S \arrow[d] & = & \tilde{X}_0^{S_0} \arrow[d] & \times & T \arrow[d, equal] \\ S & = & S_0 & \times & T \end{tikzcd}$$

compatible avec la rétraction r.

Dans le cas où X est une *hypersurface*, il résulte immédiatement du Théorème 3 (§5) que l'équisaturation de X/S, ("équisaturation relative") lorsque S est un paramétrage *générique*, implique l'équisaturation de X ("équisaturation absolue").

Question 4. : Inversement, l'équisaturation de X implique-t-elle l'existence d'un paramétrage générique S tel que X/S soit équisaturé ?

Il serait intéressant de savoir répondre à cette question, car le travail de Zariski donne de nombreux renseignements sur la notion relative d'équisaturation.

Nous supposerons dans toute la suite que X est une hypersurface. Soit $R = \mathbb{C}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ un paramétrage de A. On peut écrire :

$$A = R\,[y] = R\,[Y]\;/\;(f)$$

(y = classe résiduelle de Y modulo f) où f est un polynome en Y, unitaire, réduit, à coefficients dans R. Le discriminant réduit de ce polynome engendre dans R un idéal qui ne dépend que de A et de R, et que nous appellerons "idéal de ramification" du paramétrage R. Nous noterons $\Sigma \subset S$ le sous-espace défini par cet idéal : ce sous-espace sera appelé "lieu de ramification" de X/S .

Définition 2. Nous dirons que (X/S,r) est "à lieu de ramification trivial le long de T", si la paire (S,Σ) admet une structure de produit :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, "="] & \Sigma_0 \arrow[d, hook] \arrow[r, phantom, "\times"] & T \arrow[d, equal] \\
S \arrow[r, phantom, "="] & S_0 \arrow[r, phantom, "\times"] & T
\end{tikzcd}$$

compatible avec la rétraction r.

Théorème 5 (Zariski). Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour une hypersurface :

i) (X/S,r) est équisaturé le long de T ;

ii) (X/S,r) est à lieu de ramification trivial.

De plus, ces deux propriétés impliquent la trivialité topologique de l'hypersurface X le long de T.

Remarquons que dans le cas d'un paramétrage <u>générique</u>, où l'équisaturation "relative" implique l'équisaturation "absolue", la fin du théorème 5 est un simple corollaire de notre théorème 4. Mais Zariski démontre le théorème 5 pour un paramétrage <u>quelconque</u>.

Nous nous contenterons ici de démontrer l'implication ii) $\Longrightarrow$ i), renvoyant à Zariski [10] pour le reste du théorème.

<u>Lemme 6</u>.

<u>Toute dérivation de l'anneau</u> R <u>dans lui-même qui laisse stable l'idéal de ramification s'étend canoniquement en une dérivation du saturé relatif</u> $\tilde{A}^R$ <u>dans lui-même</u>.

<u>Preuve du lemme 6</u>.

Puisque A est fini sur R, toute dérivation $\nabla : R \longrightarrow R$ admet une extension canonique dans l'anneau des fractions de A (explicitement, on a :

$$\nabla y = - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} \nabla z_i \right) / \frac{\partial f}{\partial y} \qquad).$$

Il s'agit de démontrer que dans l'hypothèse du Lemme, $\nabla g \in \tilde{A}^R$ pour tout $g \in \tilde{A}^R$. Or, le lieu polaire de tout $g \in \bar{A}$ est évidemment inclus dans le lieu singulier de X, donc, dans le lieu des zéros de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ecrivant :

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial y} \nabla y + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i} \nabla z_i \quad ,$$

nous en déduisons que le lieu polaire de ∇g est inclus dans le lieu des zéros de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Pour vérifier que $\nabla g \in \tilde{A}^R$, il suffit donc (Théorème 1^H relatif, fin du §3) de le vérifier <u>en un point générique de chaque composante irréductible</u> (de codimension 1 évidemment) <u>du lieu des zéros de</u> $\frac{\partial f}{\partial y}$, Soit ${}^{S}X$ une telle composante irréductible, <u>restreinte à un petit voisinage d'un de ses points</u> ; pour un choix générique du point, on pourra supposer que :

1°) ${}^{S}X$ est <u>lisse</u>, et la restriction à ${}^{S}X$ du morphisme $X \longrightarrow S$ est une <u>immersion</u>;

2°) ${}^{S}X = (X|\Sigma)^{red}$, où $\Sigma \subset S$ désigne l'image de ${}^{S}X$, c.à.d. le lieu de ramification du morphisme $X \longrightarrow S$;

3°) le revêtement fini $D^{red}_{X/S} \longrightarrow {}^{S}X$ est <u>étale</u>, c.à.d. que $D^{red}_{X/S}$ est une somme disjointe de composantes ${}^{\tau}D^{red}_{X/S}$ isomorphes à ${}^{S}X$.

D'après 1°), Σ est un diviseur lisse de S, et l'on peut choisir dans S des coordonnées locales $(x, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ de façon que x soit une équation locale de ce diviseur. 2°) signifie que x ne s'annule pas en dehors de ${}^{S}X$.

Localement, dans S, le sous-module des dérivations qui laissent stable l'idéal (x) de ramification est engendré par $x \frac{\partial}{\partial x}$ et par les $\frac{\partial}{\partial t_i}$.

<u>Il suffit donc de démontrer que les fonctions</u> $x \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial t_i}$ <u>sont lipschitziennes relativement à</u> S.

Considérons, au voisinage d'une des composantes ${}^{\tau}D^{red}_{X/S}$ du revêtement étale de 3°), l'espace $E_{X/S}$, qu'on pourra supposer <u>lisse</u>. La fonction x est bien définie sur $E_{X/S}$ (par composition avec le morphisme canonique $E_{X/S} \longrightarrow \bar{X} \underset{S}{\times} \bar{X} \longrightarrow S$), et en vertu de 2°) elle ne s'annule pas en dehors de $D^{red}_{X/S}$; elle est donc de la forme $x = s^{m(\tau)}$, où s est une équation irréductible du diviseur lisse ${}^{\tau}D^{red}_{X/S}$. D'autre part, l'idéal du diviseur non réduit ${}^{\tau}D_{X/S}$ est engendré par :

$$ {}^{\tau}\Delta y = y \otimes 1 - 1 \otimes y = a_{\tau}(t)\ s^{\mu(\tau)} + \ldots $$

où a_τ doit être une <u>unité</u> de l'anneau $\mathbb{C}\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\}$, puisque ${}^{\tau}\Delta y$ ne s'annule que sur ${}^{\tau}D^{red}_{X/S}$.

On a donc pour tout τ un développement en puissances croissantes de $x^{1/m(\tau)}$ (comparez au §4) :

$$^{\tau}\Delta y = a_{\tau}(t)\ x^{\mu(\tau)/m(\tau)} + \ldots$$

et une fonction g sera lipschitzienne relativement à S si, et seulement si, pour tout τ le développement de $^{\tau}\Delta g$ en puissances fractionnaires de x n'a pas de termes d'ordre inférieur à $\mu(\tau)/m(\tau)$. Soit donc g une telle fonction :

$$^{\tau}\Delta g = b_{\tau}(t)\ x^{\mu(\tau)/m(\tau)} + \ldots$$

On a :

$$^{\tau}\Delta\left(x\frac{\partial g}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}(^{\tau}\Delta g) = x\left[\frac{\mu(\tau)}{m(\tau)}\ b_{\tau}(t)\ x^{(\mu(\tau)/m(\tau))-1} + \ldots\right]$$

et :

$$^{\tau}\Delta\left(\frac{\partial g}{\partial t_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t_i}(^{\tau}\Delta g) = \frac{\partial b_{\tau}(t)}{\partial t_i}\ x^{\mu(\tau)/m(\tau)} + \ldots$$

de sorte que $x\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t_i}$ sont encore des fonctions du même type, c.à.d. des fonctions lipschitziennes relativement à S, et le lemme 6 est démontré.

<u>Preuve de l'implication ii) $\Longrightarrow$ i) (Théorème 5)</u>.

Choisissons dans S des coordonnées locales : $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}\ ;\ t_1, t_2, \ldots, t_p)$ compatibles avec la structure de produit $S_o \times T$. Le champ de vecteurs $\dfrac{\partial}{\partial t_i}$ est tangent au lieu de ramification $\Sigma = \Sigma_o \times T$, donc d'après le Lemme 6, il se relève en un champ de vecteurs V_i holomorphe sur $\tilde{X}^S$. L'intégration de ces p champs de vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_p$ réalise la structure de produit cherchée sur $\tilde{X}^S$.

SPECULATIONS SUR L'EQUISINGULARITE.

On aimerait trouver une "bonne" définition de la notion d' "équisingularité de X le long de T ", satisfaisant si possible aux deux propriétés suivantes :

(TT) l'équisingularité implique la trivialité topologique ;

(OZ) l'ensemble des points de T où X est équisingulier forme un ouvert dense de Zariski.

L'équisaturation satisfait à (TT) (Théorème 3 ci-dessus), mais ne satisfait à (OZ) que dans le cas où $\operatorname{codim}_X T = 1$ (équisaturation d'une famille de courbes = équisingularité) : dans le cas général, on peut trouver des $X \longrightarrow T$ tels que X ne soit équisaturé *) en aucun point de T.

Zariski a proposé [6] [7] une définition de l'équisingularité des hypersurfaces qui généralise l'idée de trivialité du lieu de ramification : l'hypersurface X est "équisingulière" le long de T, si pour un paramétrage "générique" le lieu de ramification Σ est "équisingulier" le long de (la projection de) T -comme la codimension de T dans Σ est inférieure d'une unité à sa codimension dans X, on obtient bien ainsi une définition du mot "équisingulier", par induction sur la codimension.

Cette définition satisfait bien à (OZ), mais on ne sait pas démontrer (TT).

Dans le cas où T coincide avec le lieu singulier de X (famille d'espaces analytiques à singularités isolées), Hironaka a trouvé un critère d'équisingularité qui satisfait à la fois à (TT) et (OZ) . Ce critère

*) Nous pensons ici à l'équisaturation "relative", caractérisée (Théorème 4) par la trivialité du lieu de ramification. Mais vraisemblablement, la notion "absolue" d'équisaturation revient à peu près au même —n'a-t-on pas envie de répondre oui à la Question 4 ?

est défini [3] en termes d'éclatement normalisé d'un idéal (à savoir : le produit de l'idéal de T par l'idéal jacobien de X). La trivialité topologique se démontre comme ici en intégrant un champ de vecteurs *), mais :

1°) au lieu d'être holomorphe sur $\bar{X}$, ce champ de vecteurs est <u>différentiable</u> ($\mathscr{C}^\infty$) <u>sur l'espace éclaté</u> $\hat{X}$ (éclatement normalisé de l'idéal mentionné ci-dessus) ;

2°) au lieu d'être lipschitzien sur X, c.à.d. de satisfaire à une inégalité de Lipschitz pour tout couple de points dans $X \times X$, ce champ de vecteurs ne satisfait à une inégalité de Lipschitz que pour les couples de points dans $T \times X$.

Peut-être la solution générale du problème de l'équisingularité fera-t-elle intervenir des anneaux de fonctions de ce type ($\mathscr{C}^\infty$ dans un espace éclaté, "faiblement lipschitziennes" en bas) ?

*) Cf. H. Hironaka (non publié).

APPENDICE : STRATIFICATIONS, PROPRIETE a) DE WHITNEY ET TRANSVERSALITE .

Une "stratification" d'un espace analytique (réduit) X est une partition localement finie de X en variétés lisses connexes appelées "strates", telle que :

1°) l'adhérence $\bar{W}$ de toute strate W soit un espace analytique (irréductible) ;

2°) le bord $\partial W = \bar{W} - W$ de toute strate W soit une union de strates.

On appelle "étoile" d'une strate W l'ensemble des strates qui ont W dans leur bord.

Soit (W_0, W) un couple de strates, avec $W_0 \subset \partial W$. On dit que ce couple vérifie la propriété a)de Whitney en un point $x_0 \in W_0$ si pour toute suite de points $x_i \in W$ tendant vers x_0, de façon que l'espace tangent $T_{x_i}(W)$ admette une limite , cette limite contient l'espace tangent $T_{x_0}(W_0)$ (on suppose X plongé localement dans un espace euclidien, de façon à pouvoir réaliser les espaces tangents comme sous-espaces d'un même espace vectoriel; la propriété a) de Whitney est indépendante du plongement choisi). Pour tout couple de strates (W_0, W) d'une stratification, il existe un ouvert dense de Zariski de points de W_0 où la propriété a) de Whitney est satisfaite [5]. On peut donc "raffiner" toute stratification en une stratification telle que la propriété a) de Whitney soit satisfaite en tout point pour tout couple de strates.

Proposition. Soit (X, x_0) un germe d'espace analytique complexe, stratifié, tel que les couples de strates (W_0, W) satisfassent à la propriété a) de Whitney, où W_0 désigne la strate qui contient x_0, et W n'importe quelle strate de l'étoile de W_0. Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{C}^m$ un germe de morphisme tel que $\varphi|W_0$ soit effectivement transverse à la valeur 0 au point x_0. Alors, pour toute strate W, $\varphi|W$ est effectivement transverse à la valeur 0 en au moins un point de W arbitrairement voisin de x_0.

Preuve.

La transversalité de $\varphi|W$ en tout point voisin de x_0 est une conséquence évidente de la propriété a) de Whitney pour le couple (W_0, W). Il reste seulement à démontrer la transversalité "effective", c.à.d. à démontrer que $(\varphi|W)^{-1}(0)$ n'est pas vide. Or, $(\varphi|\bar{W})^{-1}(0)$ est un sous-ensemble analytique fermé de $\bar{W}$, non vide (puisqu'il contient le point x_0), et donné par m équations : il est donc de codimension $\leq m$. Si $(\varphi|W)^{-1}(0)$ était vide, cela voudrait dire que ∂W contiendrait au moins une strate W' telle que $(\varphi|W')^{-1}(0)$ soit non vide et de dimension $\geq \dim W - m$. Mais, d'un autre côté la transversalité de $\varphi|W'$ implique que $(\varphi|W')^{-1}(0)$ est une variété lisse de dimension $\dim W' - m$, donc de dimension $< \dim W - m$, d'où contradiction.

Remarque. On aurait évidemment pu, dans l'énoncé de la Proposition, remplacer la transversalité par rapport à la valeur 0 par la transversalité par rapport à une sous-variété lisse de $\mathbb{C}^m$.

REFERENCES.

[1] S.S. ABHYANKAR. Local Analytic Geometry, Academic Press (1964).
voir aussi
R. NARASIMHAN. Introduction to the theory of analytic spaces. Lecture notes in Mathematics 25 Springer-Verlag 1966.

[2] H.HIRONAKA. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. of Math. 79, 1 (1964) p. 109-203 et 2 (1964) p. 205-326

[3] H.HIRONAKA. Equivalences and deformations of isolated singularities. Woodshole seminar in algebraic geometry (1964).

[4] J. LIPMAN. Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorisation. (Preprint, Purdue University 1969).

[5] H. WHITNEY. Tangents to an analytic variety. Ann. of Math. 81, 3(1965) P. 496-549.

[6] O. ZARISKI. A theorem on the Poincaré group of the residual space of an algebraic hypersurface. Ann. of Math. 38 (1937) p.131.

[7] O. ZARISKI. Equisingularity and related questions of classification of singularities. Woodshole seminar in algebraic geometry (1964).

[8] O. ZARISKI. Studies in Equisingularity I. Equivalent Singularities of plane algebroid curves. Amer. J. Math. 87 (1965) p.507-536.

[9] O. ZARISKI Studies in Equisingularity II. Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero).
Amer. J. Math. _87_ (1965) p.972-1006

[10] O.ZARISKI Studies in Equisingularity III. Saturation of local rings and equisingularity.
Amer. J. Math. _90_ (1968)