BIBLIOGRAPHIE

[1] V.-I. ARNOL'D - Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkts. Anal. Prilozhen. 10, 4(1976), 249-258.

[2] A.-D. BRJUNO - Analytical form of differential equations, Trans. Moscow Math. Soc., 25(1971), 131-288.

[3] C. CAMACHO, N.-H. KUIPER and J. PALIS - The topology of holomorphic flows with singularity, Publ. Math. I.H.E.S., 48(1978), 5-38.

[4] H. DULAC - Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières, Bull. Soc. Math. France, 40(1912), 324-383.

[5] H. DULAC - Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Journal Ec. Polytechnique, 2 9(1904), 1-125.

[6] J.-P. FRANÇOISE - Sur les formes normales de champs de vecteurs, Bull. Union Math. Ital., 5 17 A(1980), 60-66.

[7] J.-P. FRANÇOISE - Singularités de champs isochores, à paraître au Duke Math. Journal.

[8] J. MARTINET et J.-P. RAMIS - Classification de certaines singularités d'équations différentielles, à paraître.

[9] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU - Intégrales premières et holonomie, à paraître aux Annales E.N.S..

[10] V.-A. PLISS - On the reduction of an analytic system of differential equations to a linear form, Diff. Eq., 1(1965), 111-118.

[11] H. POINCARE - Oeuvres, vol. 1, Gauthiers-Villars, Paris, 1968, XLIX-CXXLIX.

[12] A.-S. PYARTLI - Birth of complex invariant manifolds close to a singular point of a parametrically dependant vector field, Funk. Anal. Prilozhen, 6 4(1972), 339-340.

[13] H. RÜSSMANN - On the convergence of power series transformations of analytic mappings near a fixed point into a normal form, Preprint I.H.E.S., 1977.

[14] C.-L. SIEGEL - Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtlösung, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl. II A(1952), 21-30.

[15] B. TURCO - Sur les formes normales de singularités isolées de champs de vecteurs avec résonnances, Thèse 3è Cycle, Reims, 1980.

Jean MARTINET
Institut de Mathématiques
7 rue René Descartes
67000 STRASBOURG

Séminaire BOURBAKI
33e année, 1980/81, n° 565

Novembre 198

VARIETES TORIQUES ET POLYTOPES

par Bernard TEISSIER

Introduction

La construction des variétés de Demazure permet de choisir, pour chaque famil finie $K_1,\dots,K_p$ de polytopes entiers dans $\mathbb{R}^d$, une variété algébrique X sur (de dimension d, et sur laquelle à chaque K_i correspond un faisceau inversible (i.e. fibré en droites) L_i. La donnée de (X,L_i) détermine K_i, et l'on peut établir un dictionnaire entre les propriétés combinatoires des polytopes K_i et l propriétés algébro-géométriques des faisceaux L_i sur X. Nous nous concentrons ici sur les propriétés de X et des L_i qui relèvent de la Théorie de Hodge (bie que X ait des singularités, celles-ci ne gênent pas trop). Soit f_i le nombre des faces de dimension i d'un polytope P dont toutes les faces sont des simplexes. R.P. Stanley a montré ([20]) que le théorème de Lefschetz vache sur X, joint à un résultat combinatoire élégant (d'un type inauguré par Macaulay), fourni des inégalités entre les f_i, qui avaient été conjecturées par Mc Mullen, mais dont on ne connait aucune autre démonstration, et que la dualité de Poincaré sur) fournit des relations linéaires déjà connues entre les f_i (équations de Dehn - Somerville) ; un peu avant, L.J. Billera et C.W. Lee ([2]) avaient montré que ces équations et inéquations étaient aussi une condition suffisante pour qu'une suite d'entiers $(f_o,\dots,f_{d-1})$ provienne d'un polytope simplicial. D'autre part, étant données deux polytopes K_1 et K_2 dans $\mathbb{R}^d$, on sait que $\mathrm{Vol}(\lambda_1K_1+\lambda_2K_2)$ prend les mêmes valeurs, pour $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ qu'un polynome homogène de degré d en λ_1 et λ_2 à coefficients positifs, que l'on peut écrire $\sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} v_i\lambda_1^i\lambda_2^{d-i}$.

Grâce au dictionnaire mentionné ci-dessus, on peut déduire du théorème de l'index de Hodge sur X les inégalités "de Fenchel - Aleksandrov" $v_{i-1}^2 \geq v_iv_{i-2}$ pour $2 \leq i \leq d$ (cf. [1], [27], [25], [26], [11]). Par une approximation évident on en déduit les mêmes inégalités pour deux convexes compacts quelconques de $\mathbb{R}^d$, et donc en particulier les inégalités isopérimétriques.

§ 1. Complexes simpliciaux de multi-ensembles et idéaux engendrés par des monomes

Définition 1.- Un multi-ensemble est un couple (V,e), où V est un ensemble et e une application de V dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une partie d'un multi-ensemble est un couple (V',e') où $V' \subseteq V$ et $e' \leq e|V'$. Le rang d'un multi-ensemble est $r(V,e) = \sum_{v \in V} e(v)$, ou $+\infty$, avec les conventions usuelles.
On note ∂ l'application qui à un multi-ensemble de rang fini ℓ associe l'ensemble de ses parties de rang $\ell-1$; On dit qu'un ensemble Δ de parties de rang fini de (V,e) est un complexe simplicial si, pour toute partie $(V',e') \in \Delta$, on a $\partial(V',e') \subset \Delta$, ce que l'on notera $\partial\Delta \subseteq \Delta$.

Soient maintenant k un corps, et d un entier, ou $+\infty$.

Définition 2.- Un ensemble E de monomes dans l'anneau de polynomes $h[X_1,\dots,X_d]$ est un escalier si tout monôme m' divisant un monome m de E est aussi dans E.

Dans toute la suite nous ne considérerons que les multi-ensembles de cardinalité au plus dénombrable, et nous identifierons V à $\{1,\dots,d\}$, où $d = \operatorname{card} V$.

Soit (V,e) un multi-ensemble, et soit Δ une famille de parties de rang fini de (V,e). Considérons l'anneau de polynomes $k[V] = k[(X_v)_{v \in V}]$, et à chaque élément (V',e') de Δ associons le monôme $\prod_{v \in V'} X_i^{e'(v)}$; Notons $E(\Delta) \subset k[V]$ l'ensemble des monômes ainsi obtenus : L'ensemble $E(\Delta)$ est un escalier si et seulement si Δ est un complexe simplicial.

Notons $I(\Delta)$ l'idéal homogène de $k[V]$ engendré par les monômes $\prod_{v \in V'} X_v^{e'(v)}$, où (V',e') est une partie de (V,e) qui n'appartient pas à Δ, et notons $R(\Delta)$ la k-algèbre graduée quotient $k[V]/I(\Delta)$. Etant donnée une partie (W,f) de $(V,+\infty)$, posons pour tout $w \in W$, $a(w) = \inf(f(w),e(w))$.
Supposons que Δ soit un complexe simplicial : On voit que le monôme $\prod_{w \in W} X_w^{f(w)}$ n'appartient pas à $I(\Delta)$ si et seulement si la partie (W,a) de (V,e) appartient à Δ. Dans le cas où e est la fonction constante égale à 1, (W,a) n'est autre que le <u>support</u> de (W,f), et puisque le nombre des monômes de degré ℓ ayant un support de cardinalité $i+1$ donné ne dépend que de ℓ et i, puisqu'il vaut $\binom{\ell-1}{i}$, en notant $R(\Delta)_\ell$ la composante homogène de degré ℓ de $R(\Delta)$, on a : $\dim_k R(\Delta)_o = 1$, et

$$\dim_k R(\Delta)_\ell = \sum_{i=o}^{\delta} f_i \binom{\ell-1}{i} \qquad \text{si } \ell \geq 1$$

où δ est le plus grand des rangs des éléments de Δ et f_i est le nombre des éléments de Δ qui ont rang $i+1$.
Dans le cas où e est la fonction constante égale à $+\infty$ on a $(W,a) = (W,f)$, et donc

$$\dim_k R(\Delta)_\ell = f_{\ell-1} \qquad \ell \geq 0 \qquad (f_{-1} = 1)$$

On voit donc que dans ces deux cas, la connaissance de la <u>fonction de Hilbert</u> $H_R : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de l'algèbre graduée $R = R(\Delta)$ définie par $H_R(\ell) = \dim_k R_\ell$ équiva[ut] à la connaissance de la f-suite du complexe simplicial Δ, c'est à dire la suite $(f_o,f_1,\dots,f_i,\dots)$ où $f_\ell = \operatorname{card} \Delta_\ell$ et Δ_ℓ est l'ensemble des éléments de Δ q[ui] ont pour rang ℓ. On se propose de caractériser les suites d'entiers qui sont la f-suite d'un complexe simplicial Δ :
Considérons l'anneau $k[(X_i)_{i \in \mathbb{N}}]$, et introduisons sur l'ensemble de ses monômes l'ordre suivant : Un monôme m est plus petit que m', si ou bien $\deg m < \deg$ [m'] ou bien $\deg m = \deg m'$ et m est plus petit que m' pour l'ordre lexicographiq[ue] <u>inverse</u> c'est à dire $X_1^{a_1}\dots X_p^{a_p} < X_1^{b_1}\dots X_p^{b_p}$ (les a_i, b_i peuvent être nuls) si il existe $j \leq p$ tel que $a_p = b_p$, $a_{p-1} = b_{p-1}, \dots$ $a_{p-j+1} = b_{p-j+1}$ et $a_{p-j} < b_{p-j}$. En particulier, $X_1 < X_2 < X_3 < \dots$.

Soit $(\mathbb{N},e)$ un multi-ensemble. Pour chaque entier a, désignons par $\binom{a}{\ell}_e$ l[e] nombre des monômes de degré ℓ en $X_1,\dots,X_a$ tels que X_i apparaisse avec un exposant $\leq e(i)$, que nous appellerons e-monômes, c'est à dire le coefficient de x^ℓ dans le produit $\prod_{i=1}^{a} (1+x+\dots+x^{e(i)})$. En particulier si $e \equiv 1$, on a $\binom{a}{\ell}_1 = \binom{a}{\ell}$ et si $e \equiv +\infty$, on a $\binom{a}{\ell}_\infty = \binom{a+\ell-1}{\ell}$. On suppose dans la suite $e(i) \leq e(i-1)$, $\forall\, i \geq 1$

Lemme de Macaulay et Kruskal.- Un entier ℓ étant fixé, tout nombre entier f s'écrit d'une manière unique

$$f = \binom{a_\ell}{\ell}_e + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1}_e + \dots + \binom{a_i}{i}_e$$

où $a_\ell \geq a_{\ell-1} \geq \dots \geq a_i$, et dans cette suite, chaque j apparait au plus $e(j+1)$ fois.
Gardons les notations précédentes, et pour chaque entier f, notons I_ℓ^f l'ensembl[e] des f premiers e - monômes de degré ℓ (pour l'ordre ci-dessus), vu bien sûr comme un ensemble de parties de $(\mathbb{N},e)$; on a alors :

THEOREME (cf. [3] , [7])....

A) $\partial\, I_\ell^f = I_{\ell-1}^{\partial_\ell f}$ où $\partial_\ell f = \binom{a_\ell}{\ell-1}_e + \dots + \binom{a_i}{i-1}_e$

les nombres $a_\ell ,\dots, a_i$ étant ceux qui sont associés à f dans le lemme précédent.

B) Soit Δ un ensemble de parties de $(\mathbb{N},e)$, et soit C l'opérateur (de compression) qui à Δ associe la famille des $I_\ell^{f_\ell}$, avec $f_\ell = \operatorname{Card} \Delta_\ell$. Alors

$$\partial(C\Delta) \subseteq C(\partial\Delta)$$

L'idée de la preuve du lemme est simple : tant que $\binom{a_\ell}{\ell}_e \le f$, les f premiers monômes de degré ℓ utilisent au moins les a_ℓ premières variables ; si $\binom{a_\ell}{\ell}_e < f < \binom{a_\ell+1}{\ell}_e$, alors parmi les f premiers monômes, certains utilisent $X_{a_\ell+1}$. Ainsi les f premiers monômes comprennent tous les monômes de degré ℓ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$, et des produits de monômes de degré $\ell-1$ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$ par $X_{a_\ell+1}$. Mais il s'agit surement des $f-\binom{a_\ell}{\ell}_e$ premiers monômes de degré $\ell-1$, toujours à cause de la façon dont l'ordre a été défini. Si $f-\binom{a_\ell}{\ell}_e \ge \binom{a_\ell}{\ell-1}_e$, cela signifie que tous les monômes de degré $\ell-1$ en $X_1,\dots,X_{a_\ell}$ apparaissent ainsi, on pose $a_{\ell-1} = a_\ell$, et l'on va regarder les monômes de degré $\ell-2$, dont on fait le produit avec $X^2_{a_{\ell+1}}$, et l'on continue ainsi. L'égalité se reproduit bien au plus $e(a_\ell+1)$ fois, et par récurrence on obtient le lemme, et le même type d'argument prouve l'assertion A) du Théorème.

Pour l'assertion B), souvent appelée "Théorème de Kruskal-Katona" on renvoie à [3] et [7]..

<u>Remarque</u>.- Si l'on note ∂^{-1} l'application qui, à une partie de rang fini (V',e') de (V,e) associe l'ensemble des parties de (V,e) de rang $r(V',e')+1$ telles que (V,e) en soit une partie, une preuve symétrique de celle de B) montre aussi que

$$\partial^{-1}(C\Delta) \supseteq C(\partial^{-1}\Delta)$$

tandis que $\partial^{-1}\, I_\ell^f = I_{\ell+1}^{\partial_\ell^{-1} f_\ell}$

où

$$\partial_\ell^{-1} f = \binom{a_\ell}{\ell+1}_e + \dots + \binom{a_i}{i+1}_e .$$

Corollaire 1.- Une suite d'entiers $(f_o,f_1,\dots,f_\ell,\dots)$ est la f-suite d'un complex simplicial de parties de rang fini de $(\mathbb{N},e)$ si et seulement si pour tout $\ell\ge1$, on a

$$\partial_\ell\, f_\ell \le f_{\ell-1} \qquad (\text{resp. } f_{\ell+1} \le \partial_\ell^{-1} f_\ell)$$

En effet, étant donné une suite satisfaisant cette condition, la famille $\Delta_\ell = I_\ell^{f_\ell}$ est un complexe simplicial d'après la partie A) du Théorème. Inversement, étant donné un complexe simplicial Δ, $C\Delta_\ell = I_\ell^{f_\ell}$ et donc on a $I_{\ell-1}^{\partial_\ell f_\ell} \subseteq C(\partial\Delta) \subseteq C(\Delta_{\ell-1}) = I_{\ell-}^{f_\ell}$ d'où le résultat.

Corollaire 2.- (Stanley [21], inspiré par Macaulay [14]).- Soient k un corps, et $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une k-algèbre graduée de type fini R avec $R_o=k$ et engendrée par ses éléments de degré 1, ayant H pour fonction de Hilbert.

ii) Il existe un escalier E dans un anneau $k[X_1,\dots,X_d]$ tel que $H(\ell)$ soit le nombre d'éléments de degré $\ell-1$ dans E .

ii)' Il existe un ensemble fini V et un complexe simplicial Δ dans $(V,+\infty)$ tel que $\operatorname{card} \Delta_{\ell-1} = H(\ell)$ $(\ell\ge0)$.

iii) Posant, pour tout ℓ, $H(\ell) = \binom{c_\ell}{\ell} + \dots + \binom{c_i}{i}$ avec $c_\ell > c_{\ell-1} > \dots > c_i \ge i$, on a

$$H(\ell+1) \le \binom{c_\ell+1}{\ell+1} + \binom{c_{\ell-1}+1}{\ell} + \dots + \binom{c_i+1}{i+1}$$

1) Une k-algèbre R comme en i) est quotient de $k[X_1,\dots,X_d]$ par un idéal homogène I. On va lui associer un escalier dans $k[X_1,\dots,X_d]$ comme suit : Posons $m_1=1$, et supposons avoir défini $m_1,\dots,m_i$; on définit m_{i+1} comme le plus petit monôme dont l'image dans R est linéairement indépendante des images de $m_1,\dots,m_i$. Si un tel élément n'existe pas, la construction s'arrète là. La collection des m_i est un escalier ayant la propriété voulue en ii). Le reste résulte de ce qui précède, en remarquant que l'inégalité de iii) équivaut bien à $\partial_\ell^{-1} f_\ell \ge f_{\ell+1}$ dans le cas $e \equiv +\infty$.

§ 2. Polytopes et variétés toriques

2.1 Algèbres associées à des cônes et varités toriques. (D'après [5], [13], [17])

Notons M un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d, considéré comme le réseau entier de $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^d$, et $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module dual, considéré comme le réseau entier de l'espace vectoriel dual $\mathbb{R}^{d*}$. Soit $\sigma \subset \mathbb{R}^{d*}$ un cône convexe polyhédral rationnel, c'est à dire qu'il existe un nombre fini de formes linéaires ℓ_i, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, telles que $\sigma = \{u \in \mathbb{R}^{d*} / \ell_i(u) \geq 0$ pour tout $i\}$, et soit $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}^d$ le dual convexe de σ, c'est à dire $\{x \in \mathbb{R}^d / u(x) \geq 0 \ \forall u \in \sigma\}$; l'ensemble $\check{\sigma}$ est encore un cône convexe rationnel, et grâce au lemme de Gordan le sous-monoide $\check{\sigma} \cap M$ de M est un monoide de type fini. En fait, l'application $\sigma \to \check{\sigma} \cap M$ définit une bijection de l'ensemble des cônes convexes polyhédraux rationnels de $\mathbb{R}^{d*}$ qui ne contiennent aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{d*}$ sur l'ensemble des sous-monoides de type fini de M qui engendrent le groupe M.

Dans toute la suite, nous dirons "cône" pour "cône convexe polyhédral rationnel". Etant donné un corps k, on notera $k[\check{\sigma} \cap M]$ l'algèbre du monoide $\check{\sigma} \cap M$, c'est à dire la sous-algèbre de l'algèbre $k[M] \simeq k[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_d, X_d^{-1}]$ du groupe M qui est engendrée par les monômes dont l'exposant appartient à $\check{\sigma} \cap M$. Puisque $\check{\sigma} \cap M$ est monoide de type fini, la k-algèbre $k[\check{\sigma} \cap M]$ est de type fini, et définit donc une variété algébrique affine $X_\sigma = \mathrm{Spec}\, k[\check{\sigma} \cap M]$ sur k. On obtient en particulier ainsi, en prenant les cônes σ ne contenant aucun sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{d*}$, toutes les variétés algébriques affines normales X contenant comme ouvert de Zariski dense le tore $T = (k^*)^d$ et telles que l'action de T sur lui-même par translation s'étende en une action algébrique de T sur X.

Remarquons qu'une inclusion de cônes $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ équivaut à $\check{\sigma}_1 \cap M \supseteq \check{\sigma}_2 \cap M$ qui a son tour équivaut à un morphisme $X_{\sigma_1} \longrightarrow X_{\sigma_2}$, qui est birationnel si $\check{\sigma}_1 \cap M$ et $\check{\sigma}_2 \cap M$ engendrent le même groupe.

On dit qu'un sous-ensemble $\sigma' \subseteq \sigma$ est une face du cône σ, et l'on note $\sigma' < \sigma$ si il existe $m \in M$ tel que $u(m) \geq 0 \ \forall u \in \sigma$ et $\sigma' = \{u \in \sigma / u(m) = 0\}$.

Définitions 3.- Un éventail Σ est la donnée d'un ensemble fini de cônes $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dans $\mathbb{R}^{d*}$ tel que : toute face d'un cône σ_α est un cône σ_β, $\beta \in A$, et pour tous les couples $(\alpha,\beta) \in A \times A$, $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$ est une face de σ_α et de σ_β.

On appelle variété torique associée à Σ la variété algébrique X_Σ sur k obtenue en recollant les variétés algébriques affines X_{σ_α} $(\alpha \in A)$ le long des ouverts $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$.

On montre (cf. [5] ou [13] ou [17]) que l'on obtient ainsi tous les plongements T-équivariants du tore T dans des variétés normales. De plus on a un morphisme de plongements T-équivariants $X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ si et seulement si, pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $\sigma' \in \Sigma'$ tel que $\sigma \subseteq \sigma'$, un tel morphisme est propre si et seulement si $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \bigcup_{\sigma' \in \Sigma'} \sigma'$, et X_Σ est complète si et seulement si $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = \mathbb{R}^{d*}$.

2.2 La construction (cf. [4], [21] ou [26])

Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_M$) l'ensemble des compacts convexes de $\mathbb{R}^d$ (resp. de ceux qui sont l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points du réseau entier M). On munit $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_M$ de la topologie de Hausdorff. Pour tout $K \in \mathcal{K}$, soit $H : \mathbb{R}^{d*} \to \mathbb{R}$ la fonction d'appui de K, définie par $H(u) = \inf_{x \in K} u(x)$. Si K est dans $\mathcal{K}_M$, sa fonction d'appui est linéaire par morceaux, c'est à dire qu'il existe un éventail $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tel que pour tout $\alpha \in A$, il existe $m_\alpha \in M$ tel que $H(u) = u(m_\alpha)$ pour tout $u \in \sigma_\alpha$. Nous dirons qu'un tel éventail est adapté à K. Etant donnés $K_1, \ldots, K_p$ dans $\mathcal{K}_M$, il existe un unique éventail Σ_o adapté à tous les K_i et tel que tout autre éventail adapté à tous les K_i soit une subdivision de Σ_o. Si Σ est adapté, et si un des K_i est d'intérieur non vide, aucun des $\sigma_\alpha \in \Sigma$ ne contient de sous-espace linéaire.

Prenons $k = \mathbb{C}$, et soit Σ un éventail adapté à $K_1, \ldots, K_p$. Pour chaque $i \in [1, \ldots, p]$, et $\sigma_\alpha \in \Sigma$, notons $L_{i,\alpha}$ le sous $\mathbb{C}[\sigma_\alpha \cap M]$ - module de $\mathbb{C}(M)$ engendré par les monômes m tels que $u(m) \geq H_i(u)$ pour tout $u \in \sigma_\alpha$, où H_i est la fonction d'appui de K_i. Puisque $H_i(u) = u(m_{i,\alpha})$ $(u \in \sigma_\alpha)$, $L_{i,\alpha}$ est précisément le $\mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap M]$ - module monogène engendré par $m_{i,\alpha}$. Les $L_{i,\alpha}$ se recollent en un faisceau inversible L_i de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ - modules, qui est engendré par ses sections globales, admet une action de T, et une base T-homogène de $H^o(X_\Sigma, L_i)$ est en bijection avec l'ensemble des $m \in M$ tels que $u(m) \geq H_i(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^{d*}$, c'est à dire $K_i \cap M$. Ainsi la donnée de la variété torique X_Σ et du $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$ - module T-équivariant et inversible L_i détermine K_i, alors que la donnée de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}$, même dans le cas $p=1$, ne détermine que les faces de K_i "à translation près" ; la donnée de L_i équivaut à la donnée des positions des faces de K_i.

2.3 Le dictionnaire

Soient $K_1,\dots,K_p$ dans $\mathcal{K}_M$, Σ un éventail adapté et $X = X_\Sigma$. On suppose que K_1 est d'intérieur non vide. On rappelle qu'un polytope P est <u>simplicial</u> si toutes ses faces sont des simplexes. On note $f_i = f_i(P)$ le nombre des faces de dimension i du polytope P, et l'on remarque que, quitte à raffiner le réseau entier, on peut approximer arbitrairement P par un polytope $K \in \mathcal{K}_M$ tel que $f_i(K') = f_i(P)$ pour tout i . Par ailleurs, tout polytope peut être approximé arbitrairement par un polytope simplicial. Un polytope est cosimplicial si son éventail Σ_o est formé de cônes simpliciaux.

On rappelle que, étant donnée une variété algébrique complète X , et des faisceaux inversibles de $\mathcal{O}_X$-modules $L_1,\dots,L_p$, la caractéristique d'Euler - Poincaré cohérente $\chi(X,L_1^{\nu_1} \otimes \dots \otimes L_p^{\nu_p})$ est un polynome de degré $d = \dim X$ en $\nu_1,\dots,\nu_p$. En particulier, $\chi(X,L^\nu) = \deg L \, \frac{\nu^d}{d!} + O(\nu^{d-1})$ où $\deg L$ est un entier. On définit les degrés mixtes de L_1 et L_2 comme les coefficients s_i apparaissant dans l'expression $\deg L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2} = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} s_i \nu_1^i \nu_2^{d-i}$.

A) Propriétés de X et des L_i . (d'après Demazure [5], et [13], [4])

1) X est une variété complète et normale.

2) $H^j(X,L_i) = 0$ pour $j\geq 1$ (et L_i est engendré par ses sections globales).

3) (D'après Ehlers [6] et Danilov [4]) : Si p=1 K est simplicial et $\Sigma = \Sigma_o$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2k}(X,\mathbb{C}) = \sum_{i=k}^{d} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} a_{d-i}$$

où a_j est le nombre de cônes de dimension j dans Σ , et $\dim H^{2k+1}(X,\mathbb{C}) = 0$ $(0 \leq k)$.

4) Si P est cosimplicial, et $\Sigma = \Sigma_o$, chaque σ_α est un cône simplicial, et l'on vérifie alors que X_{σ_α} est quotient d'une variété affine non-singulière par un groupe fini d'automorphismes (cf. [4], 2.6.2). Si l'on sait de plus que X est projective, c'est une V-variété projective, et donc d'après un théorème de Steenbrink ([24], 1.13) X satisfait le théorème de Lefschetz vache, c'est à dire que si $L \in H^2(X,\mathbb{Z})$ est la classe d'un diviseur ample sur X, pour tout $q\in\mathbb{N}$ l'application $\omega \to L^q \cap \omega$ induit un isomorphisme de $H^{n-q}(X,\mathbb{C})$ sur $H^{n+q}(X,\mathbb{C})$. De plus, X satisfait aussi la dualité de Poincaré. [Le point ici est que pour une résolution des singularités $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$, notant $j : X^o \to X$ l'inclusion de la partie non-singulière X^o de X dans X, et $\tilde{\Omega}_X^{\cdot} = j_* \Omega^{\cdot}_{X^o}$

(complexes de De Rham), d'une part $\Omega^{\cdot}_X$ est encore une résolution de $\mathbb{C}$, et d'autre part $\tilde{\Omega}^{\cdot}_X \cong \pi_* \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}}$. Steenbrink démontre alors que la suite spectrale d'hypercohomologie $E_1^{pq} = H^q(X,\tilde{\Omega}^p_X) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C})$ dégénère en E_1 comme dans le cas non-singulier].

5) (D'après [4], § 10, et Remarque 10.9) : Si le polytope P est cosimplicial $\Sigma = \Sigma_o$, l'algèbre graduée de cohomologie est $H^*(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=o}^{d} H^{2i}(X,\mathbb{C})$ (où $\deg H^{2i} = i$) et est engendrée par ses éléments de degré 1. (En fait, toute la cohomologie de X est algébrique).

B) Voici quelques points du dictionnaire (k=$\mathbb{C}$) . Les K_i sont dans $\mathcal{K}_M$ et Σ leu est adapté ; $X = X_\Sigma$. On suppose que K_1 est d'intérieur non vide.

1)	$K_i = \{m_i\}$ pour un $i>1$	$L_i \simeq \mathcal{O}_X$
2)	Ensemble des $x\in\frac{1}{\nu} M$ $(\nu\in\mathbb{N})$ tel que $K_i + x \subseteq K_j$ $(i,j\geq 1)$. En particulier :	Base T-homogène, sur $\mathbb{C}$ de $H^o(X,(L_i^{-1} \otimes L_j)^\nu)$
3)	$K_i \cap \{\frac{1}{\nu} M\}$	Base T-homogène de $H^o(X,L_i^\nu)$
4)	Homothétie et addition $\nu_1 K_i + \nu_2 K_j$ $(\nu_1,\nu_2 \in \mathbb{N})$	$L_i^{\nu_1} \otimes L_j^{\nu_2}$
5)	$\mathrm{Vol}(\nu_1 K_i + \nu_2 K_j) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\#(\nu(\nu_1 K_i + \nu_2 K_j)\cap M)}{\nu^d}$	$\frac{1}{d!} \deg L_i^{\nu_1} \otimes L_j^{\nu_2}$
6)	Volumes mixtes de (K_i,K_j)	$\frac{1}{d!} \times$ (degrés mixtes de (L_i,L_j))
7)	$\Sigma = \Sigma_o$	$L_1 \otimes \dots \otimes L_p$ est ample
8)	Si p=1, Le polytope K est cosimplicial et $\Sigma = \Sigma_o$	L est ample et X est recouvert par des ouverts affines T-invariants admettant des revêtements finis T-équivariants non-singuliers.
9)	Si p=1, K est cosimplicial et $\Sigma = \Sigma_o$, $\tilde{h}_i = \tilde{h}_i(K) = \sum_{j=i}^{d} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} f_j$ où $f_j = f_j(K)$ $(f_{-1}=1, f_d=1)$ et $0\leq i\leq d$.	$\tilde{h}_i = \dim_{\mathbb{C}} H^{2i}(X,\mathbb{C})$ (Résulte du point 3) de A) et du fa que $f_j(p) = a_{d-j}(\Sigma_o)$.

§ 3. La Conjecture de Mc Mullen

Soit P un polytope simplicial convexe. On étend la f-suite de P en la suite $(f_{-1},f_o,f_1,\dots,f_{d-1},f_d)$ où $f_d = f_{-1} = 1$, et f_i est le nombre des faces de dimension i de P. Posons

$$h_i = h_i(P) = \sum_{j=o}^{i} \binom{d-j}{d-i} (-1)^{i-j} f_{j-1} \qquad (0 \leq i \leq d)$$

et $g_i = h_{i+1} - h_i$.

Mc Mullen avait conjecturé (cf. [15]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que, étant donné $(f_o,\dots,f_{d-1})$ il existe un polytope simplicial P tel que $f_i(P) = f_i$ et que les trois conditions suivantes soient vérifiées par la suite des g_i dérivée de celle des f_i comme ci-dessus :

(1) $$g_i = -g_{d-i-1} \qquad (0 \leq i \leq [\tfrac{d+1}{2}] - 1)$$

(2) $$g_i \geq 0 \qquad (0 \leq i \leq [\tfrac{d}{2}] - 1)$$

(3) $$g_{i+1} \leq \partial_{i+1}^{-1} g_i \qquad (0 \leq i \leq [\tfrac{d}{2}] - 2)$$

(où ∂^{-1} a le sens donné au § 1, avec $e = +\infty$).

Montrons, d'après Stanley ([20]), que ces conditions sont nécessaires. Puisque P est un polytope simplicial, on peut bouger un peu ses sommets sans changer les $f_i(P)$ et se ramener au cas où $P \in \mathcal{K}_M$ pour un choix convenable du réseau entier M dans $\mathbb{R}^d$. On peut donc associer à P une variété torique $X = X_{\Sigma_o}$ comme ci-dessus.

Soit $P^* = \{u \in \mathbb{R}^d / u(x) \leq 1 \ \ \forall x \in P\}$ le polytope dual de P, qui vérifie les égalités $f_i(P^*) = f_{d-1-i}(P)$. La symétrie des conditions 1) à 3) ci-dessus fait que P les satisfait si et seulement si P^* les satisfait, et l'on peut donc supposer que P est cosimplicial. Posant $X = X_{\Sigma_o}$, on a d'après le dictionnaire l'égalité $\tilde{h}_i(P) = h_{d-i}(P^*)$ et la <u>dualité de Poincaré sur</u> X donne 1). On va montrer simultanément (2) et (3) comme ceci : Soit $L \in H^2(X,\mathbb{C})$ la classe d'une section hyperplane. Grâce au Théorème de Lefschetz vache, la multiplication par L est une injection $H^{2i}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2i+2}(X,\mathbb{C})$, pour $0 \leq i \leq [\frac{d}{2}] - 1$.

Soit $A = \bigoplus_{i=o}^{d} A_i$ l'algèbre graduée $\bigoplus_{i=o}^{d} H^{2i}(X,\mathbb{C})$, où les éléments de H^{2i} ont le degré i. Comme nous avons vu plus haut, A est engendré par ses éléments de degré 1. Soit I l'idéal (homogène) de A engendré par L et $A_{[\frac{d}{2}]+1}$ et soit $R = A/I$.

On a $\dim_{\mathbb{C}} R_i = g^*_{i-1}$ $(1 \leq i \leq [\frac{d}{2}])$ d'où aussitôt l'inégalité (2). L'inégalité (3) résulte enfin du Théorème du § 1.

<u>Remarque</u>.- Il était connu (cf. [8]) que les équations (1), appelées équations de Dehn-Somerville engendrent toutes les relations <u>linéaires</u> entre les $f_i(P)$ pour un polytope simplicial P.

Pour montrer que la condition est suffisante, Billera et Lee dans [2] utilise le fait que, si les $f_i(P)$ satisfont 1), 2), 3), d'après le théorème du § 1, la suite $(H(0),\dots,H(d+1))$ provient d'un escalier de monômes, où $H(i) = h_i$ pour $0 \leq i \leq [\frac{d}{2}]$ et $H(i) = 0$ pour $[\frac{d}{2}]+1 \leq i \leq d+1$. Ils en déduisent qu'un certain sous polytope Σ de dimension d, dont la construction est très ingénieuse, d'un polytope enveloppe convexe de $H(1)+d+1$ points distincts sur la courbe $(t,t^2,\dots,t^{d+1}$ dans $\mathbb{R}^{d+1}$ a la suite donnée pour f-suite (comparer à [16] et [22]).

§ 4. Les inégalités isopérimétriques. (Voir [25], [26], [11])

Reprenons les notations de 2.2, et soient K_1 et K_2 dans $\mathcal{K}$. On se propose de démontrer les inégalités $v_{i-1}^2 \geq v_i\, v_{i-2}$, $2 \leq i \leq d$, entre les volumes mixtes de K_1 et K_2, définis par $\mathrm{Vol}(\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2) = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} v_i\, \nu_1^i\, \nu_2^{d-i}$.

Puisque les volumes mixtes sont des fonctions continues sur $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, et que l'on peut approximer arbitrairement les éléments de $\mathcal{K}$ par des éléments de $\mathcal{K}_M$, en prenant M assez serré, il suffit de prouver les inégalités pour K_1 et K_2 dan $\mathcal{K}_M$. D'après le point 6), il suffit de prouver les inégalités $s_{i-1}^2 \geq s_i\, s_{i-2}$ ent les degrés mixtes de deux faisceaux inversibles L_1 et L_2 sur une variété algébrique projective X, qui sont engendrés par leurs sections. Pour i fixé, en coupant par des hypersurfaces de X définies comme zéros de sections générales de L_1 et L_2, on se ramène au cas où X est une surface, et l'inégalité est alors exactement le théorème de l'index de Hodge sur la surface. Des inégalités, dites "quadratiques" ci-dessus, on sait depuis Minkowski tirer les inégalités $v_i^d \geq v_o^{d-i}\, v_d^i$, et en particulier, prenant pour K_1 la boule unité de $\mathbb{R}^d$, et pour K un convexe compact, on calcule facilement $v_{d-1} = \frac{1}{d}\,\mathrm{Vol}(\partial K)$, et prenant $i=d-1$, il vient l'inégalité isopérimétrique classique $\mathrm{Vol}(\partial K)^d \geq d^d\, \mathrm{Vol}(\mathbb{B})\, \mathrm{Vol}(K)$' Shepard a montré dans ([19], th. 4) que toute suite de nombres $(v_o,\dots,v_d)$ vérifiai $v_{i-1}^2 \geq v_i\, v_{i-2}$ était la suite des volumes mixtes d'un couple de convexes K_1, K_2 dans $\mathbb{R}^d$.

Dans le cercle d'idées de la théorie de Hodge, parce que reposant sur le théorème d'existence de Riemann, on a aussi le résultat suivant : soient X une surface projective, H un diviseur ample sur X et D un diviseur (de Cartier) sur X. Si $D.H > 0$ et $D^2 > 0$, pour ν assez grand $\dim |\nu D| > \varepsilon\nu^2$ avec $\varepsilon>0$. A l'aide des points 2) et 5) du dictionnaire ce résultat se traduit dans la théorie des convexes compacts de $\mathbb{R}^2$ comme ceci (cf [26]) : soit

$$r(K_2 ; K_1) = \mathrm{Sup}\{r / r.K_1 \subseteq K_2 \quad \text{à translation près}\}$$

Alors on a l'inégalité

$$r(K_2;K_1) \geq \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - v_o v_2}}{v_2} \qquad (\text{où } v_o = \mathrm{Vol}\, K_2 \text{ , } v_2 = \mathrm{Vol}\, K_1$$

et v_1 est le volume mixte nouveau de K_1 et K_2).

En particulier le rayon r du plus grand disque inscriptible dans un convexe de surface S et de périmètre L dans $\mathbb{R}^2$ vérifie $r \geq \frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}$.

Ces résultats étaient déjà connus, démontrés bien sûr par des méthodes différentes (cf [28]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.D. ALEKSANDROV - On the theory of mixed volumes, 4 articles dans Mat.Sborn tomes 44 (p. 947-972 et 1205 - 1238) et 45 (p. 27 - 46 et 227 - 251) en 1937 Traduit par J. Firey, Dept. of Math, Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331.

[2] L.J. BILLERA et C.W. LEE - Suffciency of Mc Mullen's condition for f-vectors of simplicial polytopes. Bulletin A.M.S. Vol. 2, n° 1 (1980) 181-185.

[3] G. CLEMENTS et B. LINDSTRÖM - A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay. Journ. Combinatorial Theory, 7 (1969) 230-238.

[4] V.I. DANILOV - The geometry of toric varieties. Russian Math Surveys 33, 2 (1978) 97-154. Traduit de Uspekhi Mat. Nauk 33, 2 (1978) 85-134.

[5] M. DEMAZURE - Sous groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Annales E.N.S. 4 ème série, t. 3 Fasc. 4 (1970).

[6] F. EHLERS - Eine Klasse komplexer Mannig faltig keiten ..., Math. Annalen, 218 (1975) 127-156.

[7] C. GREENE and D.J. KLEITMAN - Proof techniques in the theory of finite sets "M.A.A. Studies in Combinatories" G.C. Rota, editor. Math. Assoc. of America Washington D.C. (1978).

[8] G. GRÜNBAUM - Convex Polytopes, Wiley ed.

[9] M. HOCHSTER - Cohen-Macaulay rings, Combinatorics and simplicial complexes 2nd Oklahoma Ring Theory Conference, 171-223, Dekker 1978 .

[10] M. HOCHSTER - Rings of invariants of tori, Cohen - Macaulay rings generated b monomials, Annals of Math. 96 (1972) 318-337.

[11] A.G. HOVANSKI - Uspeki Mat. Nauk, 34, 4(208), p. 160-161.

[12] M.N. ISHIDA - Torus embeddings and dualizing complexes. Tohôku Math. Journal 2nd series Vol. 32 n° 1 (1980) 111-146.

[13] G. KEMPF et al. - Toroidal embeddings (Chap. 1), Springer Lecture Note 339.

[14] F.S. MACAULAY - Some properties of enumeration in the theory of modular syste Proc. Lond. Math. Soc. 26 (1927) 531-555.

[15] P. Mc MULLEN - The maximum number of faces of a convex polytope. Mathematika 17 (1970) 179-184.

[16] T.S. MOTZKIN - Comonotone curves and Polyhedra Bull. Ann. Math. Soc. 63 (1957) 35.

[17] T. ODA - Torus embeddings and applications, Tata Institute, Bombay 1978.

[18] P. SHENZEL - On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius. Preprint, Martin-Luther Universität, Halle Wittenberg (R.D.R.) 198

[19] G.C. SHEPARD - Inequalities between mixed volumes Mathematika 7 (1960) 125 - 138.

[20] R. STANLEY - The number of faces of a simplicial convex polytope. Preprint, M.I.T. (1979).

[21] R. STANLEY - The Hilbert function of a graded algebra, Advanced in Math., 28 n°1, (1978) 57-83.

[22] R. STANLEY - The upper bound conjecture and Cohen Macaulay rings, Studies in Applied Math. 54 (1975) 135-142.

[23] R. STANLEY - Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property. S.I.A.M. Journal (1980).

[24] J.H.M. STEENBRINK - Mixed Hodge structure on vanishing cohomology, Real and complex singularities, Oslo 1976, Noordhoff 1977.

[25] B. TEISSIER - Du Théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques. C.R.A.S. Paris, tome 288 (29 Janvier 1979) 287-289.

[26] B. TEISSIER - Bonnesen type inequalities in algebraic geometry. Preprint, Harvard University et Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1979).

[27] B. TEISSIER - Jacobian polyhedra and equisingularity. Proceedings Conf. on singularities, R.I.M.S. Kyoto, April 1978. Publ. R.I.M.S. 1978.

[28] L.A. SANTALO - Integral geometry and geometric probability, Encyclopedia of of mathematics and its applications, Addison-Wesley 1976.

Bernard TEISSIER

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Séminaire BOURBAKI
33e année, 1980/81, n° 566

Novembre 198

ALGÈBRES DE LIE, SYSTÈMES HAMILTONIENS, COURBES ALGÉBRIQUES
[d'après M. Adler et P. van Moerbeke]

par Jean-Louis VERDIER

Des physiciens [3] [8] et des mathématiciens [5] [6] [9] ont étudié ces d nières années, des systèmes mécaniques associés aux algèbres de Lie semi-simples. I s'agit de systèmes de points pesants situés sur une droite et soumis à des potentie très particuliers. En utilisant systématiquement certaines algèbres de Lie de dimen- sion infinie, Adler et van Moerbeke proposent [2] une autre approche de ces systèm leur permettant d'utiliser à la fois les techniques d'algèbres de Lie et la descrip- tion des flots hamiltoniens à l'aide des jacobiennes de courbes algébriques introdu tes dans [4]. Ces techniques leur permettent de traiter aussi certains problèmes classiques tels que le problème de Von Neumann, le problème du flot géodésique sur un ellipsoïde et le problème des mouvements de la toupie dans le cas d'Euler-Poinsot ou de Lagrange. Rappelons que c'est, dans un autre contexte, en utilisant une algèb de Lie de dimension infinie qu'Adler propose [1] une interprétation des fonctionnell intervenant dans l'étude de l'équation de Korteweg - De Vries.

A titre d'introduction à ces travaux et d'illustration, nous allons montrer comment ces considérations s'appliquent au cas classique et relativement facile des mouvements de la toupie. Nous renvoyons aux mémoires cités pour les études complètes et systématiques.

1. Les équations d'Euler

Soit S un solide, mobile autour d'un point fixe O, de centre de gravité G de masse totale μ, placé dans un champ de pesanteur de vecteur unitaire γ et d'intensité $-g$. Notons I la matrice d'inertie de S : c'est un automorphisme symé trique positif séparant de l'espace mobile V attaché au solide. Posons $\ell = \mu g.\overrightarrow{OG}$ C'est un vecteur fixe de l'espace mobile V. Le vecteur ℓ et l'automorphisme I sont les données permettant d'écrire les équations du mouvement de S.

Pour écrire ces équations, introduisons le vecteur rotation instantanée Ω de S et le moment cinétique M et considérons Ω et M comme des vecteurs variables de l'espace mobile V. On a

1.1 $$M = I(\Omega)$$