Sur le manuscrit *Ensembles et morphismes stratifiés*

Bernard Teissier et David Trotman

21 septembre 2021

1 Présentation

Cet article est, avec ceux de Whitney ([Whi1], [Whi2]) et celui de Mather ([Ma2]), un des textes fondateurs de la théorie des stratifications et de ses applications à l'étude des propriétés des applications différentiables ou analytiques "génériques". Il est la mise en forme et la généralisation d'idées déjà présentes dans deux articles de 1962 et 1964. Il est intéressant de noter qu'il se place d'emblée dans un cadre très général en expliquant comment représenter n'importe quel morphisme $f\colon X \to Y$ d'espaces topologiques comme une rétraction sur un bord d'un espace auxiliaire $M(f)$ dépendant fonctoriellement de f. Cet espace apparaîtra par la suite comme un ensemble stratifié à deux strates. Ensuite Thom explique comment généraliser le théorème de fibration d'Ehresmann aux morphismes différentiables non nécessairement propres au moyen de "fonctions de contrôle" et introduit la notion de "surmersion (ou submersion) contrôlée". Ce n'est qu'ensuite, dans le C de la section 1, que Thom développe la théorie générale des ensembles stratifiés et de leurs morphismes, introduit la notion capitale de morphisme sans éclatement (qui deviendra la condition a_f), et démontre les théorèmes d'isotopie par la construction de champs de vecteurs contrôlés. La démonstration, très ingénieuse mais très technique, sera simplifiée par Mather ([Ma2]). Jusqu'ici, un ensemble stratifié est une réunion de variétés différentiables satisfaisant des conditions d'incidence exprimées en termes de submersions contrôlées. C'est dans la seconde section, intitulée "Théorie euclidienne" qu'est fait le raccord avec les conditions de Whitney, en montrant (Théorème 2.B.1) qu'une réunion compacte de strates proprement plongées dans $\mathbf{R}^n$ et satisfaisant les conditions de Whitney (une telle réunion est appelée par Thom W-objet), est un ensemble stratifié au sens de la section 1. Ici les conditions sur les voisinages tubulaires des strates permettant de construire un analogue pour un sous ensemble stratifié d'un voisinage tubulaire apparaissent et ils joueront un rôle encore plus important chez Mather. Un théorème de transversalité (Théorème 2.D.1) et des résultats sur les stratifications sans éclatements de certains morphismes entre W-objets apparaissent ici. La troisième section a pour but de montrer que non seulement les ensembles semi-analytiques de Łojasiewicz, mais aussi ceux que Thom nomme ensembles PSA (projections de semi-analytiques compacts, aujourd'hui nommés sous-analytiques) peuvent être munis de structures de W-objets, et d'étudier quand des morphismes entre eux peuvent être, au prix d'un raffinement, des morphismes stratifiés. La quatrième section donne des indications sur l'utilisation de la théorie des ensembles et morphismes stratifiés dans l'étude locale des applications différentiables, notamment dans la construction d'une stratification canonique de l'espace des jets $J(n,p)$ en vue de démontrer la conjecture selon laquelle le sous-espace des applications topologiquement stables soit dense dans l'espace d'applications propres entre deux variétés différentiables. Ces idées seront ensuite dévelopées et clarifiées par Mather ([Ma1] et [Ma3]) et par Looijenga [Lo], qui ont démontré la conjecture de Thom, puis simplifiées par du Plessis [D].

2 Commentaires

1. Une nouvelle démonstration du Théorème 1.D.1 a été donnée par Johnson dans [J].
2. On trouve page 270 l'affirmation que la condition (t) imposée sur les strates d'une stratification implique l'ouverture de l'espace des applications transverses aux strates de la stratification. Ceci est vrai pour des stratifications semi-algébriques (ou sous-analytiques) mais est faux en général (voir [Tr1], [Tr2]).
3. Les ensembles PSA du Chapitre 3 sont en fait les ensembles sous-analytiques dont la théorie, pressentie par Thom et Łojasiewicz, a été faite ensuite par Gabrielov dans [G] par la méthode des projections et Hironaka dans [H] par des méthodes issues de la résolution des singularités.
4. La démonstration des théorèmes d'isotopie sera reprise et simplifiée par Mather dans [Ma1] et [Ma2].
5. Utilisant une condition de régularité un peu plus forte que les conditions de Whitney dans le cas des stratifications sous-analytiques, mais équivalente en analytique complexe [Te], Verdier a démontré directement le premier théorème d'isotopie analogue [V].
6. En ce qui concerne le premier théorème d'isotopie dans le cas analytique complexe, on peut souligner qu'il est une version affaiblie du théorème de fibration conjecturé par Whitney dans [Whi2]. Ce théorème a été démontré parmi d'autres résultats d'équisingularité dans [P-P].
7. Une conséquence du premier théorème d'isotopie est la trivialité topologique locale d'un espace analytique complexe le long d'une strate d'une stratification de Whitney. Il est connu (voir [B-S]) que la réciproque est fausse. La théorie des variétés polaires locales a permis de démontrer dans [L-T] que les conditions de Whitney pour une strate S d'un espace analytique complexe $X \subset \mathbf{C}^n$ le long d'une strate $T \subset \overline{S}$ équivalent à la trivialité topologique locale le long de T de $\overline{S}$ et de toutes ses sections (localement) par des sous-espaces non singuliers contenant T et "assez généraux". Par ailleurs la même théorie a permis de prouver dans

[Te] l'existence d'une stratification de Whitney d'un espace analytique complexe qui est minimale en ce sens que toutes les stratifications de Whitney de cet espace en sont des raffinements. Il est montré dans [G-T] que le degré de la variété duale d'une variété projective peut être calculé à partir de la topologie de cette stratification et de ses sections linéaires génériques.

8. Page 263, dans la définition des conditions (B) et (B') il faut remplacer $y'y$ par $y'x$.
9. Page 284 on trouve la conjecture selon laquelle "Un jet non déterminant admet toujours une infinité de réalisations ayant des types topologiques différents". Un contre-exemple a été donné par S. Koike et W. Kucharz dans [K-K] puis une explication a été fournie par T-C. Kuo et Y-C. Lu dans [K-L] en utilisant la théorie des stratifications.
10. Les applications de la théorie des stratifications à l'étude de la stabilité des applications différentiables suivaient la maxime de Thom : *Toute instabilité topologique est due à un manque de transversalité* (sous-entendu : à un ensemble stratifié), et cela a donné naissance au concept de *stratification canonique de l'espace des jets* avec l'idée que le manque de généricité ou de stabilité d'une application était due à la non-transversalité de son jet à cette stratification, et que le Théorème de transversalité assurait la généricité des applications stables. Les choses se sont avérées plus compliquées comme l'ont montré les travaux de Mather ([Ma1], [Ma3]). Un exposé complet de cette idée, des difficultés qu'elle a rencontrées et de ses prolongements se trouve dans l'ouvrage de référence [D-W].

    Au delà de ces applications à la stabilité, la catégorie des ensembles et morphismes stratifiés était pour Thom la géométrie *modérée* que les géomètres souhaitent. Le développement ultérieur lui a amplement donné raison en montrant que des outils essentiels pour l'étude de la géométrie des variétés pouvaient être étendus aux ensembles et morphismes stratifiés. Par exemple, les ensembles stratifiés sont triangulables (voir [Go], et [Sh] pour la triangulation des morphismes stratifiés sans éclatement), et on peut développer pour eux une théorie des intersections (voir [Go2]) et une théorie des fonctions de Morse (voir [G-M]), surtout effective pour les espaces analytiques complexes stratifiés. Dans le même cadre analytique complexe, Marie-Hélène Schwartz a développé une théorie des classes caractéristiques pour les espaces analytiques complexes singuliers basée sur l'indice des champs de vecteurs radiaux associés à une stratification de Whitney. Une théorie équivalente (voir [B-Sc]) a été développée par R. MacPherson dans [M] d'un point de vue différent. Enfin, la première construction de l'homologie d'intersection, théorie (co)homologique de l'intersection pour une variété singulière qui satisfait la dualité de Poincaré, utilisait un analogue dans le monde PL des stratifications de Whitney (voir [G-M2]).

    Dans un autre domaine, depuis les travaux fondateurs de Kashiwara sur les espaces de solutions de certains systèmes différentiels linéaires (voir

[K1], [K2]), la théorie des stratifications de Whitney joue un rôle très important dans la théorie des $\mathcal{D}$-modules et des faisceaux constructibles. Une présentation assez récente de cette dernière théorie et de ses rapports avec les stratifications se trouve dans le livre [S], qui commence par une généralisation aux faisceaux constructibles du théorème de Sebastiani-Thom (voir la référence **[69]** dans ce volume).

Références

[B-S] J. Briançon et J-P. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér A-B **280** (1975), No. 6, A365-A367.

[B-Sc] J-P. Brasselet et M-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, in : *The Euler-Poincaré characteristic* Astérisque 82-83, Soc. Math. France, Paris, (1981) 93-147.

[D] A. A. du Plessis, *Finiteness of Mather's Canonical Stratification*, in *Singularity Theory, Liverpool 1996 (edited by Bill Bruce and David Mond)*, London Mathematical Society Lecture Note Series **263** (1999), 199-206.

[D-W] A. du Plessis and T. Wall, The geometry of topological stability. *London Mathematical Society Monographs. New Series, 9*, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[G] A. M. Gabrielov, *Projections of semianalytic sets*, Funkcional. Anal. i Prilozen. **2**, no. 4 (1968) 18-30.

[Go] M. Goresky, *Triangulation of stratified objects*, Proc. A.M.S., Vol. 72, no. 1 (1978) 193-200.

[Go2] M. Goresky, *Whitney stratified chains and cochains*, Trans. A.M.S., Vol. 267, no. 1 (1981) 175-196.

[G-M] M. Goresky and R. MacPherson, Stratified Morse Theory, *Ergebnisse der Math. vol. 14*, Springer Verlag, N. Y. (1988)

[G-M2] M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology 19 (1980), 135-162.

[G-T] A. Giles Flores and B. Teissier, *Local polar varieties in the geometric study of singularities*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. 27, no. 4 (2018), 679-775.

[H] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, in *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki*, Kinokuniya, Tokyo (1973), 453–493.

[J] F. E. A. Johnson, *On the presentation of stratified sets and singular varieties*, Mathematika **29** (1982), 135-170.

[K1] M. Kashiwara, *Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 803-804.

[K2] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations*, Based on lecture notes by Teresa Monteiro Fernandes translated from the French. With an introduction by Jean-Luc Brylinski. Progress in Mathematics, 34. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.

[K-K] S. Koike et W. Kucharz, *Sur les réalisations de jets non suffisants*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A **288**, no. 8 (1979), 457-459.

[K-L] T-C. Kuo and Y-C. Lu, *Sufficiency of jets via stratification theory*, Inventiones Math., **57** (1980), 219-226.

[L-T] D.T. Lê and B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney II*, in *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math., 40, 1983, part 2, 65-103.

[Lo] E. J. N. Looijenga, *Proof of the topological stability theorem*, in *Topological Stability of Smooth Mappings*, Springer Lecture Notes in Math. **552** (1976), 125-149.

[M] R. D. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) 100 (1974), 423-432.

[Ma1] J. N. Mather, *Stratifications and Mappings*, in : *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, 195-232.

[Ma2] J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard 1970. Revised version published in : Bull. A.M.S., Vol. 49, No. 4, Oct. 2012, 475-506. Available at : http ://www.ams.org/journals/bull/2012-49-04/S0273-0979-2012-01383-6/S0273-0979-2012-01383-6.pdf

[Ma3] J. N. Mather, *How to stratify manifolds and jet spaces*, in *Singularités d'Applications Différentiables, Plans-sur-Bex 1975*, Springer Lecture Notes in Math. 535 (1976), 128-176.

[P-P] A. Parusiñski and L. Paunescu, *Arcwise analytic stratification, Whitney fibering conjecture and Zariski equisingularity*, Adv. Math. **309** (2017), 254-305.

[S] J. Schürmann, Topology of Singular spaces and Constructible Sheaves, *Monografie Matematyczne, Vol. 63*, 2003, Birkäuser, ISBN 978-3-0348-8061-9

[Sc] M.-H. Schwartz, Champs radiaux sur une stratification analytique, *Travaux en Cours, 39.* Hermann, Paris, 1991. x+185 pp. ISBN : 2-7056-6160-1

[Sc2] M.-H. Schwartz, Classes de Chern des ensembles analytiques, Avec une préface de Jean-Paul Brasselet, Lê Dũng Tráng et Bernard Teissier. *Actualités Mathématiques.* Hermann, Paris, 2000. 216 pp. ISBN : 2-7056-6393-2.

[Sh] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology **39** (2000), 383-399.s

[Te] B. Teissier, *Variétés Polaires II : Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, in Actes de la conférence de géométrie algébrique à La Rábida 1981, Springer Lecture Notes No. **961**, p. 314-491. Available at : webusers.imj-prg.fr/ bernard.teissier/

[Tr1] D.J.A. Trotman, *A transversality property weaker than Whitney (a)-regularity*, Bull. London Math. Soc., **8**, (1976), 457-459.

[Tr2] D.J.A. Trotman, *Stability of transversality to a stratification implies Whitney (a)-regularity*, Invent. Math., **50** (1979), 273-277.

[V] J.-L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Math. **36** (1976), 295-312.

[Whi1] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Annals of Math., **81**, 3, (1965), 496-549.

[Whi2] H. Whitney, *Local properties of analytic varieties*, in Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 205-244.