Tendances

Bernard Teissier
D.M.I., Ecole normale Supérieurs
(Exposé fait à Luminy au colloque sur l'enseignement de DEUG en Décembre 1989)

La mathématisation est peut-être bien une activité créatrice de l'homme dont les décisions historiques défient une rationalisation complète.

Hermann Weyl

C'est un défi redoutable de chercher à discerner les courants de la pensée mathématique contemporaine, et plus encore leur influence sur l'enseignement des Mathématiques dans les premières années d'Université. Je vais résumer mon propos en disant qu'à mon avis nous sommes depuis quelques années dans une période de liberté retrouvée (ou plutôt chèrement gagnée) vis-à-vis du formalisme et que nous assistons, après une période de formalisation et de création de langage très active, à un retour très net et créateur de la géométrie, et enfin qu'il faut réhabiliter l'usage de l'intuition, en particulier géométrique ; les dangers de cet usage me paraissent faibles en regard des catastrophes qu'entraîne son éviction de l'enseignement.

Depuis au moins le début du 19ème siècle, les Mathématiques présentent une très grande diversité ; à cette époque, la géométrie des surfaces, l'étude des fonctions elliptiques, la géométrie projective, la théorie des nombres et la théorie des équations algébriques coexistaient avec le calcul des variations et des mathématiques que nous appellerions aujourd'hui appliquées. Peu après, naissaient les grandes idées de la géométrisation de l'espace, de la théorie des fonctions, de l'optique et de la mécanique liées aux noms de Grassmann, Riemann et Hamilton. Je ne veux pas continuer cette énumération superficielle, mais insister sur le choc qu'a représenté la découverte des géométries non euclidiennes. L'enracinement des Mathématiques dans la réalité a été soudain fragilisé et, bien que cela n'ait pas empêché les mathématiciens de travailler, ce choc a sans doute été un facteur décisif pour la création de la méthode axiomatique au tournant du siècle. Il me semble que nous sortons seulement maintenant des dernières turbulences idéologiques dues aux triomphes que la méthode axiomatique a connus.
On peut raconter la naissance de la méthode axiomatique comme ceci : les mathématiciens ayant décidé que l'enracinement des mathématiques dans la réalité était trop fragile ont décidé de couper ces racines molles et de les remplacer par une dalle de béton. Cela a permis la création de théories unificatrices magnifiques et changé la nature et la signification des Mathématiques.
Le prix à payer fut pour les Mathématiques un relatif isolement de la Physique et des autres sciences, et le fait que ces triomphes de la recherche, dont la série est sans doute loin s'être terminée, ont par leur succès même engendré une *idéologie formaliste* chez beaucoup de non-chercheurs, ce qui a eu des retombées fort discutables sur l'enseignement.
La situation déplorable que je décris ci-dessous a heureusement connu des exceptions, mais disons que c'est ce vers quoi l'idéologie poussait un enseignant inerte.
Les mathématiques ont été souvent présentées comme un ensemble de règles de construction éloignées de toute intuition du réel, l'étude de la géométrie et même le recours aux images pour représenter (et donc mieux comprendre) les concepts de l'analyse et de l'algèbre ont été bannis.
La signification intuitive des concepts enseignés, leur émergence et leur développement historique, étaient au mieux considérés comme secondaires. L'enseignement de la Physique s'est approprié une grande partie de ce qui faisait l'intérêt des mathématiques, leur rôle modélisateur et unificateur. On est arrivé à la situation où le mathématicien enseignait dans ses cours la résolution de l'équation des ondes ou de celle de l'oscillateur harmonique sans mentionner leur origine physique. Comment s'étonner si les étudiants les plus vifs se détournaient de ces études et si les autres en res-sortaient prêts à enseigner aux enfants des absurdités ? Seuls quelques étudiants très motivés et doués finissaient par apercevoir la signification si bien cachée de ce qu'on leur avait enseigné.
Heureusement, cette idéologie formaliste me semble aujourd'hui s'affaiblir, et pour longtemps. Dans le même

temps, les grandes entreprises de création de langage mathématique suscitées pendant la période 1920-1970 par la liberté que donne la méthode axiomatique (par exemple en analyse fonctionnelle, en géométrie différentielle, en géométrie algébrique, en topologie algébrique) paraissent un peu moins actives mais cette création de langage, elle, est un acquis permanent des Mathématiques, qui ressurgira sans doute avec force après une période de consolidation pour fournir de nouveaux outils.

Nous entrons donc à mon avis dans une période de liberté plus grande, où (en simplifiant beaucoup !) la collectivité des chercheurs a plus le temps de regarder autour d'elle, de découvrir des connections soit internes aux Mathématiques, soit avec des domaines extérieurs comme la Physique ou l'Informatique, où des domaines considérés comme marginaux à l'époque idéologique deviennent respectables (combinatoire, géométrie algébrique réelle, algèbre et géométrie effectives..), où de nouveaux domaines peuvent plus facilement naître.

Une autre tendance est un retour de la géométrie, par exemple dans les actes des derniers congrès inter-nationaux, la place la plus éminente est tenue par des exposés de nature géométrique ; on étudie par des méthodes géométriques la théorie des groupes (Gromov) et bien sûr celle des groupes de Lie, les espaces de Banach (Bourgain, Milman, Pisier) et bien d'autres sujets d'algèbre, d'analyse et de physique, sans parler bien sûr de la géométrie arithmétique, de la géométrie algébrique, de la géométrie hyperbolique, de la géométrie symplectique, toutes en développement rapide. J'arrête cette énumération, mais, si l'on écrivait une version contemporaine du classique *"Les grands courants de la pensée mathématique"*, la géométrie y aurait une place très importante, ce qui est loin d'être le cas dans l'original.

Les conséquences pour l'enseignement sont d'abord, à mon avis, qu'il faut profiter de cette période favorable pour rendre aux mathématiques que l'on enseigne leurs racines, historiques ou physiques. Cela permettra semble-t-il aux étudiants de percevoir bien plus facilement une partie au moins de la signification de ce qu'ils apprennent. Beaucoup d'efforts ont déjà été faits, par les IREM en particulier, en histoire des maths, mais il me semble souhaitable de mettre à la disposition des enseignements des "vignettes" d'histoire des maths, facilement utilisables par eux et munies de bibliograpies permettant de creuser le sujet.

On pourrait aussi envisager de traduire les "*Source Books*" de Harvard, qui contiennent la traduction anglaise de textes fondamentaux dans de nombreux domaines. Je trouve aussi exemplaire le livre *"Graph theory"* de Biggs et Lloyd. Je propose aussi que les mathématiciens s'astreignent à enseigner chaque fois que l'occasion s'en présente les rudiments de la Physique qui a donné naissance, ou qui donne sens aux objets mathématiques qu'ils présentent. De l'addition des forces pour les vecteurs aux calculs de volumes, de masses, de charges, etc... pour les intégrales et j'ai déjà mentionné les équations aux dérivées partielles de la Physique.

Les exemples foisonnent ; j'ai appris fort tard que toute équation différentielle à coefficients constants stable (partie réelle des valeurs propres du polynome caractéristique négative) pouvait être représentée par un circuit de selfs, résistances et condensateurs, et je ne l'ai bien sûr pas appris dans un livre de maths.

Il est vrai que l'extraordinaire machine à fabriquer des analogies et pousser des calculs que fournissent les mathématiques doit ces pouvoirs à sa capacité de faire abstraction du sens concret, mais à mon avis, l'en-seignement de premier cycle n'est vraiment pas le lieu idéal pour démontrer cette capacité.

Enfin, il me paraît très important de réconcilier le formalisme mathématique avec l'intuition, autant que possible. Pour commencer, il faut rappeler que l'immense majorité des découvreurs utilisent l'intuition géométrique (il y a quelques exceptions comme Euler ou Ramanujan, qui avaient une "intuition des formules"). Cela va de soi pour les géomètres, mais c'est aussi vrai par exemple pour les analystes qui voient une fonction comme graphe. Il me paraît important d'en-seigner aux futurs enseignants, d'une part une vision géométrique de l'espace et quelques idées de ses innombrables applications et d'autre part que, s'il est un peu dangereux de se laisser guider par l'intuition, le calcul est un excellent garde-fou, et que sans intuition, le calcul est aveugle !

En ce qui concerne l'idéologie, je propose que nous essayions d'en faire l'économie pour le moment ; je suis en effet inquiet de voir se dessiner depuis quelques années une idéologie à l'extrême opposé de la précédente, mais qui pourrait avoir sur l'enseignement des effets encore plus pernicieux que ceux du formalisme. Cette idéologie glorifie uniquement les interactions des Mathématiques avec les autres sciences en oubliant, ou feignant d'oublier que ce n'en est que la frontière topologique et que , si intéressantes et fécondes que soient ces interactions, les mathématiques elles-mêmes sont d'intérieur vraiment non vide !

Petite métaphore finale :

En fait, il me semble que les non-mathématiciens voient souvent la position des Mathématiques parmi les sciences comme une sorte de *fractal* d'intérieur vide qui se faufile partout parce qu'il est tout éparpillé, alors que les mathématiciens voient les maths comme un ensemhle certes non nécessairement contractile, mais en tous cas bien connexe et localement trivial !