[23] Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier, J.L. : Points doubles rationnels et représentations de groupes, C.R. Acad. Sc. Paris t. 293, 111-113 (1981).

[24] Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier, J.L. : Construction géométrique de la correspondance de McKay, Ann. Sci. E.N.S. 16, 409-449 (1983).

[25] Knörrer, H. : Group representations and resolution of rational double points, Proc. of the Canad. Math. Soc. Conf. "Finite simple Groups, coming of Age", June 15-28, Montreal 1982, Ed. J. McKay, AMS, Providence R.I., 1985, 175-222.

[26] Artin, M., Verdier, J.L. : Reflexive modules over rational double points, Math. Ann. 270, 79-82 (1985).

[27] Esnault, H., Knörrer, H. : Reflexive modules over rational double points, Math. Ann. 272, 545-548 (1985).

[28] Kostant, B : On finite subgroups of SU(2), simple Lie algebras and the McKay correspondence, à paraître dans les Comptes Rendus de la "Conférence en l'honneur de E. Cartan", Lyon, Juin 1984, Astérisque.

Monômes, volumes et multiplicités

Bernard Teissier
Centre de mathématiques de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex. Laboratoire associé au CNRS n° 169

Introduction

On peut faire remonter à Newton (cf.[5]) l'utilisation en géométrie algébrique d'objets combinatoires construits au moyen de l'application qui à un monôme $x_1^{a_1}\cdots x_d^{a_d}$ associe le point $(a_1,\ldots,a_d)\in\mathbb{R}^d$. Il semble par contre que l'utilisation de l'application inverse pour transformer des problèmes de géométrie combinatoire en problèmes de géométrie algébrique soit beaucoup plus récente. Je vais montrer ici des exemples de faits combinatoires se traduisant en résultats d'algèbre commutative ou de géométrie algébrique, dans deux cadres "naturels" pour l'établissement du dictionnaire mentionné ci-dessus : d'une part celui des idéaux engendrés par des monômes dans des anneaux de polynômes ou de séries, (cadre local) et d'autre part celui des variétés de Demazure, ou variétés toriques, qui est une globalisation du précédent. On verra que des résultats combinatoires assez simples (resp. élaborés) se traduisent parfois en résultats algébro-géométriques assez élaborés (resp. simples) et en tous cas valides dans des cas beaucoup plus généraux que ceux (idéaux engendrés par des monômes ou variétés de Demazure) qui proviennent de la combinatoire.

1. Idéaux engendrés par des monômes.

Tout d'abord, des rappels de définitions : (cf.[2], [4])

Définition 1. Etant donné un idéal I d'un anneau A, un élément $h \in A$ est dit entier sur I si il satisfait une relation de dépendance intégrale $h^k + a_1 h^{k-1} + \ldots + a_k = 0$, avec $a_i \in I^i$.

Si nous supposons A local nœthérien, essentiellement de type fini sur un corps, et que I contient un élément non diviseur de zéro dans A, cette condition équivaut à la suivante :

Pour tout homomorphisme local $A \xrightarrow{\varphi} V$ de A dans un anneau de valuation V, on a : $v(h) \geq v(I)$, ou $v(h) = v(\varphi(h))$, v désignant la valuation de V, et $v(I) = \inf_{g \in I} v(\varphi(g))$. Si A est une algèbre analytique, il suffit de regarder les $\mathbb{C}$-homomorphisme $A \to \mathbb{C}\{t\}$.

On vérifie que l'ensemble des éléments de A entiers sur I est un idéal de A, noté $\overline{I}$.

Définition 2. Soient A un anneau local nœthérien comme ci-dessus et $\mathfrak{n}$ un idéal de A contenant une puissance de l'idéal maximal. Alors pour ν assez grand, l'application $\nu \to \ell g_A A/\mathfrak{n}^\nu$ prend les mêmes valeurs qu'un polynôme à coefficients rationnels, de degré d=dimA, dont le terme de plus haut degré peut s'écrire $\frac{e(\mathfrak{n})}{d!} \nu^d$, où $e(\mathfrak{n})$ est un entier appelé multiplicité de l'idéal $\mathfrak{n}$.

Considérons le cas particulier d'un idéal de $\mathbb{C}\{Z_1,\dots Z_d\}$ engendré par des monômes. Posant $A = \mathbb{C}\{Z_1,\dots,Z_d\}$, un $\mathbb{C}$-homomorphisme $A \to \mathbb{C}\{t\}$ est décrit par les images $Z_i(t) \in \mathbb{C}\{t\}$ des Z_i. Soit $v_i = v(Z_i(t))$ l'ordre ou t de $Z_i(t)$. Soient $m_1 = Z_1^{a_1^1} \dots Z_d^{a_d^1}, \dots, m_k = Z_1^{a_1^k} \dots Z_d^{a_d^k}$ les monômes engendrant l'idéal I. Pour qu'un élément h soit entier sur I, il faut et il suffit que pour chaque homomorphisme $\varphi : A \to \mathbb{C}\{t\}$, on ait

$$v(h(Z_1(t),\dots,Z_d(t)) \geq \min(a_1^1 v_1 + \dots + a_d^1 v_d, \dots, a_1^k v_1 + \dots + a_d^k v_d)$$

ce qui implique que toute forme linéaire à coefficients positifs $(v_1,\dots,v_d)$ prend sur les exposants des monômes de h une valeur au moins égale au minimum de celles qu'elle prend sur les exposants des monômes

engendrant I (les annulations possibles par sommes de monômes de h peuvent être évitées par un choix adéquat des coefficients des $Z_i(t)$).

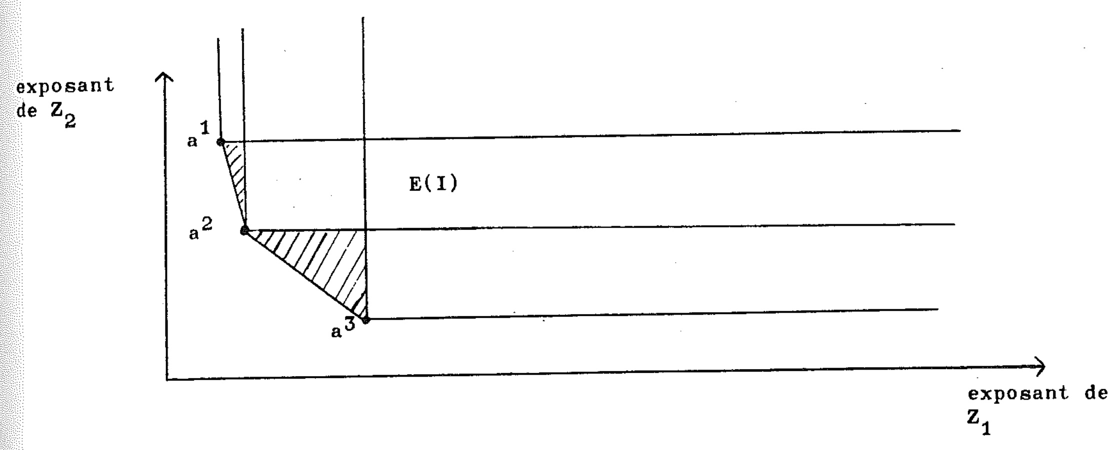
Par conséquent si $h \in \overline{I}$, tous les monômes apparaissant dans h sont représentés dans $\mathbb{R}^d$ par des points situés dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $E(I) = \bigcup_{i=1}^{k} (a^i + \mathbb{R}_+^d)$ où $a^i = (a_1^i,\dots,a_d^i)$ et $\mathbb{R}_+^d$ désigne le quadrant positif de $\mathbb{R}^d$.

Inversement, si le point $(b_1,\dots,b_d)$ représentant un monôme $Z_1^{b_1} \dots Z_d^{b_d}$ se trouve dans cette enveloppe convexe, il est clair que $Z_1^{b_1} \dots Z_d^{b_d} \in \overline{I}$. (exercice : écrire explicitement la relation de dépendance intégrale).

Par conséquent

> L'idéal $\overline{I}$ est engendré par les monômes dont les points représentatifs sont situés dans l'enveloppe convexe N(I) de l'ensemble $E(I) = \bigcup_{i=1}^{k} (a^i + \mathbb{R}_+^d)$ des points représentants les monômes de I.

Exemple : d = 2, k = 3



les points entiers de la partie hachurée qui sont hors des traits verticaux représentent la "différence" entre I et $\overline{I}$, c'est à dire les monômes contenus dans $\overline{I} - I$.

D'autre part, un calcul élémentaire montre que :

Si un point b est dans l'enveloppe convexe N(I) de E(I) alors le point d.b est dans E(I), et plus généralement, étant donnés d points $b_1, \dots, b_d$ dans N(I), le point $b_1 + \dots + b_d$ appartient à E(I).

Ceci équivaut, en effet, à dire que l'enveloppe convexe est obtenue comme ensemble des barycentres.

Si l'on observe que $E(I.J) = E(I) + E(J)$, la traduction de ceci en algèbre est, d'après ce que nous avons vu, l'inclusion d'idéaux

$$\overline{I}^d \subseteq I.$$

Il se trouve que cette inclusion est vraie pour <u>tous</u> les idéaux dans un anneau de séries convergentes (et probablement aussi dans certains autres anneaux locaux, appelés pseudo-rationnels, cf.[4]). Ce résultat a été démontré pour la première fois par Briançon et Skoda (cf. [1]).

<u>Théorème</u> (Briançon - Skoda) : Soit I un idéal de $\mathbb{C}\{Z_1, \dots Z_d\}$ engendré par les fonctions $g_1, \dots, g_k$; soit $q = \inf(k,d)$, alors $(\overline{I})^q \subseteq I$.

La démonstration dans le cas général est loin d'être aussi simple que dans le cas des idéaux engendrés par des monômes.

Passons maintenant aux multiplicités.

Tout d'abord, une remarque : Si I est un idéal de $\mathbb{C}\{Z_1, \dots, Z_d\}$ engendré par des monômes $a^1, \dots a^k$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1) L'idéal I contient une puissance de l'idéal maximal.

2) Le complémentaire de $E(I) = \bigcup_{i=1}^{k} (a^i + \mathbb{R}^d_+)$ dans $\mathbb{R}^d_+$ est de volume fini V(I).

3) L'espace vectoriel $\mathbb{C}\{Z_1, \dots Z_d\}/_I$ est de dimension finie, égale au nombre de points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^d_+ - E(I)$.

Par conséquent, la multiplicité de l'idéal I peut se calculer à l'aide de la suite des nombres de points à coordonnées entières de $\mathbb{R}^d_+ - E(I^\nu)$, c'est à dire des nombres de points à coordonnées $\frac{1}{\nu}$ - entières de $\mathbb{R}^d_+ - \frac{1}{\nu}.\ E(I^\nu)$. La remarque faite plus haut sur l'enveloppe convexe implique

$$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{\nu} \cdot E(I^\nu) = N(I)$$

et l'on en déduit facilement

$$\boxed{e(I) = d!\ \mathrm{Vol}(N(I))}$$

où Vol (N(I)) désigne par convention le volume de $\mathbb{R}^d_+ - N(I)$.

On en déduit aussitôt que pour deux idéaux engendrés par des monômes, $\overline{I}_1 = \overline{I}_2 \Rightarrow e(I_1) = e(I_2)$. Réciproquement, soient I_1 et I_2 deux idéaux engendrés par des monômes dans $\mathbb{C}\{Z_1, \dots, Z_d\}$, supposons que l'on ait l'inclusion $I_1 \subseteq I_2$, et l'égalité $e(I_1) = e(I_2)$. Alors $\overline{I}_1 = \overline{I}_2$.

En effet, $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow N(I_1) \subseteq N(I_2)$, et l'égalité des multiplicités impliquant $\mathrm{Vol}(N(I_1)) = \mathrm{Vol}(N(I_2))$, on en déduit $N(I_1) = N(I_2)$, c'est à dire $\overline{I}_1 = \overline{I}_2$.

Ce résultat est vrai beaucoup plus généralement pour des idéaux quelconques dans des anneaux locaux satisfaisant une condition d'équidimensionalité : c'est le théorème de Rees. (cf.[6])

Théorème (Rees) : Soit $\mathcal{O}$ un anneau local formellement équidimensionel, et soient I_1 et I_2 deux idéaux primaires de $\mathcal{O}$, si $\overline{I}_1 = \overline{I}_2$, alors $e(I_1) = e(I_2)$ et inversement, si $I_1 \subseteq I_2$, et $e(I_1) = e(I_2)$, on a $\overline{I}_1 = \overline{I}_2$.
Là aussi, la démonstration dans le cas général est nettement plus substantielle.
Abordons maintenant des résultats combinatoires moins élémentaires que le fait que $N(I) + \ldots + N(I) \subset E(I)$ (somme d-uple) ou que $N(I_1) \subseteq N(I_2)$ et $\mathrm{Vol}(N(I_1)) = \mathrm{Vol}(N(I_2)) \Rightarrow N(I_1) = N(I_2)$.

Soient I_1 et I_2 deux idéaux engendrés par des monômes et tels que $\mathrm{Vol}(N(I_1))$ et $\mathrm{Vol}(N(I_2))$ soient finis.
Alors pour $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$, on peut montrer que $\mathrm{Vol}(\nu_1.N(I_1) + \nu_2 N(I_2))$ est un polynôme homogène en ν_1, ν_2 de degré d, que l'on choisit d'écrire

$$\mathrm{Vol}(\nu_1.N(I_1) + \nu_2.N(I_2)) = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} w_i \nu_1^i \nu_2^{d-i}$$

En fait c'est là aussi un résultat général : étant donnés deux idéaux primaires I_1 et I_2 dans un anneau local nœthérien $\mathcal{O}$, on a une expression polynomiale pour la multiplicité de $I_1^{\nu_1}.I_2^{\nu_2}$ $(\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N})$

$$e(I_1^{\nu_1}.I_2^{\nu_2}) = \sum_{i=o}^{d} \binom{d}{i} e_i \nu_1^i \nu_2^{d-i}$$

(remarquer que $\nu_1.N(I_1) + \nu_2.N(I_2) = N(I_1^{\nu_1}.I_2^{\nu_2})$ pour $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$).
Si donc I_1 et I_2 sont engendrés par des monômes dans $\mathbb{C}\{Z_1,\ldots Z_d\}$, on a aussitôt :

$$e_i = d!\, w_i$$

Les e_i (resp. w_i) sont appelés multiplicités mixtes de I_1 et I_2 (resp. covolumes mixtes de $N(I_1)$ et $N(I_2)$) et sont des nombres positifs.

Dans [7], [9], [10], on trouve la démonstration du

Théorème : Soient I_1 et I_2 deux idéaux primaires dans un anneau local nœthérien $\mathcal{O}$ formellement équidimensional, à corps résiduel infini. On a les inégalités (où $d = \dim \mathcal{O}$) :

i) $e_{i-1}^2 \leq e_i . e_{i-2}$ $(2 \leq i \leq d)$

ii) $e(I_1.I_2)^{1/d} \leq e(I_1)^{1/d} + e(I_2)^{1/d}$

De plus, il y a égalité dans ii) si et seulement si

$$\frac{e_d}{e_{d-1}} = \frac{e_{d-1}}{e_{d-2}} = \ldots = \frac{e_1}{e_o}$$

et si $\mathcal{O}$ est normal, ces égalités impliquent l'égalité de fermetures intégrales dans $\mathcal{O}$:

$$\overline{I_1^a} = \overline{I_2^b}$$

où $\frac{b}{a}$ est la valeur commune des quotients $\frac{e_i}{e_{i-1}}$.

Corollaire 1 : Supposant $\mathcal{O}$ normal, on a l'égalité $\overline{I}_1 = \overline{I}_2$ si et seulement si $e_o = e_1 = \ldots = e_d$. (comparer avec le théorème de Rees)

Corollaire 2 : On a entre les covolumes mixtes de $N(I_1)$ et $N(I_2)$ les inégalités

$$w_{i-1}^2 \leq w_i . w_{i-2}, \quad (2 \leq i \leq d),$$

$$\mathrm{Vol}(N(I_1) + N(I_2))^{1/d} \leq \mathrm{Vol}(N(I_1))^{1/d} + \mathrm{Vol}(N(I_2))^{1/d}$$

avec égalité si et seulement si : $a.N(I_1) = b.N(I_2)$.

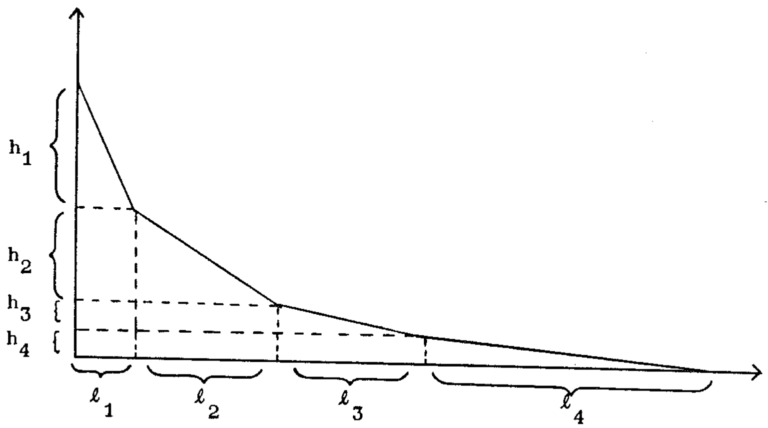
Ce dernier résultat n'est pas simple à démontrer combinatoirement, quand $d \geq 3$, et est de même nature que les inégalités isopérimétriques. Regardons ce que cela donne dans le cas où $d = 2$ et où $N(I_2)$ est le simplexe standard c'est à dire $I_2 = m$. Posons

$$N_1 = N(I_1),\quad N_2 = N(I_2),\quad \mathrm{Vol}(\nu_1 N_1 + \nu_2 N_2) = \mathrm{Vol}(N_1)\nu_1^2 + 2w_1\nu_1\nu_2 + \mathrm{Vol}(N_2)\nu_2^2$$

et l'on peut montrer assez facilement (cf. [11]) que

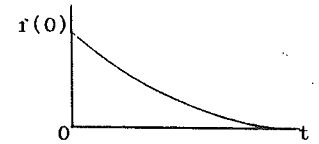
$$2w_1 = \sum_i \min(\ell_i, h_i)$$

où N_1 est présenté comme ceci :



L'inégalité obtenue est donc l'inégalité suivante, facile à vérifier directement : $(\sum_i \min(\ell_i, h_i))^2 \leq 2.\ \mathrm{Vol}(N_1)$, avec égalité si et seulement si N_1 est homothétique au simplexe standard et si l'on veut, en passant à la limite l'on obtient l'inégalité suivante disons pour une fonction C^2, $f(x)$, $x \in [0,t]$ telle que $f(0) > 0$, $f(t) = 0$, $f'(x) < 0$ et $f''(x) > 0$ $\forall\, x \in [0,t]$:

$$\left(\int_0^t \inf(1, -f'(x))dx\right)^2 \leq 2.\int_0^t f(x)dx$$



Nous allons voir cependant que ces inégalités sont un avatar "local" d'inégalités classiques : les inégalités isopérimétriques. Pour cela, il faut d'abord s'apercevoir que les résultats sur les idéaux engendrés par des monômes peuvent aussi s'exprimer comme des résultats sur certains faisceaux d'idéaux localement principaux sur des espaces analytiques $Z \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^d$ au dessus de $\mathbb{C}^d$, où le morphisme π est propre et est isomorphisme au dessus d'un ouvert de Zariski dense de $\mathbb{C}^d$: Soit $H : \mathbb{R}^{d*} \to \mathbb{R}$ la fonction d'appui de l'enveloppe convexe $N(I)$, définie par $H(u) = \min_{m \in N(I)} u(m)$ pour $u \in \mathbb{R}^{d*}$. Etant donnés N_1 et N_2, on peut décomposer le quadrant positif de $\mathbb{R}^{d*}$ en réunion de cônes convexes polyhedraux rationnels σ_α tels que la fonction d'appui de N_1 et celle de N_2 soient linéaires dans chaque σ_α. On considère dans $\mathbb{R}^d$ le dual convexe $\check{\sigma}_\alpha = \{m \in \mathbb{R}^d,\ u(m) \geq 0\ \forall\, u \in \sigma_\alpha\}$ et l'on vérifie que l'algèbre $\mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap \mathbb{Z}^d] \subset \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_d, X_d^{-1}]$ engendrée par les monômes dont les exposants sont dans $\check{\sigma}_\alpha$ est de type fini. L'espace Z est obtenu en recollant les $X_{\sigma_\alpha} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap \mathbb{Z}^d]$ le long des ouverts $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$, et l'on vérifie que sur $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap \mathbb{Z}^d]$ chacun des deux idéaux I_1 et I_2 est principal, en fait engendré par un monôme m_1 (resp. m_2) tel que $H_1(u) = u(m_1)$ $\forall\, u \in \sigma_\alpha$ (resp. $H_2(u) = u(m_2)$ $\forall\, u \in \sigma_\alpha$). Si I_1 et I_2 sont primaires pour l'idéal maximal, on obtient en considérant $I_1\mathcal{O}_Z$ et $I_2\mathcal{O}_Z$ deux idéaux inversibles définissant des sous-espaces coïncidant

ensemblistement avec $\pi^{-1}(o)$, donc compacts. Des résultats classiques permettent de calculer les multiplicités mixtes de I_1 et I_2 comme degrés mixtes de faisceaux inversibles. Remarquons que cette construction se généralise immédiatement à la situation suivante : Soient K_1 et K_2 deux polytopes (polytope = enveloppe convexe d'un nombre fini de points du réseau entier), soient H_1 et H_2 leur fonction d'appui ; $H_i : \mathbb{R}^{d*} \to \mathbb{R}$ est définie par $H_i(u) = \min\limits_{m \in K_i} u(m)$, et soit $\mathbb{R}^{d*} = \cup \sigma_\alpha$ une décomposition de $\mathbb{R}^{d*}$ en cônes convexes polyhédraux, tels que H_1 et H_2 soient linéaires dans chaque cône σ_α. A cette situation, on associe une variété algébrique (variété de Demazure) X de dimension d obtenue en recollant les $X_{\sigma_\alpha} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap \mathbb{Z}^d]$ le long des ouverts $X_{\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta}$.
Sur chaque X_{σ_α} on construit un idéal fractionnaire inversible qui correspond au sous $\mathbb{C}[\check{\sigma}_\alpha \cap \mathbb{Z}^d]$ - module de $\mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_d, X_d^{-1}]$ engendré par le monôme $X_1^{a_1} \dots X_d^{a_d}$ où $(a_1, \dots, a_d)$ est un élément $m_\alpha \in \mathbb{Z}^d$ tel que $H(u) = u(m_\alpha)$ pour tout $u \in \sigma_\alpha$.
Ces idéaux fractionnaires inversibles se recollent pour donner deux faisceaux inversibles L_1 et L_2 sur la variété X, et l'on observe que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sections globales $H^o(X, L_i)$ a une base en bijection naturelle avec $K_i \cap \mathbb{Z}^d$. Donc (X, L_i) détermine K_i, et l'on a la relation numérique :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^o(X, L_i) = \#(K_i \cap \mathbb{Z}^d).$$

Egalité qui est à rapprocher de : $\dim \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_d\}/_I = \#(\mathbb{R}^d_+ - E(I))$.
Par ailleurs, on peut démontrer (cf.[3], p.44) que $H^q(X, L_i) = 0$ pour $q > 0$ et enfin l'on remarque que, pour ν_1 et $\nu_2 \in \mathbb{N}$ la fonction d'appui de $\nu_1 K_1 + \nu_2 . K_2$ est encore linéaire dans chaque σ_α et donc permet de construire un faisceau inversible sur X, qui n'est autre que $L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2}$.

On sait enfin que d'une part $\chi(X, L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2})$, qui dans ce cas-ci est égal à $\dim_{\mathbb{C}} H^o(X, L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2})$ est un polynôme en ν_1 et ν_2 de degré d, et que d'autre part, d'après Minkowski, $\mathrm{Vol}(\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2)$ est un polynôme homogène en ν_1, ν_2 de degré d. Si l'on écrit ces polynômes

$$\chi(X, L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2}) = \frac{1}{d!} \Sigma \binom{d}{i} s_i \, \nu_1^i \, \nu_2^{d-i} + \text{polynôme de degré} < d$$

$$\mathrm{Vol}(\nu_1 K_1 + \nu_2 K_2) = \Sigma \binom{d}{i} v_i \, \nu_1^i \, \nu_2^{d-i}$$

on n'a aucun mal à démontrer, en utilisant l'égalité

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu^d} \# (\nu K \cap \mathbb{Z}^d) = \mathrm{Vol}(K)$$

que l'on a les égalités

$$s_i = d! \, v_i \qquad (0 \le i \le d).$$

Les v_i sont appelés <u>volumes mixtes</u> de K_1 et K_2, et les s_i sont appelés degrés mixtes des faisceaux inversibles L_1 et L_2, et répondent aux multiplicités mixtes vues plus haut.
Enfin il n'est pas difficile de tirer du <u>théorème de l'index de Hodge</u> les inégalités entre degrés mixtes :

$$s_{i-1}^2 \ge s_i . s_{i-2} \qquad (2 \le i \le d)$$

avec égalité si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $L_1^a \simeq L_2^b$.
D'où l'on déduit les inégalités entre volumes mixtes de polytopes

$$v_{i-1}^2 \ge v_i . v_{i-2} \qquad (2 \le i \le d)$$

avec égalité si et seulement si il existe des entiers a et b tels que $aK_1 = bK_2$ à translation près. (Inégalités de Aleksandrov-Fenchel)

Ces inégalités impliquent, comme on le vérifie facilement

$$v_i^d \geq v_o^{d-i} . v_d^i \qquad (o \leq i \leq d).$$

et donc

$$\mathrm{Vol}(K_1+K_2)^{1/d} \geq \mathrm{Vol}(K_1)^{1/d} + \mathrm{Vol}(K_2)^{1/d}$$

(Inégalité de Brünn-Minkowski).

Les volumes mixtes étant des fonctions continues de $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des convexes compacts de $\mathbb{R}^d$, muni de la topologie de Hausdorff, un argument d'approximation par des polytopes montre que toutes les inégalités ci-dessus sont encore valables pour K_1, K_2 dans $\mathcal{K}$.

Prenant en particulier $K_2 = \mathbb{B}$, boule unité de $\mathbb{R}^d$, on a $v_o = \mathrm{Vol}(\mathbb{B})$, $v_d = \mathrm{Vol}(K_1)$, et $v_{d-1} = \frac{1}{d}\mathrm{Vol}(\partial K_1)$. La seconde inégalité ci-dessus avec $i = d-1$ donne donc

$$\mathrm{Vol}(\partial K_1)^d \geq d^d . \mathrm{Vol}(\mathbb{B}) . \mathrm{Vol}(K_1)^{d-1}$$

c'est à dire l'inégalité isopérimétrique.

Mais la méthode ci-dessus ne donne le résultat (démontré par Aleksandrov en 1937) selon lequel $v_o = v_1 = \dots = v_d$ implique $K_1 = K_2$ à translation près (et donc le fait que l'égalité dans l'inégalité isopérimétrique n'a lieu que pour $K_1 = \rho\mathbb{B}$, $\rho \in \mathbb{R}_+$) que si K_1 et K_2 sont des <u>polytopes.</u>

Il faut donc chercher un résultat stable par rapport aux approximations, c'est à dire disant que si $v_o, \dots, v_d$ sont "presque" égaux, alors K_1 et K_2 sont "presque"égaux à translation près, c'est à dire une inégalité "à la Bonnesen", qui permet de minorer $r(K_2; K_1) = \mathrm{Sup}\{r/rK_1 \subseteq K_2$ à translation près$\}$ en fonction des volumes mixtes. Dans le cas d=2, la même méthode que ci-dessus, un peu raffinée, donne le résultat cherché

(qui était déjà connu, cf.[8], comme il est montré dans [13])

$$r(K_2;K_1) \geq \frac{v_1^2 - \sqrt{v_1^2 - v_o v_2}}{v_2}$$

En dimension d > 2 cela pose un très intéressant problème de géométrie algébrique.*

<u>Remarque</u> : Récemment R. Stanley a utilisé la même construction pour démontrer, par une application très ingénieuse du théorème de Lefschetz difficile, des inégalités entre les nombres des faces de chaque dimension d'un polytope simplicial, qui avaient été conjecturées par Mc Mullen, mais dont aucune démonstration n'était connue.

(J'ai seulement un preprint "on the number of faces of simplicial polytopes" , R. Stanley , M.I.T. 1979. Voir aussi mon exposé au Séminaire Bourbaki, Novembre 1980),(voir [15]).

---

* (Note rajoutée en Novembre 1985) :
J'ai appris qu'en fait le problème en théorie des convexes avait reçu une solution : voir Diskant [18].

REFERENCES

[1] J. Briançon et M. Skoda. Sur la cloture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes. C.R.A.S. Paris, Série A t. 278 (1974) p. 949-951.

[2] H. Hironaka. Introduction to the theory of infinitely near singular points-lecture 7. Memorias de Matematica del Instituto Jorge Juan, Madrid 1974.

[3] G. Kempf, D. Mumford, B.St Donat. Toroidal embeddings. Springer Lecture Notes N°339.

[4] J. Lipman, B. Teissier : On a theorem of Briançon-Skoda on integral closures of ideals. Michigan Math. Journal, 28, (1981), p. 97-116.

[5] I. Newton. Traité des fluxions. Blanchard, Paris.

[6] D. Rees : A. Transform of ideals. Proc. Cambridge Phil. Soc. 57 (1961), 8-17

[7] D. Rees et R.Y. Sharp. On a theorem of B. Teissier on multiplicities of ideals in local rings. Journ. London Math. Soc.(2), 18(1978), 449 - 463.

[8] L.A. Santaló. Geometric probability and integral geometry, Addison-Wesley 1977.

[9] B. Teissier : Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités. Annals of Math (106), 1977 p. 38-44.

[10] B. Teissier. On a Minkowski-type inequality for multiplicities in : C.R. Ramanujam, a tribute. Tata Institute, Bombay 1978.

[11] B. Teissier. Jacobien Newton polyhedra and equisingularity. Proc. R. I. M. S. Conference on singularities, April 1978. R. I. M. S. 1978.

[12] B. Teissier : Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques. Note C.R.A.S. Paris 28 janvier 1979.

[13] B. Teissier. Bonnesen-type inequalities in algebraic geometry. Preprint Harvard University March 1979. Séminaire S.T. Yau, 1979-80, Annals of Math. Studies n° 102, Princeton University Press.

[14] Il existe un excellent texte sur les variétés toriques : V.I. Danilov. The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33,2. (1978) p. 97-154 (Uspekhi Mat. Nauk, 33,2, 1978, 85-134)

ADDENDA

Les références [4] et [14] ont paru depuis la rédaction de cet article.

D'autres articles sur le même sujet ont également paru entre temps :

[15] R. Stanley. On the number of faces of simplicial convex polytope. Advances in Math. 35 (1980), 236-238.

[16] R. Stanley. The number of faces of simplicial polytopes ans spheres. In : Discrete geometry and convexity. Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 440, New York 1985.

[17] P. Schenzel. On the number of faces of simplicial complexes and the parity of Frobenius. Math. 2 178 (1981), 125-142.

[18] Diskant. Dok. Ak. Nauk SSSR, Tom 213 (1973), n° 3. Trad. Society Math., Vol. 14 (1973) n° 6.