PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES DE L'I.H.É.S.

BERNARD TEISSIER

Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 70 (1989), p. 169-198.

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1989__70__169_0>

SUR LA TRIANGULATION DES MORPHISMES SOUS-ANALYTIQUES

par Bernard TEISSIER

A René Thom, visionnaire obstiné.

Certaines propriétés géométriques des morphismes différentiables, comme celle d'être stratifiable « avec la condition de Thom » ou celle d'être triangulable, qui simplifient considérablement leur étude, ne sont pas satisfaites par tous les morphismes; les éclatements fournissent des contre-exemples presque immédiats. Thom a vu que les morphismes propres « assez généraux » possèdent ces propriétés, et a de plus proposé une vision géométrique de cette généricité, condensée en sa magnifique maxime :

« *Tout manque de généricité est dû à un manque de transversalité.* »

Cette maxime, initialement formulée en géométrie différentielle (voir [32]), peut être complétée en géométrie analytique par une autre, issue des travaux de Zariski et Hironaka sur la résolution des singularités et l'aplatissement :

« *Tout manque de transversalité peut être réparé par des éclatements bien choisis.* »

La transversalité de Thom concerne les morphismes $f\colon X \to Y$ de variétés différentielles et s'applique au morphisme $j^r f\colon X \to J^r(X, Y)$ dans l'espace des jets relativement à une stratification de ce dernier espace. En géométrie analytique la propriété de platitude d'un morphisme introduite par Grothendieck peut être considérée comme une version très faible de la transversalité au sens de Thom. Tout en possédant les mêmes propriétés d'ouverture et de densité que la transversalité, la platitude ne requiert aucune hypothèse de non-singularité. De plus, on dispose de théorèmes d' « aplatissement » montrant que le manque de platitude peut être réparé par des éclatements.

Il est donc tentant de voir si des hypothèses de platitude suffisent à assurer des résultats géométriques qui du point de vue de Thom sont impliqués par des conditions de transversalité. Des résultats de cette nature ont été obtenus par Hironaka ([20]) et Sabbah ([27]) et nous allons développer ici ce point de vue pour la triangulation; des conditions de platitude, mais pour toutes les strates de partitions de la source du complexifié d'un morphisme, et de ses projections itérées (*cf.* §§ 2 et 4), suffisent essentiellement à assurer la triangulabilité de ce morphisme.

Pour les résultats « génériques », on peut proposer le dictionnaire heuristique suivant, où la transversalité à des stratifications d'espaces de jets de morphismes associés au morphisme que l'on étudie (la colonne de gauche) est remplacée par la platitude de morphismes algébriquement associés à f (colonne de droite) :

Transversalité générique (Thom [32]).	Platitude générique (Frisch [9], Douady [6]) et version banachique, appliquée à un déploiement versel à la Hauser [14].
Triangulabilité générique pour un morphisme propre (Hardt [11]).	Platitude générique + argument de récurrence + §§ 1 et 3 de cet article.
Triangulabilité pour les morphismes propres génériques (conjecturée par Thom, prouvée par Verona [37]).	Platitude générique (version banachique à la Douady [6]) appliquée à *une partition* d'un « déploiement versel » à la Hauser ([14], et le § 1 de cet article).
Stratifiabilité « générique » sans éclatement (Thom et Mather, [31] et [25]).	Platitude générique comme ci-dessus + caractérisation de w_f à la Hironaka et Sabbah ([20] et [27]).

Par contre, les résultats relevant de l'aplatissement en géométrie analytique n'ont pas d'analogue en géométrie différentielle pour le moment.

Rappelons que le morphisme déduit d'un morphisme $f: X \to Y$ par le « changement de base » donné par un morphisme $h: T \to Y$ n'est autre que le morphisme de projection $f_T: X \times_Y T \to T$ du produit fibré.

On peut alors dire que, heuristiquement, *toute propriété des morphismes analytiques qui s'exprime par la platitude d'un morphisme auxiliaire dont la formation commute aux changements de base est vraie pour des morphismes assez généraux et est, pour n'importe quel morphisme propre, réalisable après changement de base par des éclatements bien choisis de la base* (voir le § 2 pour un énoncé précis).

On dispose déjà de résultats de Sabbah ([27]) portant sur la stratification sans éclatement des morphismes, et le sujet de cet article est un résultat concernant la triangulation des morphismes.

La triangulation des ensembles semi- et sous-analytiques (*cf.* [23], [19] et [10]) permet d'étendre à ceux-ci des résultats de finitude qui sont classiques pour les variétés, par exemple la finitude de l'homologie compacte ou l'existence de courants d'intégration. Ces dernières années, des questions de finitude nouvelles sont venues des utilisateurs de la géométrie analytique, en particulier dans la théorie des équations aux dérivées partielles (*cf.* [36]). La démonstration de beaucoup des résultats demandés aurait été facile si tous les *morphismes* sous-analytiques propres étaient triangulables. L'exemple d'un éclatement de point dans $\mathbf{R}^2$ montre immédiatement que cela est faux mais on dispose, grâce aux beaux travaux de R. M. Hardt (voir [10], [11], [12]), d'un théorème de « triangulation générique » (au sens où les géomètres algébriques et analytiques ont un Théorème de platitude générique), conséquence d'un résultat dont voici l'énoncé :

Théorème de Hardt. — Soit $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *un sous-ensemble sous-analytique relativement compact tel que la restriction* $f : X \to \mathbf{R}^n$ *de la première projection soit propre. Il existe un fermé sous-analytique rare* Z *de* $f(X)$ *tel qu'au-dessus de chaque composante connexe* U *de* $f(X) - Z$ *on ait, pour* $y \in U$, *un homéomorphisme sous-analytique* $\tau : f^{-1}(U) \to U \times f^{-1}(y)$.

Comme il a été remarqué dans [33], on en déduit par récurrence sur la dimension de $f(X)$ l'existence d'une stratification de $f(X)$ au-dessus de chaque strate T de laquelle on a une triangulation simultanée, c'est-à-dire un T-homéomorphisme sous-analytique de $f^{-1}(T)$ sur $T \times K$, où K est un complexe simplicial linéaire de $\mathbf{R}^m$.

Le théorème de Hardt donne donc une triangulation « par strates » du morphisme f, mais sans indication sur la manière dont ces triangulations se comportent lorsque l'on passe d'une strate à l'autre. Il est cependant suffisant pour démontrer par récurrence sur la dimension de $f(X)$ beaucoup de résultats de finitude.

Le but de cet article est de prouver l'énoncé suivant, qui affirme essentiellement qu'un morphisme sous-analytique propre devient triangulable après des changements de base très particuliers, c'est-à-dire que les triangulations par strates « se recollent » au moins dans des coins analytiques, et implique les mêmes résultats de finitude non constructifs qu'impliquerait la triangulabilité de tous les morphismes sous-analytiques propres :

Théorème **0.1.** — *Soit* $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *un sous-ensemble sous-analytique tel que la restriction* $f : X \to \mathbf{R}^n$ *de la première projection soit propre. Pour tout sous-ensemble compact* K *de* $\mathbf{R}^n$, *il existe un ensemble fini de morphismes* $\pi_i : Z_i \to \mathbf{R}^n$, *dont chacun est un composé fini d'éclatements locaux et, pour chaque* i, *un sous-ensemble compact* K_i *de* Z_i *de telle façon que la réunion des images des* K_i *contienne un voisinage de* K *dans* $\mathbf{R}^n$ *et que chacun des morphismes* $f_i : X_i \to Z_i$ *déduits de* f *par le changement de base* π_i *soit triangulable au-dessus de* K_i.

Remarques. — 1) Je rappelle qu'une triangulation de $\mathbf{R}^p$ compatible avec $X \subset \mathbf{R}^p$, ou triangulation de l'inclusion $X \subset \mathbf{R}^p$, est la donnée d'une décomposition simpliciale linéaire $\mathbf{R}^p = \bigcup_\alpha \sigma_\alpha$ et d'un homéomorphisme à graphe sous-analytique $t : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ induisant un isomorphisme analytique de chaque simplexe ouvert σ_α sur son image et tel que X soit réunion des $t(\sigma_\alpha)$ qui le rencontrent.

Chaque morphisme π_i étant composé d'un nombre fini d'éclatements locaux, Z_i peut être plongé au voisinage de K_i comme sous-ensemble sous-analytique dans un espace affine $\mathbf{R}^{n_i}$ et la triangulabilité de f_i signifie que si l'on considère X_i comme plongé au voisinage de $f_i^{-1}(K_i)$ dans $\mathbf{R}^{n_i} \times \mathbf{R}^m$ de telle façon que la première projection induise f_i, il existe une triangulation sous-analytique de $\mathbf{R}^{n_i} \times \mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{R}^{n_i}$) compatible avec X_i (resp. Z_i), ces triangulations étant telles que le morphisme conjugué de la première projection par les homéomorphismes soit encore la première projection et soit simplicial.

2) On ne sait toujours pas si, comme Thom l'a demandé dans [31], un morphisme propre stratifié sans éclatement est localement triangulable, et on peut aussi demander si inversement un morphisme propre localement triangulable est stratifiable sans éclatement au sens de Thom.

Je suppose le lecteur familier avec la démonstration de la triangulation des ensembles sous-analytiques de Hironaka ([19]), et présente ici les modifications qu'il faut lui apporter dans le cas relatif.

La démonstration du théorème de triangulation d'une famille finie (X_α) de sous-ensembles sous-analytiques compacts de $\mathbf{R}^m$, qui est un cas particulier ($n = 0$) déjà connu du Théorème, comporte trois étapes :

1) (très facile) on se ramène à trianguler les frontières $X_\alpha - \mathring{X}_\alpha$, donc on peut supposer $\dim X_\alpha < m$;

2) (lemme de bonne projection) on montre l'existence d'une projection linéaire $P : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-1}$ qui induit sur chaque X_α un morphisme fini;

3) on prouve que tout morphisme sous-analytique fini est triangulable.

(Dans [19] est prouvé un résultat plus général de triangulation de $\mathbf{R}^m$ compatible avec une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytiques.)

Dans le cas relatif, la première étape présente des difficultés nouvelles, essentiellement parce que l'opération de prendre l'intérieur ne commute pas aux changements de base, comme on le vérifie sur l'exemple le plus simple de morphisme non triangulable : l'éclatement d'un point dans $\mathbf{R}^2$, plongé dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{P}^1$.

Pour surmonter cette difficulté, après quelques réductions et grâce au lemme 1.4 ci-dessous, on peut faire appel à un raffinement du théorème d'aplatissement local de Hironaka-Lejeune-Teissier (*cf.* [21] et [18]). Ce raffinement permet aussi de surmonter (*cf.* § 3) la difficulté que présente la seconde étape dans le cas relatif.

1. Préparatifs

1.1. Pour se ramener des sous-ensembles sous-analytiques aux espaces analytiques, on peut utiliser le « fiber cutting Lemma » de Hironaka ([18], 7.3.5), dont voici un avatar adapté à nos besoins :

Lemme **1.1.** — *Soit* X *un sous-ensemble sous-analytique fermé de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. *Il existe une partition localement finie* $X = \bigcup X_\alpha$ *de* X *en sous-ensembles sous-analytiques dans* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *et une famille de morphismes analytiques réels* $g_\alpha : \mathbf{S}_\alpha \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *tels que l'on ait pour chaque* α :

1) *Le morphisme* g_α *est propre et l'image de* g_α *est la fermeture* $\overline{X}_\alpha$ *de* X_α *dans* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.
2) *L'espace analytique réel* $\mathbf{S}_\alpha$ *est non singulier et connexe.*
3) *La dimension de* $\mathbf{S}_\alpha$ *est égale à la dimension topologique de* X_α.
4) *Le morphisme* $g_\alpha : g_\alpha^{-1}(X_\alpha) \to X_\alpha$ *induit par* g_α *est fini.*

Pour la commodité du lecteur, voici le schéma de la démonstration :

D'après ([17], Cor. 3.7.8, p. 479), il existe un morphisme analytique réel propre $g : \mathrm{W} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dont X est l'image. D'après le théorème de désingularisation 1 de Hironaka (*loc. cit.*, p. 458), on peut supposer W non singulier et en remarquant que la question passe aux composantes connexes, supposer aussi W connexe. D'après *loc. cit.*, 3.5 et 3.5.4, le morphisme g est une submersion au-dessus d'un ouvert sous-analytique de $g(\mathrm{W})$ et l'on peut donc choisir un point y de cet ouvert tel que $g^{-1}(y)$ soit non singulier de dimension $\dim(\mathrm{W}) - \dim(g(\mathrm{W}))$. Soit h une fonction analytique sur W, non constante sur chaque composante connexe de $g^{-1}(y)$, et considérons le morphisme analytique $q : \mathrm{W} \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ défini par (g, h).

Par construction, il existe un point de $g^{-1}(y)$ où q est de rang $\dim(g(\mathrm{W})) + 1$ et par le critère jacobien nous avons donc un sous-espace analytique réel fermé W_1 de W formé des points de W où le rang de q est au plus $\dim(g(\mathrm{W}))$, et $\dim(\mathrm{W}_1) < \dim(\mathrm{W})$. Soit $g_1 : \mathrm{W}_1 \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ le morphisme induit par g; montrons qu'il a même image que g. Pour chaque point z de l'image de g, le morphisme q induit un morphisme propre $q_z : g^{-1}(z) \to \{ z \} \times \mathbf{R}$ qui ne peut être submersif puisque $g^{-1}(z)$ est compact. Un point où q_z n'est pas de rang maximum est un point de W_1 et donc z appartient à l'image de g_1. D'après le théorème de désingularisation 1 (*loc. cit.*, p. 458), il existe une famille finie de morphismes propres $r_\delta : \mathbf{S}_\delta \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dont la réunion des images recouvre W_1 et qui de plus sont presque partout des immersions localement fermées; on a donc $\dim(\mathbf{S}_\delta) \leqslant \dim(\mathrm{W}_1)$. Puisque g et g_1 ont même image, en itérant ce raisonnement, on peut supposer non seulement que W est non singulier, mais aussi qu'il vérifie l'égalité $\dim(\mathrm{W}) = \dim(g(\mathrm{W}))$. D'après Bertini-Sard, il existe un fermé sous-analytique rare F de $g(\mathrm{W})$ tel que le morphisme $g : \mathrm{W} - g^{-1}(\mathrm{F}) \to g(\mathrm{W}) - \mathrm{F}$ soit à fibres discrètes et algébriquement non singulières, donc fini au sens algébrique. On prend pour strates X_α de $g(\mathrm{W}) - \mathrm{F}$ ses composantes connexes, qui satisfont les assertions du lemme d'après *loc. cit.*, 3.7.10 et 3.7. On termine la preuve par récurrence sur la dimension puisque par construction on a $\dim(\mathrm{F}) < \dim(\mathrm{X})$.

1.2. Nous aurons besoin aussi de résultats sur la dimension des fibres d'un morphisme entre ensembles sous-analytiques, dont certains sont conséquences de l'énoncé suivant, qui est un avatar de résultats dus à Thom, Hironaka et Hardt :

Théorème **1.2** (voir [32], [20], et [10], Th. 4.1). — *Soit* (X_α) *une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytiques de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *telle que la restriction de la première projection à chacun des* X_α *et à leur réunion soit propre. Il existe des stratifications de Whitney sous-analytiques* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \bigcup \mathrm{Y}_\beta$ *et* $\mathbf{R}_n = \bigcup \mathrm{T}_{\beta'}$ *telles que chaque* X_α *soit réunion de strates et que pour chaque* β, *il existe* β' *tel que le morphisme* $\mathrm{Y}_\beta \to \mathbf{R}^n$ *induit par la première projection ait pour image* $\mathrm{T}_{\beta'}$ *et soit de rang constant.* ∎

Ceci implique en particulier que pour chaque α, l'ensemble des points de X_α en lesquels la dimension de la fibre du morphisme f_α induit par la première projection est $\leqslant d$, ou égale à d, est sous-analytique pour tout d. Il n'y a évidemment aucun résultat de semi-continuité de la dimension des fibres en général.

Remarquons aussi que l'on peut également imposer à la stratification $\mathbf{T}$ d'être compatible avec une famille localement finie donnée de sous-ensembles sous-analytiques de $\mathbf{R}^n$.

1.3. Reprenons la situation et les notations du lemme 1.1, et notons f et f_α les morphismes induits sur X et les X_α par la première projection $p : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Je noterai désormais $X(y)$ la fibre $f^{-1}(y)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Définissons *l'intérieur relatif* $\operatorname{int}_p(X)$ de X comme l'intérieur de X dans $p^{-1}(p(X))$ et de même *l'adhérence relative* $\operatorname{adh}_p(X)$ de X comme l'adhérence de X dans $p^{-1}(p(X))$. Pour $y \in f(X_\alpha)$, l'intérieur $\operatorname{int}(X_\alpha(y))$ et bien sûr l'adhérence $\operatorname{adh}(X_\alpha(y))$ seront pris dans $\{y\} \times \mathbf{R}^m$, c'est-à-dire seront aussi relatifs.

Remarquons que l'on a toujours les inclusions $\operatorname{int}_p(X_\alpha)(y) \subset \operatorname{int}(X_\alpha(y))$ et $\operatorname{adh}(X_\alpha(y)) \subset \operatorname{adh}_p(X_\alpha)(y)$.

Lemme **1.3.** — *L'inclusion* $\operatorname{adh}(X(y)) \subset \operatorname{adh}_p(X)(y)$ *est une égalité lorsque le morphisme f est propre.*

Raisonnons par l'absurde; soit z un point de $\operatorname{adh}_p(X)(y) - \operatorname{adh}(X(y))$, et soit U un voisinage fermé de z dans $p^{-1}(y)$ tel que $U \cap X(y) = \emptyset$. Soit V un voisinage fermé de z dans $p^{-1}(p(X))$ tel que $V \cap p^{-1}(y) = U$; puisque, par hypothèse, f est propre, l'image $f(V \cap X)$ est un fermé de $f(X)$ ne contenant pas y. Soit W un voisinage de y dans $f(X)$ ne rencontrant pas $f(V \cap X)$; l'intersection $p^{-1}(W) \cap V$ est un voisinage de z dans $p^{-1}(p(X))$ et donc a une intersection non vide avec X, alors que par le choix de W, l'intersection $p^{-1}(W) \cap V \cap X$ est vide. Ceci fournit la contradiction cherchée.

Lemme **1.4.** — *Gardons les notations du lemme* 1.1, *fixons un* α *et un point* $y \in \mathbf{R}^n$, *et ne supposons plus* $\mathbf{S}_\alpha$ *non singulier, mais seulement tel que sa dimension algébrique soit égale à sa dimension topologique et que son complexifié* ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{S}_\alpha$ *soit de dimension pure.*

Soit y un point de $\mathbf{R}^n$ *tel que l'ensemble sous-analytique* $p(\overline{X}_\alpha)$ *soit contenu, au voisinage de y, dans un sous-espace analytique réel* Y_α *de* $\mathbf{R}^n$ *de telle façon qu'il existe un entier k tel que la restriction à un voisinage de* $h_\alpha^{-1}(y)$ *du morphisme complexifié* ${}^{\mathbf{C}}h_\alpha : {}^{\mathbf{C}}\mathbf{S}_\alpha \to {}^{\mathbf{C}}Y_\alpha$ *du morphisme composé* $h_\alpha = f_\alpha \circ g_\alpha$ *soit un morphisme à fibres purement de dimension k. Il existe un voisinage* V *de y dans* $\mathbf{R}^n$ *tel que pour* $y' \in V$, *on ait l'égalité* $\operatorname{adh}(\operatorname{int}_p(\overline{X}_\alpha)(y')) = \overline{X}_\alpha(y')$.

Démonstration. — La dimension topologique $\dim_x(X)$ de l'espace analytique réel X au point x est toujours inférieure ou égale à la dimension algébrique $\operatorname{Dim}_x(X)$ de X en x, qui est celle de son complexifié, et lui est égale lorsque les points de X lisses sur $\mathbf{R}$ sont partout denses.

D'après ([8], chap. 3), au prix d'un rétrécissement du voisinage de ${}^{\mathbf{C}}h_\alpha^{-1}(y)$ considéré, nous pouvons supposer le morphisme ${}^{\mathbf{C}}h_\alpha$ ouvert.

Si $k < m$, toutes les fibres $\overline{X}_\alpha(y')$ sont d'intérieur vide pour y' assez proche de y et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $k = m$; soit y' un point $p(\overline{X}_\alpha)$ assez proche de y pour que $p(\overline{X}_\alpha)$ soit contenu dans Y_α au voisinage de y', et soit x un point de $\mathrm{int}(\overline{X}_\alpha(y'))$, que nous pouvons supposer non vide.

Par la condition d'équidimensionnalité, ${}^{\mathbf{C}}Y_\alpha$ est de dimension pure et nous avons l'égalité $\dim_{\mathbf{C}}({}^{\mathbf{C}}\mathbf{S}_\alpha) = \dim_{\mathbf{C}}({}^{\mathbf{C}}Y_\alpha) + m$. Puisque la dimension topologique de $\mathbf{S}_\alpha$ est égale à sa dimension algébrique et que g_α est fini et surjectif au-dessus d'un ouvert dense de $\overline{X}_\alpha$, on a $\dim_x(\overline{X}_\alpha) = \mathrm{Dim}_{y'}(Y_\alpha) + m$. Or, on a aussi les inégalités évidentes suivantes :

$$\dim_x(\overline{X}_\alpha) \leqslant \dim_{y'}(p(\overline{X}_\alpha)) + m \leqslant \dim_{y'}(Y_\alpha) + m \leqslant \mathrm{Dim}_{y'}(Y_\alpha) + m.$$

Finalement, on a $\dim_{y'}(Y_\alpha) = \mathrm{Dim}_{y'}(Y_\alpha) = \dim_{y'}(p(\overline{X}_\alpha))$. D'autre part, puisque la dimension de $S_\alpha(y)$ est égale à m, et que les fibres de ${}^{\mathbf{C}}h_\alpha$ sont de dimension m, le morphisme g_α induit au-dessus d'un ouvert sous-analytique dense de $\overline{X}_\alpha(y)$ un morphisme algébriquement fini. Montrons que tout point x' de cet ouvert appartient à $\mathrm{int}_p(\overline{X}_\alpha)$, ce qui prouvera le lemme. D'après [8], chap. 3, le morphisme ${}^{\mathbf{C}}g_\alpha$ induit un morphisme ouvert fini d'un voisinage ouvert W de $({}^{\mathbf{C}}g_\alpha)^{-1}(x')$ dans ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{S}_\alpha$ sur une réunion de composantes irréductibles d'un voisinage ouvert V de $y' \times x'$ dans ${}^{\mathbf{C}}Y_\alpha \times \mathbf{C}^m$. On en déduit que l'inclusion $\overline{X}_\alpha \subset p(\overline{X}_\alpha) \times \mathbf{R}^m$ est un morphisme ouvert en restriction à des voisinages convenables de $y' \times x'$, donc un homéomorphisme local en $y' \times x'$, d'où le résultat.

Corollaire **1.4.1.** — *Si les conclusions des lemmes* 1.3 *et* 1.4 *sont satisfaites, on a localement en* y_0 *l'inégalité*

$$\dim(\mathrm{adh}_p\, \overline{X}_\alpha - \mathrm{int}_p\, \overline{X}_\alpha)\ (y) \leqslant m - 1.$$

2. Partitions et platitude

Dans ce paragraphe, sauf mention du contraire, tous les espaces et morphismes sont analytiques complexes.

Le résultat de ce paragraphe est une variante, dans une situation plus simple, d'un raffinement substantiel dû à Sabbah (*cf.* [27]) du théorème d'aplatissement de [21] et [18]. La démonstration est une adaptation de celle de Sabbah et utilise, outre [21], plusieurs idées données par Hironaka dans [15].

L'idée du résultat est que, du point de vue de la théorie des ensembles stratifiés, l'aplatissement usuel n'est qu'un aplatissement « en codimension zéro » et que l'on peut en fait rendre simultanément (pseudo-)plates sur leur image toutes les adhérences des strates d'une stratification, à des raffinements près.

2.1. Partitions

Définition **2.1.1.** — Etant donnés un morphisme analytique $f: X \to Y$ et un sous-ensemble analytique fermé Z de X, nous dirons que Z est *plat* (resp. *ouvert*, resp. *pseudo-plat*) *sur son image* si

a) le sous-ensemble $f(Z)$ de Y est un sous-ensemble analytique fermé;

b) le morphisme $f \mid Z: Z \to f(Z)$ est plat (resp. est ouvert, resp. satisfait l'égalité $\dim_z Z(f(z)) = \dim_z Z - \dim_{f(z)} f(Z)$ pour tout $z \in Z$).

Remarques **2.1.1.1.** — 1) Si le sous-ensemble analytique Z est plat sur son image, il est ouvert sur son image (voir [8], 3.19) et pseudo-plat sur son image (voir *loc. cit*), ainsi que chacune de ses composantes irréductibles s'il est équidimensionnel ainsi que son image.

2) Si Z est pseudo-plat sur son image, il est ouvert sur son image d'après [8], chap. 3, p. 145; s'il est de plus équidimensionnel ainsi que son image, chacune de ses composantes irréductibles a pour image une composante irréductible de $f(Z)$ et est ouverte sur son image. En particulier si Z est l'adhérence d'un sous-ensemble analytique $Z^0 \subset Z$ sur laquelle le morphisme f est de rang constant et de dimension relative constante ($\dim_z Z(f(z)) = k$ pour $z \in Z^0$), chaque composante irréductible de Z a pour image une composante irréductible de $f(Z)$ sur laquelle elle est pseudo-plate.

3) Si enfin Z est irréductible et pseudo-plat sur son image, celle-ci est irréductible et l'on a l'égalité $\dim_z Z(f(z)) = \dim Z - \dim f(Z)$ pour tout $z \in Z$. Cette condition de constance de la dimension des fibres est évidemment stable par changement de base et elle implique à son tour la pseudo-platitude (voir [8], p. 138). La pseudo-platitude sur son image d'un sous-ensemble analytique irréductible Z est donc préservée par changement de base.

Notation. — On écrira $\dim_f(Z)$ pour $\inf_{y \in f(Z)} \dim Z(y)$.

Définition **2.1.2.** — Etant donné un morphisme analytique entre espaces réduits $f: X \to Y$, nous appellerons *f-partition analytique de* X la donnée d'une famille localement finie $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ de sous-espaces analytiques non singuliers de dimension pure de X tels que pour chaque $\alpha \in A$, l'adhérence $\overline{X}_\alpha$ et la frontière $\overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$ de X_α soient des sous-espaces analytiques fermés de X, que la famille des composantes connexes des sous-espaces X_α soit une partition de X, et enfin que la restriction de f à chaque X_α soit de rang constant. Lorsque f est l'identité de X, nous parlerons de *partition analytique* de X.

Nous dirons qu'une f-partition est une *f-stratification* si chaque fois qu'une composante connexe d'une partie X_α rencontre l'adhérence d'une partie X_β, elle est contenue dans cette adhérence.

Une *partition de* f est la donnée d'une f-partition de X et d'une stratification $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ telle que pour chaque $\alpha \in A$ il existe $\beta \in B$ tel qu'on ait $f(X_\alpha) = Y_\beta$.

Définition **2.1.3.** — Soient $h : W \to Y$ un morphisme et $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ une partition analytique de Y. Cette partition est dite *compatible* avec un sous-espace analytique T de W si T est la réunion de celles des images réciproques $h^{-1}(Y_\beta)_{\beta \in B}$ qui le rencontrent. Une partition $(Y_\beta)_{\beta \in B}$ est *compatible* avec une partition $(W_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de W si elle est compatible avec chaque W_ω. Inversement, si la partition (W_ω) est compatible avec tous les $h^{-1}(Y_\beta)$, c'est-à-dire si chaque image inverse $h^{-1}(Y_\beta)$ est réunion des W_ω qu'elle rencontre, nous dirons que (W_ω) est un *raffinement* de (Y_β).

Définition **2.1.4.** — Soient Y un espace analytique réel ou complexe, X un espace topologique, $f : X \to Y$ une application continue, y_0 un point de Y et L un sous-ensemble fermé de $f^{-1}(y_0)$. Nous dirons que f possède *localement en* y_0 *et* L une propriété $\mathscr{C}$ s'il existe un voisinage ouvert U de y_0 dans Y et un voisinage ouvert V de L dans X tels que la restriction $f | f^{-1}(U) \cap V : f^{-1}(U) \cap V \to U$ possède la propriété $\mathscr{C}$.

Remarque. — Si X et Y sont des espaces analytiques munis de partitions, et si la propriété $\mathscr{C}$ est l'existence de partitions ayant certaines propriétés et compatibles avec les partitions données, cette compatibilité est à entendre après restriction de ces dernières à U et $f^{-1}(U) \cap V$.

Lemme **2.1.5.** — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme entre espaces analytiques réduits, et* W_ω *une famille localement finie de sous-espaces analytiques de* X *à fermeture et frontière analytiques. Il existe des f-stratifications* X_α *de* X *compatibles avec la famille* W_ω *et satisfaisant de plus n'importe quelle condition d'incidence stratifiante, par exemple les conditions de Whitney.*

G. Maltsiniotis m'ayant fait observer que la condition d'hérédité était superflue dans la définition des conditions d'incidence stratifiantes donnée en [35], chap. 3, 1, il suffit de remarquer que pour n'importe quelle relation d'incidence stratifiante $\mathscr{S}$ portant sur les quadruplets $(X, X_\alpha, X_\beta, x)$ (voir *loc. cit.*), la condition « $\mathscr{S}$ est vérifiée et f est de rang constant sur X_β au voisinage de x » est encore une condition d'incidence stratifiante, à cause de la semi-continuité analytique du rang d'un morphisme analytique, et d'appliquer la construction décrite dans *loc. cit.*

2.2. Eclatements locaux et topologie CIEL

Définition **2.2.1.** — Soit Y un espace analytique; on appelle *éclatement local de* Y la donnée d'un ouvert U de Y, d'un sous-espace analytique fermé E de U et du morphisme $\pi : W \to Y$ composé de l'éclatement de E dans U et du morphisme d'inclusion de U dans Y. Une *suite d'éclatements locaux de* Y est un système fini $(U_i, E_i, \pi_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ où, pour chaque i, $\pi_i : Y_{i+1} \to Y_i$ est un éclatement local, et $Y_0 = Y$.

Ces objets ont été étudiés systématiquement par Hironaka dans [16].

Etant donné un espace analytique réel ou complexe Y, considérons comme dans *loc. cit.* la catégorie dont les objets sont les morphismes $W \to Y$ qui sont Composés Illimités (mais finis) d'Eclatements Locaux, et dont les morphismes sont les Y-morphismes $W' \to W$. Notons CIEL(Y) cette catégorie. Entre deux objets de CIEL(Y) il y a au plus un morphisme, qui est un composé fini $W' \to W$ d'éclatements locaux. Une *étoile* de CIEL(Y) est une sous-catégorie $\mathbf{e}$ de CIEL(Y) maximale parmi celles qui satisfont la condition suivante :

Pour tout couple $\pi_1 : W_1 \to Y$, $\pi_2 : W_2 \to Y$ d'éléments de $\mathbf{e}$ il existe $\pi_3 : W_3 \to Y$ dans $\mathbf{e}$ tel qu'il existe dans CIEL(Y) des morphismes $q_1 : W_3 \to W_1$ et $q_2 : W_3 \to W_2$ tous deux d'image non vide et relativement compacte.

L'ensemble $\mathscr{E}_Y$ des étoiles de CIEL(Y) peut être muni d'une topologie dont une base d'ouverts est constituée des ensembles de la forme $\mathscr{E}_W = \{ \mathbf{e} \in \mathscr{E}_Y \mid$ le morphisme $q : W \to Y$ est dans $\mathbf{e} \}$.

Un point e de $\mathscr{E}_Y$ correspond à un système projectif de points dans des composés d'éclatements locaux. L'espace $\mathscr{E}_Y$ est muni d'un faisceau cohérent d'anneaux de valuation et d'une projection $\pi_Y : \mathscr{E}_Y \to Y$. Un point crucial est que le morphisme π_Y est propre, ce qui justifie la terminologie de la définition 2.2.3 ci-dessous. Ce morphisme d'espaces annelés $\pi_Y : \mathscr{E}_Y \to Y$ est appelé la *voûte étoilée* de Hironaka. (Voir [16] pour tout ceci.)

Retenons qu'à tout morphisme $T \to T'$ de CIEL(Y) est associé un plongement ouvert $\mathscr{E}_T \subset \mathscr{E}'_T$ des voûtes étoilées.

Proposition **2.2.2.** — *Dans la catégorie* CIEL(Y), *les familles* $(\varphi_i : T_i \to W)_{i \in I}$ *de morphismes telles que la réunion des* $\mathscr{E}_{T_i}$ *recouvre* $\mathscr{E}_W$ *sont les familles couvrantes d'une unique topologie de Grothendieck sur la catégorie* CIEL(Y), *que nous appellerons* la topologie CIEL(Y).

En effet, si la famille est réduite à un isomorphisme, elle est bien surjective, et si l'on se donne pour chaque T_i d'une famille couvrante une famille couvrante $(\zeta_{i,j} : Z_{i,j} \to T_i)$, la famille $(\varphi_i \circ \zeta_{i,j} : Z_{i,j} \to W)$ est couvrante, et enfin si $(\varphi_i : T_i \to W)$ est une famille couvrante, pour tout morphisme $Z \to W$ de CIEL(Y) la famille des $(T_i \wedge_W Z \to Z)$ est couvrante, comme il résulte du fait (voir [16], Prop. 1.13) que l'on a l'égalité $\mathscr{E}_{T_i} \cap \mathscr{E}_Z = \mathscr{E}_{T_i \wedge_W Z}$. Ici $T_i \wedge_W Z$ désigne le produit fibré dans la catégorie CIEL(W), qui est différent du produit fibré usuel; c'est en fait un transformé strict de celui-ci au sens de [21].

Remarques. — 1) J'ai appris que cette topologie, sous le nom de « topologie de Grothendieck - Hironaka », avait été considérée aussi par G. Maltsiniotis dans sa thèse (*cf.* [26], Appendice 3) pour l'étude des compactifications partielles d'un espace analytique. Je le remercie pour ses suggestions.

2) La topologie de la voûte étoilée $\pi_Y : \mathscr{E}_Y \to Y$ est un invariant fondamental des singularités de Y. Par exemple la connexité de la fibre $\pi_Y^{-1}(y) = \mathscr{E}_Y(y)$ au-dessus d'un point $y \in Y$ où Y est analytiquement irréductible est équivalente au théorème principal de Zariski. On peut se demander si pour tout $y \in Y$ la fibre $\mathscr{E}_Y(y)$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini et, si c'est le cas, quelle est l'interprétation de ses nombres de Betti supérieurs.

Définition **2.2.3.** — Soient Y un espace analytique réel ou complexe, X un espace topologique, $f: X \to Y$ une application continue, y_0 un point de Y et L un sous-ensemble fermé de $f^{-1}(y_0)$. Nous dirons que *f possède une propriété $\mathscr{C}$ localement en y_0 et* L *pour la topologie* CIEL s'il existe une famille finie de morphismes $(\pi_i : Z_i \to Y)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, dont chacun est un composé fini d'éclatements locaux dont le centre est rare, et pour chaque i un sous-ensemble compact K_i de Z_i de telle façon que $\bigcup_1^r \pi_i(K_i)$ soit un voisinage de y_0, un voisinage U_i de K_i dans Z_i et un voisinage V_i de $K_i \times_Y L$ dans $U_i \times_Y X$, tels que les morphismes $f_i : V_i \to U_i$ obtenus à partir de f par les changements de base π_i et restriction aient la propriété $\mathscr{C}$.

Remarques **2.2.3.1.** — 1) On peut voir ce travail-ci, ainsi que [27], comme des applications d'un principe heuristique implicite dans les travaux de Zariski sur l'uniformisation locale (voir [39] et [40]) et de Hironaka (voir [15], [16]); *dans le cas où le fermé* L *est compact, une propriété $\mathscr{C}$ de f qui est de nature locale sur la base et qui est vraie en restriction aux courbes tracées sur* Y, *c'est-à-dire localement sur le disque unité* **D** *de* **C** *après tout changement de base $h : \mathbf{D} \to Y$, est vraie localement pour la topologie* CIEL(Y). Par exemple (prenant pour f l'identité et pour $\mathscr{C}$ la propriété d'être non singulier) le théorème d'uniformisation locale en géométrie analytique (conséquence de la résolution des singularités; pour une belle démonstration directe d'un résultat plus fin, voir [2]) se traduit par l'assertion suivante : *tout espace analytique réduit est localement non singulier pour la topologie* CIEL.

Mais on peut penser aussi à la platitude (modulo torsion) de f, ou à la triangulabilité locale de sa partie réelle.

Ce principe heuristique s'appuie sur un résultat de finitude, conséquence en dernier ressort de la propreté de la variété de Riemann-Zariski ([40]) ou de son avatar en géométrie analytique, la voûte étoilée de Hironaka ([16]). En effet, bien que la voûte étoilée ne soit pas un espace analytique, les propriétés vérifiées par f lorsque Y est une courbe non singulière sont heuristiquement vérifiées par le morphisme $f_{\mathscr{E}_Y}$ déduit de f par le changement de base $\pi_Y : \mathscr{E}_Y \to Y$, pour deux raisons *a priori* différentes : d'une part $\mathscr{E}_Y$ est un espace annelé cohérent dont les anneaux locaux sont des anneaux de valuation (*cf.* [16] et [34]), et donc ressemblent à des anneaux locaux de courbes non singulières, et d'autre part les germes de morphismes $h : (\mathbf{D}, 0) \to Y$ se relèvent, *modulo ramification*, à $\mathscr{E}_Y$ et atteignent tous les points d'un sous-ensemble qui est dense dans $\mathscr{E}_Y$. La propreté de π_Y permet alors de « redescendre » la propriété localement sur Y pour la topologie CIEL.

2) Supposons que l'espace Y soit donné comme complexifié d'un espace analytique réel ${}^{\mathbf{R}}Y$; alors il existe une autoconjugaison complexe σ_Y de Y dont le sous-espace fixe est ${}^{\mathbf{R}}Y$, et celle-ci se relève en une autoconjugaison $\sigma_{\mathscr{E}}$ de la voûte étoilée $\mathscr{E}_Y$ (*cf.* [18] et [21]); les étoiles $\mathbf{e}$ telles que $\sigma_{\mathscr{E}}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ sont appelées *étoiles réelles* de Y. Elles correspondent aux suites d'éclatements locaux dont les centres sont invariants par les autoconjugaisons relevant (canoniquement) σ_Y. On a donc une topologie CIEL pour les

espaces analytiques réels et, comme il est prouvé dans [18] et [21], un théorème d'aplatissement réel.

3) Si l'on dit seulement « localement en y_0 », pour la topologie usuelle ou pour CIEL, il sera entendu que le fermé L est $f^{-1}(y_0)$.

Théorème **2.2.4.** — *Soient $f: X \to Y$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, y_0 un point de Y et L un sous-ensemble compact de $f^{-1}(y_0)$. Soient (Z_ω) et (T_τ) des stratifications de X et Y respectivement; il existe localement en y_0 et L pour la topologie CIEL(Y) des f-stratifications raffinant les stratifications données et telles que l'adhérence de chaque strate de X soit pseudo-plate sur son image.*

Si, de plus, les données sont obtenues par complexification de données réelles telles que leur dimension topologique soit égale à leur dimension algébrique, toutes les constructions peuvent être faites de façon à préserver ces propriétés.

La démonstration procède par récurrence en aplatissant successivement les strates de dimension relative décroissante, à des raffinements près. Nous sommes un peu gênés par le fait que la platitude ne passe pas aux composantes irréductibles de la source, et la conclusion est donc seulement la pseudo-platitude.

Remarquons aussi que, puisque l'on peut toujours trouver des stratifications compatibles avec une famille localement finie de sous-espaces analytiques à fermeture et frontière analytiques, on aurait pu dans l'énoncé remplacer les stratifications par de telles familles.

Définition **2.2.5.** — Soient $f: X \to Y$ un morphisme entre espaces analytiques réduits et $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ une partition analytique de X; nous dirons qu'elle a la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ si, pour tout α tel que $\dim_f X_\alpha \geqslant k+1$,

1) le sous-ensemble analytique $\overline{X}_\alpha$ de X est pseudo-plat sur son image,
2) pour tout point $y \in f(X_\alpha)$ l'inclusion ensembliste $|\overline{X_\alpha(y)}| \subset |\overline{X}_\alpha(y)|$ est une égalité,
3) si l'adhérence $\overline{X}_\alpha$ rencontre une composante connexe d'un X_β, elle la contient.

Montrons d'abord l'existence, sous des hypothèses convenables, de décomposition, satisfaisant ces conditions.

Lemme **2.2.6.** — *Soient k un entier et $f: X \to Y$ un morphisme analytique entre espaces réduits. Supposons qu'il existe une famille finie $(F_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ de sous-espaces analytiques fermés de X telle que l'on ait $X = \bigcup F_\varphi$ et que chaque F_φ soit pseudo-plat sur son image et de dimension relative k en tout point. Soient $(Z_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille localement finie de sous-ensembles analytiques de X à fermeture et frontière analytiques, y_0 un point de Y et L un sous-ensemble compact de $f^{-1}(y_0)$. Alors il existe localement en y_0 et L des f-partitions de X compatibles avec la famille (Z_ω) et satisfaisant la condition $\mathscr{P}_k$.*

On peut évidemment supposer que si $\varphi \neq \varphi'$, F_φ n'est pas contenu dans $F_{\varphi'}$, et aussi que les $f(F_\varphi)$ sont irréductibles; sinon on raffine la famille en remplaçant les F_φ

par leurs intersections avec les images inverses des composantes irréductibles des $f(F_\varphi)$ (*cf.* remarque 2.1.1.1). Les F_φ sont alors tous de dimension pure.

Notons $\hat{\Phi}$ l'ensemble des $\varphi \in \Phi$ tels que F_φ soit de dimension maxima et, pour chaque $\varphi \in \Phi$, notons C_φ le lieu critique de la restriction $f \mid F_\varphi$, c'est-à-dire l'ensemble des points de F_φ au voisinage desquels $f \mid F_\varphi$ n'est pas une submersion sur $f(F_\varphi)$. D'après la semi-continuité analytique du rang et le théorème de Sard, C_φ est un fermé analytique rare de F_φ et on a donc l'inégalité $\dim_f C_\varphi < k$. D'après [27], 4.3.3, il existe localement en y_0 et L un fermé analytique rare D_φ de $f(F_\varphi)$ contenant l'ensemble des points y de $f(F_\varphi)$ dont l'image réciproque dans C_φ est de dimension $\geqslant k$. De même, pour chaque ω tel que Z_ω ne contienne pas F_φ, il existe localement en y_0 et L un fermé analytique rare $B_{\varphi,\omega}$ de $f(F_\varphi)$ contenant les points y tels que la fibre $(F_\varphi \cap Z_\omega)(y)$ soit de dimension $\geqslant k$. Par ailleurs, pour $\varphi \in \hat{\Phi}$, notons $\Phi_{\varphi,=}$ l'ensemble des φ' tels que $f(F_\varphi) = f(F_{\varphi'})$ et $\Phi_{\varphi,\neq}$ l'ensemble des $\varphi' \in \Phi$ tels que $f(F_\varphi) \neq f(F_{\varphi'})$. Posons enfin

$$U_\varphi = f(F_\varphi) \backslash (\operatorname{sing} f(F_\varphi) \cup (\bigcup_{\varphi' \in \Phi_{\varphi,=},\, \omega \in \Omega} (D_{\varphi'} \cup B_{\varphi',\omega})) \cup (\bigcup_{\varphi' \in \Phi_{\varphi,\neq}} (f(F_\varphi) \backslash f(F_{\varphi'})))).$$

Par construction, si F_φ et $F_{\varphi'}$ ont la même image, on a $U_\varphi = U_{\varphi'}$, et sinon on a $f(F_{\varphi'}) \cap U_\varphi = \emptyset$.

Notons F°_φ l'ouvert des points non singuliers de F_φ et posons pour chaque $\varphi \in \hat{\Phi}$

$$F^\oslash_\varphi = f^{-1}(U_\varphi) \cap F^\circ_\varphi \backslash (C_\varphi \cup \operatorname{Sing} X \cup (\bigcup_{F_\varphi \not\subset Z_\omega} (F_\varphi \cap Z_\omega))).$$

Le morphisme $f \mid F^\oslash_\varphi : F^\oslash_\varphi \to U_\varphi$ est une submersion d'un ouvert analytique dense de F_φ sur U_φ et, pour raison de dimension, pour tout $y \in U_\varphi$, l'inclusion ensembliste $\overline{f^{-1}(y) \cap F^\oslash_\varphi} \subset f^{-1}(y) \cap F_\varphi$ est une égalité. Enfin $F^\oslash_\varphi$ est réunion des Z_ω qu'il rencontre. Posons $X' = X \backslash \bigcup_{\varphi \in \hat{\Phi}} F^\oslash_\varphi$; les $(F^\oslash_\varphi)_{\varphi \in \hat{\Phi}}$ forment une partition de $X \backslash X'$ et l'adhérence de chaque $F^\oslash_\varphi$ est F_φ, donc est ouverte sur son image et à fibres purement de dimension k. Grâce au lemme 2.1.5 nous pouvons choisir une $f \mid X'$-partition analytique $(X'_{\alpha'})$ de X' compatible avec les $Z_\omega \cap X'$ et les $f^{-1}(f(F_\varphi) \backslash U_\varphi)$ pour $\varphi \in \hat{\Phi}$. Remarquons maintenant que par construction le sous-espace analytique $X_1 = f^{-1}(f(X) \backslash U)$ est réunion des $F_{\varphi'}$ dont l'image est différente de celle de tous les $(F_\varphi)_{\varphi \in \hat{\Phi}}$; le morphisme $f_1 : X_1 \to f(X) \backslash U$ satisfait donc les mêmes hypothèses que f, tandis que son image est de dimension inférieure à celle de $f(X)$. Raisonnant par récurrence sur cette dimension, nous pouvons donc construire une f_1-partition $(X_{1,\beta})$ de X_1 compatible avec les sous-ensembles $X'_{\alpha'} \cap X_1$ et $Z_\omega \cap X_1$, et satisfaisant la condition $\mathscr{P}_k$. La partition de X formée des $(X_{1,\beta})$, des $(X'_{\alpha'} \backslash X_1)$ et des $(F^\oslash_\varphi)_{\varphi \in \hat{\Phi}}$ est bien une f-partition satisfaisant $\mathscr{P}_k$.

Corollaire **2.2.6.1.** — *Soient k un entier, $f : X \to Y$ un morphisme analytique, $(F_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$ une famille de sous-espaces analytiques fermés de X dont chacun est pseudo-plat sur son image et de dimension relative k en tout point. Soit $(Z_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une f-partition de X satisfaisant la condition $\mathscr{P}_{k+1}$ et telle que chaque composante connexe de dimension relative k d'une partie Z_ω soit contenue dans un des F_φ. Soient y_0 un point de Y et L un sous-ensemble compact de $f^{-1}(y_0)$. Alors* *il existe localement en y_0 et* L *des f-partitions de* X *compatibles avec la famille* (Z_ω) *et satisfaisant la condition* $\mathscr{P}_k$.

Posons $F = \bigcup_{\varphi \in \Phi} F_\varphi$ et considérons la partition $\mathbf{P}'$ suivante de X : pour toute composante connexe $Z_\omega^{(c)}$ de dimension relative $\geqslant k+1$ d'une partie Z_ω, les composantes connexes de $Z_\omega^{(c)} \setminus F$ appartiennent à $\mathbf{P}'$. Les composantes connexes des parties de la partition de F compatible avec les $Z_\omega^{(c)}$ contenues dans F construite dans le lemme précédent font partie de $\mathbf{P}'$, et pour chaque composante connexe $Z_\omega^{(c)}$ d'un Z_ω qui est de dimension relative $< k$ et n'est pas contenue dans F, on prend dans $\mathbf{P}'$ les parties contenues dans $Z_\omega^{(c)}$ de la partition de $\overline{Z}_\omega^{(c)}$ compatible avec $\overline{Z}_\omega^{(c)} \setminus Z_\omega^{(c)}$ et $(\overline{Z}_\omega^{(c)} \setminus Z_\omega^{(c)}) \cap F$ construite grâce au lemme 2.1.5 appliqué à $\overline{Z}_\omega^{(c)}$.

Cette partition satisfait la condition $\mathscr{P}_k$.

En effet, si $Z_\omega^{(c)}$ est de dimension relative $\geqslant k+1$, on a $f(Z_\omega^{(c)} \setminus F) = f(Z_\omega^{(c)})$ par raison de dimension, $Z_\omega^{(c)}$ est encore pseudo-plat sur son image puisque F est fermé et de plus retirer une union de parties fermées pseudo-plates sur leur image et de dimension relative k n'affecte pas la condition 2) de 2.2.5 puisque cela ne change pas l'adhérence des fibres. Pour les parties de dimension relative k, les conditions voulues résultent du lemme précédent, et enfin la condition 3) pour les strates de dimension relative $< k$ résulte de la compatibilité exigée.

Lemme **2.2.7.** — *Dans la situation de* 2.2.4, *et supposant la condition* $\mathscr{P}_{k+1}$ *vérifiée, il existe localement en* y_0 *et* L *pour la topologie* CIEL(Y) *des stratifications de* X *et* Y *raffinant les stratifications données et vérifiant la condition* $\mathscr{P}_k$.

La preuve va utiliser les lemmes 2.2.9 à 2.2.13, après une définition.

Définition **2.2.8.** — Soit **e** une étoile de Y au-dessus de y_0. Nous dirons qu'une suite d'éclatements locaux $(W_i, \pi_i, U_i, E_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ appartenant à **e** (*cf.* [16]) est *k-permise* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1) Pour chaque i, le centre d'éclatement E_i est rare dans U_i.

Pour énoncer la seconde condition, notons ω_i le morphisme composé

$$\pi_0 \circ \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_i : W_i \to Y,$$

X_i le produit fibré de X et W_i au-dessus de Y et $\widetilde{\omega}_i : X_i \to X$, $f_i : X_i \to W_i$ les deux projections. On note encore E^i la réunion des images réciproques dans U_i des diviseurs exceptionnels E_j pour $j < i$, et $V_{\alpha,i}$ l'adhérence dans X_i de $\widetilde{\omega}_i^{-1}(\overline{X}_\alpha) \cap f_i^{-1}(E_i \setminus E^i)$. Remarquons que l'image de $V_{\alpha,i}$ est contenue dans E_i et que $V_{\alpha,i}$ n'a pas nécessairement la même dimension relative que X_α. Notons enfin $(\hat{\overline{X}}_\alpha)_i$ le transformé strict de $\overline{X}_\alpha$ par le morphisme ω_i et y_i le point de W_i marqué par l'étoile **e**. La seconde condition est alors :

2) Pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant m$, et chaque α tel que $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, on a localement en y_i et $L \times \{y_i\} \subset f_i^{-1}(y_i)$ la propriété suivante : si $(\hat{\overline{X}}_\alpha)_i$ n'est pas vide, ou bien il est

plat sur son image, ou bien ce n'est pas le cas et alors $V_{\alpha,i}$, s'il n'est pas vide, est plat sur son image.

Lemme **2.2.9.** — *Toute étoile de* Y *contient une suite finie k-permise d'éclatements locaux au bout de laquelle pour chaque* α *tel que l'on ait* $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, *le transformé strict* $(\hat{\overline{X}}_\alpha)_m$ *est plat sur son image.*

Démonstration. — Notons d'abord $A(k)$ l'ensemble des indices α tels que l'on ait $\dim_f X_\alpha \geqslant k$. Soit **e** l'étoile fixée; construisons la suite d'éclatements cherchée par récurrence comme ceci : supposons avoir construit cette suite jusqu'à W_i, et considérons le transformé strict $\hat{X}_i \subset X_i$ de X par le morphisme ω_i (*cf.* [21]). Notons $\hat{f}_i : \hat{X}_i \to W_i$ le morphisme induit par f_i et $\hat{\omega}_i : \hat{X}_i \to X$ le morphisme induit par $\tilde{\omega}_i$. Notons L_i le sous-ensemble compact $(L \times \{y_i\}) \cap \hat{X}_i$ de $f_i^{-1}(y_i)$. Pour chaque $\alpha \in A(k)$, soit $P_{\alpha,i}$ le platificateur *(cf. loc. cit.)* du morphisme $\hat{f}_i$ en tout point de L_i, c'est-à-dire l'intersection des platificateurs aux points de L_i. Soit P_i^0 le germe en y_i de l'intersection des $P_{\alpha,i}$ pour $\alpha \in A(k)$. Soit maintenant U_i un voisinage de y_i dans W_i assez petit pour que P_i^0 soit représenté par un sous-espace fermé de U_i. Notant E^i la réunion des images réciproques dans U_i des centres d'éclatement E_j pour $j < i$, et remplaçant dorénavant W_i par U_i, on a l'égalité $(\hat{\overline{X}}_\alpha)_i =$ adhérence dans $\hat{X}_i$ de $\hat{\omega}_i^{-1}(\overline{X}_\alpha) \cap \hat{f}_i^{-1}(U_i \setminus E^i)$. Remarquons d'ailleurs que dès lors que l'on s'est restreint au-dessus du complémentaire de E^i, il revient au même de prendre les adhérences dans X_i ou dans $\hat{X}_i$; en particulier $V_{\alpha,i}$ est l'adhérence dans $\hat{X}_i$ de $\hat{\omega}_i^{-1}(\overline{X}_\alpha) \cap \hat{f}_i^{-1}(E_i \setminus E^i)$.

Notons S_i^0 l'intersection $P_i^0 \cap \overline{U_i \setminus P_i^0}$, pour chaque $\alpha \in A(k)$, posons $V_{\alpha,i}^0 = (\hat{\overline{X}}_\alpha)_i$ et définissons par récurrence pour $j > 0$ les sous-ensembles $V_{\alpha,i}^j \subset \hat{X}_i$, $L_{\alpha,i}^j \subset L_i$, $P_{\alpha,i}^j \subset U_i$, et $P_i^j \subset U_i$, $S_i^j \subset U_i$, comme ceci :

Supposons les avoir tous définis jusqu'à l'exposant $j - 1$; notons $V_{\alpha,i}^j$ l'adhérence de l'ensemble $|\hat{\omega}_i^{-1}(\overline{X}_\alpha) \cap \hat{f}_i^{-1}(S_i^{j-1} \setminus E^i)|$, posons $L_{\alpha,i}^j = L \times \{y_i\} \cap V_{\alpha,i}^j$ et soit $P_{\alpha,i}^j$ le platificateur du morphisme induit $f_i : V_{\alpha,i}^j \to |S_i^{j-1}|$ en tout point de $L_{\alpha,j}^j$. Soit P_i^j l'intersection des germes en y_i des platificateurs $P_{\alpha,i}^j$; rétrécissons U_i de telle façon que ce germe soit représenté par un sous-espace analytique fermé de U_i, encore noté P_i^j, et définissons enfin S_i^j comme l'intersection $P_i^j \cap \overline{|S_i^{j-1}| \setminus P_i^j}$. On a alors les inclusions

$$S_i^j \subset P_i^j \subset |S_i^{j-1}|$$

et S_i^j est rare dans S_i^{j-1}. Nous noterons $S_i^{j(i)}$ le dernier S_i^j non vide, et posons $S_i^{-1} = U_i$. Par construction, si $P_i^{j(i)+1}$ n'est pas vide, on a l'égalité ensembliste $|P_i^{j(i)+1}| = |S_i^{j(i)}|$ et le morphisme induit $\hat{f}_i : V_{\alpha,i}^{j(i)+1} \to |S_i^{j(i}|$ est plat dans un voisinage de $L_{\alpha,i}^j$ pour tout $\alpha \in A(k)$. Si $P_i^{j(i)+1}$ est vide, il existe un $\alpha \in A(k)$ tel que $V_{\alpha,i}^{j(i)+1}$ soit vide au voisinage de L_i.

Cela implique que, pourvu que $S_i^{j(i)}$ soit d'intérieur vide dans U_i (c'est-à-dire $j(i) \neq -1$), au prix d'un rétrécissement supplémentaire de U_i, pour tout sous-espace

$E_i \subset U_i$ de support $S_i^{j(i)}$, l'éclatement de E_i continue la suite donnée en une suite k-permise. En effet, pour $\alpha \in A(k)$, ou bien le transformé strict $(\hat{\hat{X}}_\alpha)_i$ de $\overline{X}_\alpha$ est plat sur W_i au voisinage de L_i, et alors S_i^0 est vide et $j(i) = -1$, ou bien ce n'est pas le cas et alors ou bien $V_{\alpha,i}$, qui est égal à $V_{\alpha,i}^{j(i)+1}$ par définition, est vide, ou bien il ne l'est pas et alors il est plat sur son image $| S_i^{j(i)} |$. Remarquons que puisque S_i^j est rare dans S_i^{j-1}, on a les inégalités $-1 \leqslant j(i) \leqslant \dim Y$. Si $j(i)$ vaut -1, ou bien P_i^0 est vide et il existe alors $\alpha \in A(k)$ tel que $(\hat{\hat{X}}_\alpha)_i$ ne rencontre pas L_i et, au prix d'un rétrécissement de U_i, on se ramène au cas où cet α n'intervient pas; ou bien P_i^0 n'est pas vide, et alors P_i^0 coïncide ensemblistement avec U_i au voisinage de y_i, et l'on a prouvé le lemme en prenant $m = i$. On poursuit cette alternative jusqu'à ce que l'on ait $j(i) \geqslant 0$, ou qu'aucun $\alpha \in A(k)$ n'intervienne au voisinage de y_i, ou enfin que U_i soit assez petit pour que tous les $(\hat{\hat{X}}_\alpha)_i$ soient plats sur U_i.

On peut donc toujours supposer avoir l'inégalité $j(i) \geqslant 0$ tant que l'on n'est pas au bout de la suite d'éclatements locaux.

Il faut maintenant produire un éclatement de centre $E_i \subset U_i$ ensemblistement égal à $S_i^{j(i)}$, de telle façon qu'une suite finie de tels éclatements nous amène bien à l'égalité $j(i) = -1$.

Pour cela, utilisons le lemme suivant dû à Hironaka :

Lemme **2.2.10.** ([15], Lemma 3.2, p. 531) — *Soient* S *et* T *deux sous-espaces analytiques complexes d'un espace analytique* W, *définis respectivement par les faisceaux d'idéaux* $\mathscr{I}$ *et* $\mathscr{J}$, *et soit* U *un ouvert relativement compact de* W. *Il existe un entier* $a = a(W, U, \mathscr{I}, \mathscr{J})$ *qui a la propriété suivante :*

Pour tout $b \geqslant a$, *soit* $\pi_b : W'_b \to W$ *l'éclatement de* $\mathscr{I} + \mathscr{J}^b$, *et soit* S'_b *le transformé strict de* S *par* π_b; *le morphisme* $\pi_b \,|\, (W'_b \setminus S'_b) \cap \pi_b^{-1}(U)$ *se factorise à travers l'éclatement de* $\mathscr{I} \,|\, U$ *dans* U. *Si l'on préfère, l'idéal* $\mathscr{I}$ *devient inversible en tout point de* $\pi_b^{-1}(U) \setminus S'_b$.

Supposons désormais chacun des ouverts U_i^1 relativement compact dans W_i, ce qui ne cause aucune perte de généralité, et notons $\mathscr{I}_{i,j}$ l'idéal définissant le sous-espace analytique S_i^j de l'ouvert U_i. Définissons par récurrence descendante à partir de $j(i)$ des entiers $a(j)$ comme ceci : on pose $a(j(i)) = a(W_i, U_i, \mathscr{I}_{i,j(i)-1}, \mathscr{I}_{i,j(i)})$ et, supposant avoir défini les entiers $a(j)$ pour $j(i) \geqslant j \geqslant k+1$, on introduit l'idéal

$$\mathscr{J}_k = \mathscr{I}_{i,k} + [\mathscr{I}_{i,k+1} + \dots + [\mathscr{I}_{i,j(i)-1} + \mathscr{I}_{i,j(i)}^{a(j(i))}]^{a(j(i)-1)}] \dots]^{a(k+1)}$$

et on pose $a(k) = a(W_i, U_i, \mathscr{I}_{i,k-1}, \mathscr{J}_k)$.

Soit E_i le sous-espace analytique fermé de U_i défini par l'idéal $\mathscr{J}_0$; il coïncide ensemblistement avec $S_i^{j(i)}$ et son éclatement prolonge donc la suite donnée en une suite k-permise.

Notons $\pi_i : W_{i+1} \to W_i$ cet éclatement et y_{i+1} le point de W_{i+1} piqué par l'étoile **e**. Gardons les notations introduites ci-dessus, en particulier pour la réunion des images inverses des centres d'éclatement, ce qui donne $E^{i+1} = \pi_i^{-1}(E_i) \cup \pi_i^{-1}(E^i)$, et $(\hat{\overline{X}}_\alpha)_{i+1}$ pour les transformés stricts des $\overline{X}_\alpha$ par le morphisme $\omega_{i+1} = \omega_i \circ \pi_i$.

Lemme **2.2.11.** — *Pour* $-1 \leqslant r \leqslant j(i)$, *soient* $|\hat{S}_i^r|$ *le transformé strict de* $|S_i^r|$ *par le morphisme* π_i *et* $\hat{P}_i^r$ *celui de* P_i^r. *On a alors :*

A) Si $y_{i+1} \in |\hat{S}_i^r|$ *pour un* $r < j(i)$, *on a l'égalité* $|S_{i+1}^r| = |\hat{S}_i^r|$ *au voisinage de* y_{i+1} *et* $V_{\alpha,i+1}^{r+1}$ *est le transformé strict de* $V_{\alpha,i}^{r+1}$;

B) Si $y_{i+1} \in |\hat{S}_i^{r-1}| \backslash |\hat{S}_i^r|$ *pour un* r *tel que* $0 \leqslant r \leqslant j(i)$, *on a l'alternative*

B 1) $y_{i+1} \notin \hat{P}_i^r$; *il existe alors un indice* $\alpha \in A(k)$ *et un point du compact* $L_{\alpha,i+1}^r$ *au voisinage duquel l'inclusion naturelle*

$$f_{i+1}^{-1}(y_{i+1}) \subset f_i^{-1}(y_i)$$

est stricte;

B 2) $y_{i+1} \in \hat{P}_i^r$; *on a alors au voisinage de* y_{i+1} *les égalités ensemblistes*

$$|P_{i+1}^r| = |\hat{P}_i^r| = |S_{i+1}^{r-1}| = |\hat{S}_i^{r-1}|$$

et donc les inégalités $j(i+1) \leqslant r-1 \leqslant j(i)$.

Pour démontrer cette assertion, le résultat clé est le suivant :

Lemme **2.2.12.** — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme d'espaces analytiques réduits,* y *un point de* Y *et* L *un sous-ensemble compact de* $f^{-1}(y)$ *tel que le* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-module* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit sans torsion pour tout* $x \in L$. *Notons* $P \subset Y$ *un représentant du platificateur de* f *en tout point de* L *et* $\pi : W \to Y$ *un éclatement local de centre* E *contenu dans* P. *Notons* P' *le transformé strict de* P *par* π *et supposons de plus qu'en tout point de* $W \backslash P'$ *l'idéal* $\pi^* \mathcal{I}_P . \mathcal{O}_W$ *est inversible comme* $\mathcal{O}_W$*-module. Alors :*

a) (version locale du lemme 4.4.5 de [15]) *Etant donné un point* $w \in P'$, *le platificateur* $\hat{P}$ *du morphisme* $\hat{f} : \hat{X} \to W$ *transformé strict de* f *par* π *en tous les points de* $\hat{X} \cap (L \times \{w\})$ *contient* P' *au voisinage de* w; *de plus, on a l'égalité ensembliste* $|P'| = |\hat{P}|$ *au voisinage de* w.

b) Etant donné un point $w \in W \backslash P'$, *il existe au moins un point* $x \in L$ *tel que, si nous notons* x_1 *le point* $x \times_Y w$, *l'inclusion de germes* $(\hat{f}^{-1}(w), x_1) \subset (f^{-1}(w), x_1)$ *induite par l'inclusion naturelle de* $\hat{X}$ *dans le produit fibré* $\tilde{X} = X \times_Y W$ *est stricte.*

Prouvons *a)* : remarquons que l'inclusion $\hat{X} \subset \tilde{X}$ induit un isomorphisme en restriction au-dessus de P', au voisinage de $L \times \{w\}$. En effet, la W-torsion de $\tilde{X}$ est supportée dans $\pi^{-1}(E)$ et puisque, par définition du transformé strict, le sous-espace $\pi^{-1}(E) \cap P'$ de P' est rare, le noyau de la surjection naturelle $\mathcal{O}_{\tilde{X}} | P' \to \mathcal{O}_{\hat{X}} | P'$ est formé d'éléments de $\mathcal{O}_{P'}$-torsion. Par ailleurs, puisque P est le platificateur de f et que P' est contenu dans $\pi^{-1}(P)$, le morphisme $\tilde{X} | P' \to P'$ est plat au voisinage de $L \times \{w\}$, donc sans torsion, d'où l'isomorphisme. Ceci implique que le morphisme $\hat{f} : \hat{X} | P' \to P'$ induit par la projection $\tilde{f} : \tilde{X} \to W$ est plat au voisinage de $L \times \{w\}$. Le platificateur $\hat{P}$ du morphisme $\hat{f} : \hat{X} \to W$ en w relativement à $L \times \{w\}$ contient donc P' au voisinage de w. Pour montrer que $\hat{P}$ et P' ont même ensemble sous-jacent au voisinage de w, supposons le contraire; il existe alors un chemin analytique complexe $h : (\mathbf{D}, 0) \to (\hat{P}, w)$ tel que $h^{-1}(P') = 0$. Si nous posons $h' = \pi \circ h$ et notons $\hat{X}_h$ et $X_{h'}$ les espaces au-dessus de $\mathbf{D}$ déduits de $\hat{X}$ et X par les changements de base h et h', et $\hat{\mathcal{O}}_h$, $\mathcal{O}_{h'}$ les faisceaux structuraux correspondants, nous avons une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$-modules :

$$0 \to K \to \mathcal{O}_{h'} \to \hat{\mathcal{O}}_h \to 0$$

qui, puisque $\tilde{X}$ et $\hat{X}$ coïncident au-dessus de P', induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{h'} \otimes \mathbf{C} \overset{\approx}{\to} \hat{\mathcal{O}}_h \otimes \mathbf{C}$$

après tensorisation avec $\mathbf{C}$ au-dessus de $\mathcal{O}_{\mathbf{C},0}$. Puisque par construction la suite

$$0 \to K \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \mathbf{C} \to \mathcal{O}_{h'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \mathbf{C} \to \hat{\mathcal{O}}_h \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \mathbf{C} \to 0$$

est encore exacte, on a $K \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \mathbf{C} = 0$. Par le lemme de Nakayama ceci implique la nullité du $\mathcal{O}_{\mathbf{D},0}$-module K et donc l'isomorphie de $\hat{\mathcal{O}}_h$ et $\mathcal{O}_{h'}$ au-dessus d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{D}$. D'après la propriété universelle du platificateur, quitte à rétrécir $\mathbf{D}$, l'image de h' est contenue dans P, ce qui signifie que l'image de h est contenue dans le diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(E)$, et elle ne rencontre P' qu'en w. Par le second résultat de la théorie du platificateur (*cf.* [21], théorème 2 et [18], lemme 4.14) et le fait que par hypothèse en tout point hors de P' le morphisme π se factorise à travers l'éclatement de P dans Y, ceci implique que pour $t \in \mathbf{D}^*$ le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}_{h'} \to \hat{\mathcal{O}}_h$ est non nul en au moins un point de $X_{h'}$ se projetant sur t, d'où la contradiction cherchée.

Prouvons *b)* : puisque hors de P' le morphisme π se factorise à travers l'éclatement de P dans Y l'assertion *b)* résulte de *loc. cit.*

Nous pouvons maintenant prouver le lemme 2.2.11 par récurrence sur l'entier r. Pour $r = -1$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc $r \geqslant 0$ et remarquons que nous avons les inclusions

$$\hat{S}_i^r \subset \hat{P}_i^r \subset \hat{S}_i^{r-1}.$$

Supposons l'assertion vérifiée jusqu'à $r-1$, et supposons d'abord que $y_{i+1} \in \hat{S}_i^r$. On a alors $y_{i+1} \in \hat{S}_i^{r-1}$ et par l'hypothèse de récurrence, au voisinage de y_{i+1}, on a l'égalité $|S_{i+1}^{r-1}| = |\hat{S}_i^{r-1}|$. Montrons que l'on a aussi $|S_{i+1}^r| = |\hat{S}_i^r|$.

Pour cela, remarquons d'abord qu'à cause de la définition de $\mathcal{J}_0$ et du lemme 2.2.10, l'idéal engendré *via* π_i par $\mathcal{J}_{i,r}$ sur $\hat{S}_i^{r-1}$ élevé à la puissance $\sum_{r+1 \leqslant s \leqslant j(i)} a(s)$ est inversible en tout point hors de $\hat{S}_i^r$, donc cet idéal est lui-même inversible en tous les points de $\hat{S}_i^{r-1} \setminus \hat{S}_i^r$. Le morphisme $\hat{S}_i^{r-1} \setminus \hat{S}_i^r \to S_i^{r-1}$ induit par π_i se factorise donc par l'éclatement de $\mathcal{J}_{i,r}$ dans S_i^{r-1}.

Le fait que l'idéal $\mathcal{J}_{i,r}$ soit, modulo $\mathcal{J}_{i,r-1}$, la somme de l'idéal $\mathcal{J}_P$ de P_i^r et de l'idéal $\mathcal{J}_S$ de $\overline{|S_i^{r-1}| \setminus P_i^r}$ implique aussi que $\hat{S}_i^{r-1} \setminus \hat{S}_i^r$ est la réunion disjointe des transformés stricts par π de P_i^r et de $\overline{|S_i^{r-1}| \setminus P_i^r}$.

Cela résulte aussitôt du fait que dans un anneau local tout idéal de type fini $(g_1, \ldots, g_p)$ qui est inversible est engendré par l'un des g_k.

Il en résulte qu'en tout point de $\hat{S}_i^{r-1} \backslash \hat{P}_i^r$ l'idéal $\mathscr{I}_P . \mathcal{O}_{S_{i+1}^{r-1}}$ est inversible. D'après le *a)* du lemme précédent, en tout point de $\hat{P}_i^r$, et en particulier au voisinage de tout point de $\hat{S}_i^r$ près de y_{i+1}, on a l'égalité $|\hat{P}_i^r| = |P_{i+1}^r|$ dans $|S_{i+1}^{r-1}| = |\hat{S}_i^{r-1}|$. On en déduit l'égalité $|S_{i+1}^r| = |\hat{S}_i^r|$ au voisinage de y_{i+1}, et par la construction des $V_{\alpha,i}^r$, cela entraîne l'égalité de $V_{\alpha,i+1}^{r+1}$ et du transformé strict de $V_{\alpha,i}^{r+1}$ par π_i. Ceci prouve que l'on est dans le cas A).

Si $y_{i+1} \in \hat{S}_i^{r-1}$ n'est pas dans $\hat{S}_i^r$, l'alternative est la suivante :

— si y_{i+1} est hors de $\hat{P}_i^r$, on applique la partie *b)* du lemme 2.2.11 au morphisme $\hat{S}_i^{r-1} \to S_i^{r-1}$ et l'on se trouve dans le cas *B 1)*;

— si y_{i+1} est dans $\hat{P}_i^r \backslash \hat{S}_i^{r-1}$, on peut encore appliquer la partie *a)* de ce lemme; on a l'égalité $|\hat{P}_i^r| = |P_{i+1}^r|$ au voisinage de y_{i+1}. De plus, puisque nous sommes hors de $\hat{S}_i^r$, la remarque sur l'éclatement des sommes d'idéaux faite plus haut montre que $|\hat{P}_i^r|$ est un voisinage de y_{i+1} dans $\hat{S}_i^{r-1}$, ce qui implique que nous sommes dans le cas *B 2)*.

Les inégalités proviennent de la définition de $j(i)$ et du fait que $\hat{S}_i^{j(i)}$ est vide.

Achevons maintenant la preuve du lemme 2.2.9.

Il faut prouver que pour i assez grand, on a $j(i) = -1$. Supposons qu'au contraire la suite d'éclatements construite soit infinie, donc que l'on ait $j(i) \geqslant 0$ pour tout i. Définissons pour chaque i l'entier $\rho(i)$ par l'inclusion $y_{i+1} \in \hat{S}_i^{\rho(i)} \backslash \hat{S}_i^{\rho(i)+1}$. Puisque $\hat{S}_i^{j(i)}$ est vide on a pour tout i les inégalités

$$-1 \leqslant \rho(i) \leqslant j(i) - 1.$$

Soit ρ le plus petit entier compris entre -1 et $\dim Y$ et tel qu'il existe une infinité d'indices i tels que l'on ait $\rho(i) = \rho$. Par définition il existe un entier $i_0 \geqslant 0$ tel que l'on ait

$$\rho = \min\{ r \mid \text{il existe } i \geqslant i_0 \text{ tel que } \rho(i) = r \}.$$

Pour $i \geqslant i_0$, on a l'inégalité $\rho \leqslant j(i) - 1$ et l'inclusion $y_{i+1} \in \hat{S}_i^{\rho(i)}$. D'après le lemme 2.2.11, cas *A)*, le sous-espace $V_{\alpha,i+1}^{\rho+1}$ est le transformé strict par π_i de $V_{\alpha,i}^{\rho+1}$. Pour un indice $i \geqslant i_0$ tel que $\rho(i) = \rho$, le point y_{i+1} n'est pas dans $\hat{P}_i^{\rho+1}$. Sinon, d'après le lemme 2.2.11, cas *B 2)*, on aurait $\rho \geqslant j(i+1)$, alors que $\rho \leqslant j(i+1) - 1$. Ainsi, pour tout $i \geqslant i_0$, nous sommes dans la situation *A)* du lemme 2.2.11 relativement à $\hat{S}_i^\rho$, et nous sommes dans la situation *B 1)* relativement à $\hat{P}_i^{\rho+1}$ pour les indices i tels que $\rho(i) = \rho$. Nous avons donc, d'après le choix de ρ, une suite d'inclusions strictes de fibres pour au moins un $\alpha \in A(k)$. Puisque L est compact, il existe un indice $i_1 \geqslant i_0$ tel que pour $i \geqslant i_1$ l'intersection $V_{\alpha,i}^{\rho+1} \cap L_i$ soit vide. Ceci implique que $S_i^{\rho+1}$ est vide, d'où l'inégalité $\rho \geqslant j(i)$, qui fournit la contradiction cherchée.

Avant d'achever la démonstration du lemme 2.2.7, examinons la stabilité par changement de base des hypothèses de ce lemme.

Lemme **2.2.13.** — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme analytique et* $X_\alpha \subset X$ *un sous-ensemble analytique à fermeture et frontière analytiques. Supposons que* $\overline{X}_\alpha$ *soit ouvert sur son image et que pour tout* $y \in f(X_\alpha)$ *l'inclusion naturelle* $\overline{|f^{-1}(y) \cap X_\alpha|} \subset |f^{-1}(y) \cap \overline{X}_\alpha|$ *est une égalité. Soient* $\omega : W \to Y$ *un morphisme analytique et* $S_\beta \subset W$ *un sous-ensemble analytique à fermeture et frontière analytiques contenu dans* $\omega^{-1}(f(X_\alpha))$. *Alors l'inclusion*

$$\overline{|X_\alpha \times_Y S_\beta|} \subset |\overline{X}_\alpha \times_Y \overline{S}_\beta|$$

est une égalité. En particulier, si $\overline{X}_\alpha$ *est irréductible et pseudo-plat sur son image, le sous-espace* $\overline{|X_\alpha \times_Y S_\beta|}$ *de* $X \times_Y W$ *est pseudo-plat sur son image* $\overline{S}_\beta$.

D'après l'hypothèse, et au vu de l'inclusion $S_\beta \subset \omega^{-1}(f(X_\alpha))$, les deux ensembles analytiques considérés coïncident au-dessus de S_β, et donc $\overline{|X_\alpha \times_Y S_\beta|}$ est réunion de composantes irréductibles de $|\overline{X}_\alpha \times_Y \overline{S}_\beta|$. Toute composante irréductible de ce dernier espace qui n'est pas dans $\overline{|X_\alpha \times_Y S_\beta|}$ a donc son image dans $\overline{S}_\beta \backslash S_\beta$, mais l'existence de telles composantes contredirait le fait qu'il est ouvert sur son image, d'où le résultat d'après 2.1.1.1.

Remarque **2.2.13.1.** — En particulier, si le morphisme ω est une modification (par exemple un éclatement), le transformé strict $\hat{\overline{X}}_\alpha$ de $\overline{X}_\alpha$ par ω est encore pseudo-plat sur son image; il suffit d'appliquer le lemme précédent en prenant pour S_β l'image inverse par ω de $f(X_\alpha) \backslash E$, où E est le lieu d'indétermination de la modification (ou le centre de l'éclatement).

Lemme **2.2.14.** — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme analytique entre espaces réduits,* (X_α) *une f-partition de* X *satisfaisant la condition* $\mathscr{P}_k$ *et* $\pi : W \to Y$ *un morphisme analytique, avec* W *réduit. Pour les* α *tels que* $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, *d'après l'hypothèse,* $f(\overline{X}_\alpha)$ *et* $f(\overline{X}_\alpha) \backslash f(X_\alpha)$ *sont des sous-espaces analytiques fermés de* Y. *Soit* (W_ω) *une stratification analytique de* W *compatible avec ces* $\pi^{-1}(f(\overline{X}_\alpha))$ *et* $\pi^{-1}(f(\overline{X}_\alpha) \backslash f(X_\alpha))$. *La* f_W*-partition naturelle de* $X \times_Y W$ *obtenue en prenant pour parties les* $X_\alpha \times_Y W_\omega$ *tels que* $\dim_f X_\alpha \geqslant k$ *d'une part, et les parties d'une partition par le rang de* f_W (cf. le lemme 2.1.5) *des* $X_\alpha \times_Y W_\omega$ *tels que* $\dim_f X_\alpha < k$, *d'autre part, satisfait encore la condition* $\mathscr{P}_k$.

La condition 1) de $\mathscr{P}_k$ résulte de 2.1.1.1 et 2.2.13, la condition 2) et la condition 3) résultent rapidement de 2.2.13.

Définition **2.2.15.** — Reprenons les hypothèses et notations de la définition 2.2.5, avec la condition $\mathscr{P}_{k+1}$. Soient $\pi : W \to Y$ un morphisme analytique et (W_ω) une stratification de W compatible avec les $\pi^{-1}(f(\overline{X}_\alpha))$ et $\pi^{-1}(f(\overline{X}_\alpha) \backslash f(X_\alpha))$ pour les α tels que $\dim_f X_a \geqslant k+1$. Nous dirons qu'une f_W-partition de la projection $f_W : X \times_Y W \to W$ raffinant la stratification de W par les W_ω est *admissible* si ses strates de dimension relative

$\geqslant k+1$ sont les produits fibrés $X_\alpha \times_Y W_\omega$ tels que W_ω soit contenu dans $\pi^{-1}(f(X_\alpha))$ et que l'on ait $\dim_f X_\alpha \geqslant k+1$.

Pour obtenir de telles partitions, il suffit de partitionner les sous-espaces $X_\alpha \times_Y W_\omega$ tels que $\dim_f X_\alpha \leqslant k$ de telle façon que le rang de f_W soit constant sur chaque partie; cela est possible d'après le lemme 2.1.5. Les partitions admissibles de f_W satisfont encore la condition $\mathscr{P}_{k+1}$ d'après le lemme 2.2.14.

Achevons la preuve du lemme 2.2.7 : pour chaque étoile $\mathbf{e}$ de Y, le lemme 2.2.9 nous donne une suite finie k-permise d'éclatements locaux, dont nous allons noter le composé $\pi_\mathbf{e} : Y_\mathbf{e} \to Y$, telle que pour chaque α tel que $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, le transformé strict $\hat{\overline{X}}_{\alpha,\mathbf{e}}$ de $\overline{X}_\alpha$ par $\pi_\mathbf{e}$ soit pseudo-plat sur son image. Le théorème de propreté de la voûte étoilée (*cf.* [16]) implique que pour chaque point y_0 de Y il existe un ensemble fini d'étoiles tel que dans chacun des $Y_\mathbf{e}$ correspondants il existe un sous-ensemble relativement compact $K_\mathbf{e}$, de telle façon que la réunion des images $\pi_\mathbf{e}(K_\mathbf{e})$ soit un voisinage de y_0 dans Y. Choisissons dans chacun de ces $Y_\mathbf{e}$ une stratification (C_κ) compatible avec les images réciproques dans $Y_\mathbf{e}$ des centres des éclatements intervenant dans la construction de $Y_\mathbf{e}$ et les $\pi_\mathbf{e}^{-1}(f(\overline{X}_\alpha))$ et $\pi_\mathbf{e}^{-1}(f(\overline{X}_\alpha)\backslash f(X_\alpha))$. Posons $X_\mathbf{e} = X \times_Y Y_\mathbf{e}$, notons $f_\mathbf{e}$ le morphisme de projection $X_\mathbf{e} \to Y_\mathbf{e}$, et choisissons une $f_\mathbf{e}$-partition admissible de $X_\mathbf{e}$. Chaque partie de dimension relative $\geqslant k+1$ est de la forme $X_\alpha \times_Y C_\kappa$, et son adhérence est pseudo-plate sur son image d'après le lemme 2.2.13. Chaque partie de dimension relative k est, d'après la constance du rang, contenue dans une partie de la forme $X_\alpha \times_Y C_\kappa$ où X_α est de dimension relative k. Reprenons les notations de 2.2.8 pour la suite d'éclatements locaux aboutissant à $Y_\mathbf{e}$, et soit i l'entier tel que la partie C_κ soit contenue dans l'image inverse dans $Y_\mathbf{e}$ du centre d'éclatement E_i, mais non dans celle de E_j pour $j < i$. Le produit fibré $X_\alpha \times_Y C_\kappa$ est contenu dans l'image inverse dans $X_\mathbf{e}$ du sous-ensemble analytique $\tilde{\omega}_i^{-1}(\overline{X}_\alpha) \cap f_i^{-1}(E_i \backslash E^i)$ de X_i. D'après le lemme 2.2.13, l'adhérence dans $X_\mathbf{e}$ de $X_\alpha \times_Y C_\kappa$ est contenue dans l'image inverse de $V_{\alpha,i}$ dans $X_\mathbf{e}$, c'est-à-dire dans $V_{\alpha,i} \times_{W_i} Y_\mathbf{e}$. Par construction de $Y_\mathbf{e}$, ces derniers espaces, pour les α tels que $\dim_f X_\alpha \geqslant k$, sont tous plats sur leur image et de dimension relative k. Notons V_k leur réunion dans $X_\mathbf{e}$. Appliquons maintenant à V_k et à la famille constituée des $Z_{\alpha,\kappa} = \overline{X_\alpha \times_Y C_\kappa} \cap V_k$ et des $Z'_{\alpha,\kappa} = (\overline{X_\alpha \times_Y C_\kappa} \backslash X_\alpha \times_Y C_\kappa) \cap V_k$ le corollaire 2.2.6.1; localement en $y_\mathbf{e}$ et $L_\mathbf{e}$, où $y_\mathbf{e} \in Y_\mathbf{e}$ est le point piqué par l'étoile $\mathbf{e}$ et $L_\mathbf{e} = L \times_Y \{y_\mathbf{e}\}$, nous pouvons trouver une $f_\mathbf{e}$-partition $V_{k,\lambda}$ de $X_\mathbf{e}$ satisfaisant $\mathscr{P}_k$ et compatible avec la famille donnée, ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.7.

Le théorème 2.2.4 résulte du lemme 2.2.7 par récurrence descendante sur l'entier k. Soit d le maximum des dimensions $\dim_x f^{-1}(y_0)$ lorsque x parcourt l'ensemble compact L. Le premier pas de la récurrence est d'appliquer le lemme 2.2.7 à une f-stratification de X compatible avec les stratifications (Z_ω) et (T_τ) (*cf.* lemme 2.1.5), avec $k = d$.

L'énoncé sur la complexification vient de ce que l'on vérifie exactement comme dans [21] que l'on peut à chaque étape relever les autoconjugaisons *(cf. loc. cit.)* données avec la complexification, et l'énoncé sur les parties réelles vient de ce que l'égalité de la dimension algébrique et de la dimension topologique de la partie réelle est vraie pour les strates non singulières que nous construisons et est préservée par le passage aux transformés stricts.

2.3. Le cas propre

En utilisant le théorème d'aplatissement des morphismes propres de Hironaka (*cf.* [15]), et une démonstration analogue mais plus simple (comparer à [27]), on obtient le résultat suivant :

Théorème **3.1.** — *Soit* $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme propre entre espaces analytiques réduits. Soient* (Z_ω) *et* (T_τ) *des familles localement finies de sous-espaces analytiques à frontière et adhérence analytiques, de* X *et* Y *respectivement; il existe une suite d'éclatements (globaux) à centre rare, totalement ordonnée et localement finie sur* Y, *dont le composé est un morphisme propre* $\pi: \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *et pour le transformé* $f_\mathrm{Z}: \mathrm{X}_\mathrm{Z} = \mathrm{X} \times_\mathrm{Y} \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ *de* f *par* π *des* f_Z*-stratifications compatibles avec les familles données et telles que l'adhérence de chaque strate de* X_Z *soit pseudo-plate sur son image.*

Si, de plus, les données sont obtenues par complexification de données réelles telles que leur dimension topologique soit égale à leur dimension algébrique, toutes les constructions peuvent être faites de façon à préserver ces propriétés.

De même, si X *et* Y *sont des variétés algébriques, ainsi que les familles données, et si* f *est un morphisme algébrique, alors le morphisme* π *est un éclatement global algébrique.*

Ce n'est pas ici le lieu de donner les détails de la preuve de ces résultats.

3. Le lemme de bonne projection à paramètres

Proposition **3.1.** — *Soit* (X_α) *une famille finie de sous-ensembles sous-analytiques de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *telle que pour chaque* α *le morphisme* $f_\alpha: \mathrm{X}_\alpha \to \mathbf{R}^n$ *induit par la première projection soit propre et que l'on ait* $\dim(f_\alpha^{-1}(y)) \leqslant m-1$ *pour tout* $y \in \mathbf{R}^n$. *Pour tout point* $y_0 \in \mathbf{R}^n$, *il existe localement en* y_0 *pour la topologie* CIEL *un sous-ensemble sous-analytique* $\mathbf{B}$ *de dimension* $< m-1$ *de l'espace* $\mathbf{P}^{m-1}$ *des directions de projections linéaires de* $\mathbf{R}^m$ *sur* $\mathbf{R}^{m-1}$ *tel que pour* $\ell \in \mathbf{P}^{m-1} - \mathbf{B}$, *si l'on note* $\pi_\ell: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-1}$ *la projection linéaire parallèle à la direction* ℓ, *le morphisme* $\Pi_\ell: \mathrm{W} \times \mathbf{R}^m \to \mathrm{W} \times \mathbf{R}^{m-1}$ *défini par* $\Pi_\ell(y, z) = (y, \pi_\ell(z))$ *induise sur chaque* X_α *un morphisme à fibres discrètes.*

La preuve est une adaptation de celle donnée par Łojasiewicz dans [23] pour le cas absolu et semi-analytique.

Si $m = 1$, il n'y a rien à démontrer; supposons donc $m \geqslant 2$, et remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour $\mathrm{X} = \bigcup \mathrm{X}_\alpha$.

Considérons le sous-espace analytique I de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}$ formé des triples (v, z, ℓ) tels que l'on ait $z - v \in \ell$ et le sous-ensemble sous-analytique

$$J = (\mathbf{R}^n \times I) \cap ((X \times_{\mathbf{R}^n} X) \times \mathbf{P}^{m-1}) \quad \text{de } \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}.$$

Notons $E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X$ l'adhérence dans J de l'image inverse, par la projection naturelle de J sur $X \times_{\mathbf{R}^n} X$, du complémentaire de la diagonale de $X \times_{\mathbf{R}^n} X$. Puisque cette projection est propre, c'est un sous-ensemble sous-analytique de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}$ d'après ([10], Prop. 3.8). C'est l'éclatement de la diagonale relative de $X \times_{\mathbf{R}^n} X$.

La projection naturelle $\Phi : E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{P}^{m-1}$ est propre puisque chaque f_α l'est, et nous notons $\mathbf{E}$ le sous-ensemble sous-analytique de $E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X$ formé des points qui ne sont pas isolés dans leur fibre (*cf.* le théorème 1.2).

Notons r la projection $E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}$ donnée par $(y, v, z, \ell) \mapsto (z, \ell)$ et s la projection $E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}$ donnée par $(y, v, z, \ell) \mapsto (v - z, \ell)$. Remarquons maintenant que pour chaque $y \in \mathbf{R}^n$, le morphisme composé

$$\Phi(y) = \mathrm{pr}_2 \circ r : (E_\Delta X \times_{\mathbf{R}^n} X)(y) \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1} \to \mathbf{P}^{m-1}$$

est propre. Montrons que l'image par $\Phi(y)$ de $\mathbf{E}(y)$, qui est un sous-ensemble sous-analytique d'après ([10], Prop. 3.8), est de dimension $< m - 1$.

Si cette image contenait un ouvert V de $\mathbf{P}^{m-1}$, l'image de $\mathbf{E}(y)$ par le morphisme composé $\mathrm{pr}_2 \circ s$ contiendrait V; en fait, par définition de $\mathbf{E}$, il existerait un ouvert $O(y)$ de $\mathbf{E}(y)$ tel que pour $(y, z, v, \ell) \in O(y)$, on ait $\ell \in V$ et $z + \lambda(v - z) \in X(y)$ pour λ assez petit. Ainsi l'image de $O(y)$ dans $\mathbf{R}^m \times \mathbf{P}^{m-1}$ par s se projetterait sur V avec des fibres de dimension au moins égale à un, et serait donc de dimension au moins m. Puisque par construction elle est contenue dans l'espace total $\mathbf{T}$ du fibré tautologique sur l'espace projectif $\mathbf{P}^{m-1}$, qui est un espace analytique irréductible et de dimension m, cette image coïnciderait avec $\mathbf{T}$ au voisinage de $\{0\} \times V$. Or la projection de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}^m$ est surjective, et la projection dans $\mathbf{R}^m$ d'un voisinage de $\{0\} \times V$ dans $\mathbf{T}$ est un « coin » de dimension m. Pour obtenir la contradiction cherchée, il nous suffit de montrer que l'image dans $\mathbf{R}^m$ de $s(\mathbf{E}(y))$ est de dimension $\leqslant m - 1$. Or ceci résulte de l'observation suivante, à la Lefschetz-Whitehead (*cf.* [23], § 2) :

Sur chaque composante connexe de la partie non singulière de $\mathbf{E}(y)$, le rang de l'application tangente au morphisme $\psi_\lambda : \mathbf{E}(y) \to \mathbf{R}^m$ donné par $\psi_\lambda(z, v, \ell) = z + \lambda(v - z)$ est $\leqslant m - 1$ lorsque $\lambda \in [0, a(y, v, z)[$, pour un certain $a(y, v, z) > 0$, puisque l'image de ψ_λ est contenue dans $X(y)$ qui est par hypothèse de dimension $\leqslant m - 1$. En divisant par λ et en laissant tendre λ vers $+\infty$, la semi-continuité du rang montre que le rang de l'application tangente à $(z, v, \ell) \mapsto v - z$ sur $\mathbf{E}(y)$ est aussi $\leqslant m - 1$, ce qui prouve, d'après [17], Prop. 3.5, que la dimension de l'image dans $\mathbf{R}^m$ de $s(\mathbf{E}(y))$ est bien $\leqslant m - 1$.

Ainsi, nous avons un sous-ensemble sous-analytique $\mathbf{B}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{P}^{m-1}$, image de $\mathbf{E}$ par Φ, tel que pour chaque $y \in \mathbf{R}^n$, la fibre $\mathbf{B}(y)$ soit un sous-ensemble sous-analytique rare de $\mathbf{P}^{m-1}$ tel que pour $\ell \in \mathbf{P}^{m-1} - \mathbf{B}(y)$, la projection $X(y) \to \mathbf{R}^{m-1}$ parallèle à ℓ soit à fibres discrètes. Cela ne suffit pas pour donner le résultat voulu, puisqu'il se peut que l'adhérence de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{P}^{m-1}$ contienne $\{y_0\} \times \mathbf{P}^{m-1}$, comme le montre l'exemple suivant :

X est le sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ défini dans des coordonnées (y_1, y_2, u, v) par les équations et inégalités

$$vy_1 - uy_2 = 0, \qquad u^2 + v^2 \leqslant y_1^2 + y_2^2$$

et f est la projection sur l'exemplaire de $\mathbf{R}^2$ ayant pour coordonnées (y_1, y_2).

Il est vrai que le morphisme est propre et a toutes ses fibres de dimension $\leqslant 1$, mais la fibre au-dessus de $0 \in \mathbf{R}^2$ du sous-ensemble $\overline{\mathbf{B}} \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{P}^1$ est $\mathbf{P}^1$.

Si l'on se donne un morphisme analytique $h : \mathrm{W} \to \mathbf{R}^n$, notant X_W, etc., les objets déduits de X, etc., par changement de base, on vérifie sans mal que l'on a l'égalité $\mathbf{B}(\mathrm{X}_\mathrm{W}) = \mathbf{B}(\mathrm{X})_\mathrm{W}$, mais il n'en est bien sûr pas de même pour les adhérences; en général on a seulement l'inclusion $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X}_\mathrm{W})} \subset \overline{\mathbf{B}(\mathrm{X})}_\mathrm{W}$.

D'après [21], ou le théorème 2.2.4 du § 2, pour tout $y_0 \in \mathbf{R}^n$ il existe un voisinage $\mathrm{U} = (\mathrm{W}_i, h_i)$ de y_0 pour la topologie CIEL tel que pour chaque i le produit fibré $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X})}_{\mathrm{W}_i}$ soit la réunion de $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X}_{\mathrm{W}_i})}$, qui est le transformé strict par h_i de $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X})}$, et d'une partie « verticale », c'est-à-dire dont l'image est contenue dans la réunion des images inverses dans W_i des diviseurs exceptionnels des éclatements locaux dont h_i est le composé, et que la projection de $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X}_{\mathrm{W}_i})}$ sur W_i ait toutes ses fibres de dimension $< m - 1$ puisqu'elle est dominée par la partie réelle d'un morphisme analytique complexe pseudo-plat sur son image.

Ainsi, localement sur $\mathbf{R}^n$ pour la topologie CIEL, on peut supposer que toutes les fibres de la projection $\overline{\mathbf{B}(\mathrm{X})} \to \mathbf{R}^n$ sont de dimension $< m - 1$, et la Proposition en résulte.

4. La démonstration

Démontrons le théorème annoncé dans l'introduction. Pour la commodité de la récurrence, il convient de démontrer un énoncé plus précis que celui du théorème; soit n un entier et considérons pour chaque entier $m \geqslant 0$ l'assertion suivante :

Tr_m : *Soit* (A_α) *une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytiques de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *telle que la restriction* f_α *de la première projection à chaque* A_α *soit propre ainsi que la restriction* f *de cette projection à la réunion* A *des* A_α. *Pour tout point* y_0 *de* $\mathbf{R}^n$, *localement en* y_0 *pour la topologie* CIEL *sur* Y, *le morphisme* $f : \mathrm{A} \to \mathbf{R}^n$ *induit par la première projection est triangulable de manière compatible avec la famille* (A_α).

L'assertion Tr_0 résulte du cas particulier du théorème de triangulation des familles localement finies de sous-ensembles sous-analytiques de $\mathbf{R}^n$ (*cf.* [10], [19]) où la famille des A_α est une famille finie de sous-ensembles sous-analytiques compacts. Il nous suffit donc de prouver que Tr_{m-1} implique Tr_m.

Reprenons les notations du § 1.

Lemme **4.1.** — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *et* A *un sous-ensemble sous-analytique de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. *Posons* $A' = A \cap (U \times \mathbf{R}^m)$, *et supposons que, pour tout* $y \in U$, *on ait les égalités*

$$\mathrm{adh}(\mathrm{int}_p(A')\,(y)) = \mathrm{adh}(A'(y))$$

et

$$\mathrm{adh}_p(A')\,(y) = \mathrm{adh}(A'(y)).$$

Alors :

a) on a l'égalité $f(\mathrm{adh}_p(A'_\alpha) - \mathrm{int}_p(A')) = f(\mathrm{adh}_p(A'_\alpha)) = f(A'_\alpha)$;

b) toute triangulation de la projection p compatible avec $\mathrm{adh}_p(A') - \mathrm{int}_p(A')$ *est compatible avec* A' *et* $\mathrm{adh}_p(A')$.

Démonstration. — *a)* résulte immédiatement des hypothèses. Prouvons *b)*. Soit σ un simplexe de la triangulation de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ tel que $\sigma \cap \mathrm{adh}_p(A') \neq \emptyset$. Puisque d'après l'hypothèse et *a)*, la triangulation de $\mathbf{R}^n$ est compatible avec $f(A')$, le simplexe $f(\sigma)$, qui rencontre cette image, est contenu dedans et donc σ est contenu dans $p^{-1}(p(A'))$. Enfin, si σ rencontre $\mathrm{adh}_p(A') - \mathrm{int}_p(A')$, on a par hypothèse $\sigma \subset \mathrm{adh}_p(A') - \mathrm{int}_p(A')$; on peut donc supposer que $\sigma \cap (\mathrm{adh}_p(A') - \mathrm{int}_p(A')) = \emptyset$. Puisque σ est contenu dans $p^{-1}(p(A'))$, on en déduit que σ est contenu dans une des composantes connexes du complémentaire de $\mathrm{adh}_p(A') - \mathrm{int}_p(A')$ dans $p^{-1}(p(A'))$. Or, $\mathrm{int}_p(A')$ est ouvert et fermé dans ce complémentaire, donc réunion de composantes connexes; par suite, σ est contenu dans $\mathrm{int}_p(A')$, ce qui prouve *b)*.

Plaçons-nous maintenant dans la situation de l'assertion Tr_m. Puisque l'énoncé du théorème est local sur la base, nous pouvons supposer que la famille des A_α est finie en nous restreignant à ceux des A_α qui rencontrent l'image réciproque d'un compact donné de $\mathbf{R}^n$.

Lemme **4.2.** — *Pour tout point* y_0 *de* $\mathbf{R}^n$, *il existe localement en* y_0 *pour la topologie* CIEL *une partition de* A *en sous-ensembles sous-analytiques compatible avec les* A_α *et vérifiant les hypothèses du lemme* 4.1.

Démonstration. D'après le lemme 1.1, on peut raffiner la famille des A_α de telle façon qu'il existe pour chaque α un espace analytique réel non singulier et connexe S_α et un morphisme analytique réel $g_\alpha : S_\alpha \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ ayant pour image $\overline{A}_\alpha$ et fini au-dessus de A_α. Notons S la réunion disjointe des S_α et $h : S \to \mathbf{R}^n$ le morphisme obtenu en composant les g_α avec f. Nous pouvons appliquer le théorème 2.2.4 au morphisme ${}^{\mathrm{c}}h : {}^{\mathrm{c}}S \to \mathbf{C}^n$ obtenu en complexifiant h, aux décompositions ${}^{\mathrm{c}}S = \cup\, {}^{\mathrm{c}}S_\alpha$ et $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^n$, au point y et au sous-ensemble compact $L = h^{-1}(y)$ de ${}^{\mathrm{c}}h^{-1}(y)$.

Le théorème 2.2.4 nous fournit une famille finie de morphismes $\tau_i : W_i \to \mathbf{C}^n$, dont chacun est le composé d'une suite finie d'éclatements locaux, et des ${}^{\mathrm{c}}h_i$-partitions, au voisinage de compacts K_i, des morphismes ${}^{\mathrm{c}}h_i$ déduits de ${}^{\mathrm{c}}h$ par les changements de base τ_i, partitions qui sont telles que l'adhérence de chaque strate soit pseudo-plate sur son image.

Pour chaque i, le morphisme déduit de h par changement de base par le morphisme ${}^{\mathbf{R}}\tau_i : \mathrm{T}_i \to \mathbf{R}^n$ déduit de τ_i par passage aux parties réelles admet donc une partition, formée des parties réelles des strates de la partition précédente. L'image dans $\mathrm{T}_i \times \mathbf{R}^n$, par le morphisme déduit des g_α, de l'adhérence de chaque strate vérifie les hypothèses des lemmes 1.3 et 1.4 du § 1, et donc l'hypothèse du lemme 4.1. En effet, la propreté est préservée par changement de base, et l'hypothèse de 1.4 est vérifiée parce que l'égalité des dimensions réelles et complexes est vérifiée par les strates non singulières des partitions construites et est aussi préservée par les changements de base particuliers que nous faisons, et la pseudo-platitude du complexifié sur son image est obtenue par construction.

Enfin, la réunion dans $\mathrm{T}_i \times \mathbf{R}^n$ de ces images de strates est une partition de l'espace déduit de A par le changement de base ${}^{\mathbf{R}}\tau_i$.

Les espaces analytiques T_i étant obtenus à partir de $\mathbf{R}^n$ par une suite d'éclatements locaux, nous pouvons les plonger, au voisinage de compacts K_i satisfaisant les conditions du lemme 4.2, dans des espaces euclidiens $\mathbf{R}^{n_i}$. Nous nous plaçons désormais dans un de ces espaces, rebaptisé $\mathbf{R}^n$, pour poursuivre la preuve du fait que Tr_{m-1} implique Tr_m.

Nous pouvons donc supposer que chacun des A_α satisfait la conclusion du lemme 1.1, et il nous suffit de trianguler la projection p de manière compatible avec les sous-ensembles sous-analytiques $\mathrm{adh}_p\, \mathrm{A}_\alpha - \mathrm{int}_p\, \mathrm{A}_\alpha$.

D'après le corollaire 1.4.1 et la proposition 3.1, au prix d'un rétrécissement des ouverts donnés par le théorème 2.2.4, nous pouvons aussi supposer que nous avons un voisinage ouvert U relativement compact de y dans $\mathbf{R}^n$ et une projection $\Pi : \mathrm{U} \times \mathbf{R}^m \to \mathrm{U} \times \mathbf{R}^{m-1}$ compatible avec les projections sur U et induisant sur chaque A_α un morphisme à fibres discrètes, donc à fibres finies puisque la restriction de Π à UA_α est un morphisme propre d'après l'hypothèse.

D'après le théorème 1.2, il existe une stratification sous-analytique $\{ \mathrm{Z}_\zeta \}$ de $\mathrm{U} \times \mathbf{R}^m$ compatible avec les A_α et une stratification sous-analytique $\{ \mathrm{R}_\rho \}$ de $\mathrm{U} \times \mathbf{R}^{m-1}$ telles que la restriction de P à chaque Z_ζ contenu dans un A_α soit un isomorphisme analytique-réel sur un R_ρ. En particulier, la restriction de la première projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}^n$ à l'adhérence de chaque R_ρ obtenu ainsi et à la réunion de ces adhérences est propre.

D'après l'hypothèse de récurrence, et en répétant cet argument, quitte à allonger les suites d'éclatements locaux et à raffiner encore les stratifications, nous pouvons supposer que nous avons une triangulation de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ compatible avec les R_ρ images des Z_ζ contenues dans UA_α et une triangulation de $\mathbf{R}^n$ compatible avec les images de ces R_ρ telles que le morphisme conjugué de la première projection par les homéomorphismes de triangulation soit encore la première projection et soit simplicial.

La construction de la « tente sous-analytique » (voir [19]) associée à un simplexe de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ et à une composante connexe de son image réciproque dans la réunion A des A_α s'étend sans peine au cas relatif et permet d'agrandir la famille des (images réciproques des) A_α, des Z_ζ et des R_ρ de telle façon que la situation présente les agréments suivants :

Soit $D = \mathrm{int}_{p'}(\Pi(A))$, où p' est la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}^n$. Alors $A \cap \Pi^{-1}(D)$ est dense dans A, le morphisme $A \cap \Pi^{-1}(D) \to D$ induit par Π est ouvert, et $A - A \cap \Pi^{-1}(D)$ est contenu dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$.

Remarquons que ces agréments sont préservés par changement de base, et nous pouvons donc, après un nouvel allongement des suites d'éclatements locaux, supposer avoir les agréments précédents en sus de l'existence de triangulations de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ et $\mathbf{R}^n$, la première étant compatible avec les R_ρ, telles que le conjugué de p' par ces triangulations soit un morphisme simplicial.

Nous pouvons alors étendre au cas relatif le *vertical shifting* de [19], après une subdivision barycentrique des triangulations de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ et $\mathbf{R}^n$, qui n'affecte pas le caractère simplicial de p'. Cela nous donne une extension t à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ de l'homéomorphisme sous-analytique t' de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ sur lui-même triangulant les R_ρ, extension telle que chaque composante connexe de l'image réciproque dans $t^{-1}(A)$ (par la projection $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$) d'un simplexe σ' de la décomposition simpliciale de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-1}$ qui triangule *via* t' les R_ρ soit un simplexe linéaire σ. Puisque l'image de σ' par la projection sur $\mathbf{R}^n$ est un simplexe, il en est de même de l'image de σ. Il reste enfin, comme dans [19], p. 178, à construire une décomposition simpliciale de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ compatible avec ces simplexes σ et telle que, quitte à raffiner la décomposition simpliciale de $\mathbf{R}^n$ déjà construite, la projection sur $\mathbf{R}^n$ soit simpliciale; cela ne présente aucune difficulté puisque maintenant tout est linéaire.

Remarques. — 1) Par propreté l'ensemble sous-analytique A est p-borné, c'est-à-dire contenu, au-dessus de tout compact de $\mathbf{R}^n$, dans un tube de rayon r autour de $\mathbf{R}^n \times \{0\}$. On pourrait étendre au cas relatif la construction de [19] pour obtenir un résultat plus précis que l'énoncé du théorème, affirmant que l'homéomorphisme sous-analytique t_i triangulant f_i est l'identité en dehors d'un sous-ensemble sous-analytique T_i de $\mathbf{R}^{n_i} \times \mathbf{R}^m$ tel que la projection $T_i \to \mathbf{R}^{n_i}$ soit propre.

2) Le cas $n = 1$ du théorème, où il n'y a pas de changement de base, est conséquence facile de la triangulabilité des espaces et est proposé en exercice au lecteur.

5. Variantes et applications

Remarque **5.1.** — Remarquons d'abord que le théorème 0.1 a pour conséquence le théorème de Hardt cité dans l'introduction puisque sous les hypothèses de ce théorème il implique qu'au-dessus du compact sous-analytique $K = f(\overline{X})$ de $\mathbf{R}^n$ le morphisme f est triangulable de manière compatible avec $\overline{X} \backslash X$ en dehors de la réunion des images par π_i des intersections avec les ensembles compacts K_i des images réciproques dans Z_i des centres des éclatements composant les morphismes π_i. Cette réunion est bien sous-analytique.

On obtient en particulier comme corollaires relativement faciles les résultats de [33] et, en utilisant comme dans [12] des résultats de géométrie intégrale à la Federer ([7]), la proposition suivante, réponse donnée dans [12] à une question de [33] :

Proposition **5.2** (Hardt). — *Dans la situation du théorème, pour tout compact* K *de* $\mathbf{R}^n$, *il existe un nombre positif* C *tel que pour tout* $y \in f(X) \cap K$, *la fibre* $X(y)$ *puisse être triangulée de telle façon que pour chaque entier i, le volume i-dimensionnel du i-squelette de* $X(y)$ *soit* $\leqslant$ C. ∎

Une des motivations pour établir le théorème 0.1 était de prouver la généralisation suivante d'un résultat de [20] (amélioré dans [5] et [12]), généralisation dont la partie *b)*, dans le cas particulier où Σ est le produit de $\mathbf{R}^n$ par un cycle de $\mathbf{R}^m$, a été indépendamment démontrée par Delort dans [4] (voir aussi [22]) :

Proposition **5.3**. — *Soient k un entier et* $\Sigma \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *une chaîne sous-analytique contenue dans un sous-ensemble sous-analytique* $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. *Supposons que* X *et le support* $|\Sigma|$ *de* Σ *soient propres au-dessus de* $\mathbf{R}^n$, *et que* $\Sigma(y)$ *soit une k-chaîne pour tout* $y \in p(\Sigma)$.

a) L'ensemble des points y de $\mathbf{R}^n$ *tels que la chaîne* $\Sigma(y)$ *soit un bord dans* $X(y)$ *est sous-analytique dans* $\mathbf{R}^n$.

b) Pour tout sous-ensemble compact K *de* $\mathbf{R}^n$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que si pour un point* $y \in K \cap p(|\Sigma|)$ *la chaîne* $\Sigma(y)$ *est un bord dans* $X(y)$, *elle est le bord d'une* $(k+1)$*-chaîne sous-analytique de volume* $(k+1)$*-dimensionnel au plus égal à* C.

Preuve. — Dans le cas où l'on dispose d'une triangulation compatible avec X et $|\Sigma|$ de la projection $p : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, *a)* résulte de ce que la topologie des inclusions $|\Sigma(y)| \subset X(y)$ est constante lorsque y parcourt chacun des simplexes de la triangulation de $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire chacune des images par l'homéomorphisme de triangulation des simplexes linéaires, et *b)* est une conséquence immédiate de la proposition précédente. On se ramène à ce cas par le théorème; *b)* est immédiat, et pour *a)* il suffit de remarquer qu'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ (c'est-à-dire un morphisme d'inclusion) qui est sous-analytique localement pour la topologie CIEL (réelle) (*cf.* 2.2.3 et 2.2.3.1) en tout point de $\mathbf{R}^n$ est sous-analytique.

Remarquons cependant que chacune des deux propositions précédentes est en fait déjà conséquence de la seule existence d'une « triangulation par strates » et n'utilise pas vraiment le théorème. Pour les résultats de finitude ne concernant que les fibres d'un morphisme sous-analytique propre, le théorème de Hardt est suffisant. Le théorème de l'introduction est nécessaire pour prouver des résultats faisant intervenir le morphisme f autrement que comme la collection de ses fibres. Je renvoie à [3] pour des conséquences du fait qu'il y a beaucoup de morphismes sous-analytiques propres triangulables.

5.4. Il faut insister sur le fait que les triangulations trouvées sont *locales*; l'existence de triangulations globales pour une fonction sous-analytique f définie sur un sous-ensemble sous-analytique fermé de $\mathbf{R}^n$ est un résultat difficile prouvé par M. Shiota

([28], [29]). Shiota demande dans [30] si un morphisme sous-analytique propre $f: X \to f(X)$, où X est fermé dans $\mathbf{R}^n$, qui est localement triangulable est globalement triangulable. Dans la même veine on peut se demander si un morphisme qui est la partie réelle d'un morphisme analytique complexe propre devient globalement triangulable après un changement de base global.

5.5. La variante semi-algébrique suivante du résultat principal résulte de 2.3 :

Théorème **5.5.1.** — *Soit* $X \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ *un sous-ensemble semi-algébrique compact. Notons* $f: X \to \mathbf{R}^n$ *la restriction à* X *de la première projection. Il existe un éclatement algébrique* $\pi: W \to \mathbf{R}^n$ *tel que le morphisme* $f_W: X_W \to W$ *soit triangulable. On peut même, grâce à la résolution des singularités, supposer que* W *est non singulier.*

La preuve consiste essentiellement à recopier les §§ 2 à 4 dans le cadre semi-algébrique, où certaines difficultés disparaissent.

RÉFÉRENCES

[1] Michael ARTIN, *Grothendieck topologies*, Notes of a seminar at Harvard University, 1962.

[2] Edward BIERSTONE et Pierre MILMAN, Uniformization of analytic spaces, *Journ. A.H.S.*, **2** (1989), 801-836.

[3] Jean-Paul BRASSELET et Bernard TEISSIER, *Formes hölderiennes et théorème de De Rham relatif*, en préparation.

[4] Jean-Marc DELORT, Une propriété de borne uniforme pour la mesure d'une chaîne résolvant un bord sous-analytique, *C.R.A.S. Paris, Série* 1, **300** (1985), 577-580.

[5] Zofia DENKOWSKA et Krzysztof KURDYKA, Une propriété métrique des fibres d'un sous-analytique, *C.R.A.S. Paris, Série* 1, **299** (1984), 799-801.

[6] Adrien DOUADY, Flatness and privilege, in *Topics in several complex variables*, Monographie n° 17 de l'*Enseignement mathématique*, Genève, 1968, 47-74.

[7] Herbert FEDERER, *Geometric measure theory*, Berlin, Springer, 1969.

[8] Gerd FISCHER, Complex Analytic Geometry, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, n° 538, Springer, 1976.

[9] Jacques FRISCH, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, *Invent. Math.*, **4** (1967), 118-138.

[10] Robert M. HARDT, Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps, *Invent. Math.*, **38** (1977), 207-217.

[11] —, Semi-algebraic local triviality in semi-algebraic mappings, *Amer. J. of Math.*, **102** (1980), 291-302.

[12] —, Some analytic bounds for subanalytic sets, in *Geometric control theory*, Birkhäuser, Progress in Math., 1983, 259-267.

[13] —, Continuité locale Hölder de la tranche d'une chaîne sous-analytique par une application sous-analytique, *C.R.A.S. Paris, Série* A, **287** (1978), 993-995.

[14] Herwig HAUSER, La construction de la déformation semi-universelle d'un germe de variété analytique complexe, *Ann. Sci. E.N.S.*, **18** (1985), 1-56.

[15] Heisuke HIRONAKA, Flattening theorem in complex-analytic geometry, *Amer. Journal of Math.*, **97** (1975), 503-547.

[16] —, La voûte étoilée, *Astérisque*, **7-8** (1973), 415-440.

[17] —, Subanalytic sets, in *Number theory, Algebraic geometry and commutative algebra*, Volume in Honour of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, 453-493.

[18] —, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Pisa, Istituto « Leonida Tonelli », 1973.

[19] —, Triangulation of algebraic sets, *Proc. Symp. in pure Math.*, n° 29, A.M.S., 1975, 165-185.

[20] Heisuke HIRONAKA, Stratification and flatness, in *Real and complex singularities*, Oslo, 1976, Noordhof and Sijthoff, 1977, 199-265.

[21] Heisuke HIRONAKA, Monique LEJEUNE-JALABERT et Bernard TEISSIER, Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local, *Astérisque*, **7-8** (1973), 441-464.

[22] Krzysztof KURDYKA, *Sur la borne uniforme des résolutions des chaînes sous-analytiques*, Prépublication, U.J. Cracovie, 1987.

[23] Stanisław ŁOJASIEWICZ, Triangulation of semi-analytic sets, *Ann. Scuola norm. Sup. di Pisa*, **18** (1964), 449-474.

[24] —, Sur le problème de la division, *Studia Mathematica*, **18** (1959), 87-136.

[25] John MATHER, *Stratifications and mappings*, Lecture notes, Harvard University, 1971.

[26] Georges MALTSINIOTIS, *Privilège numérique uniforme*, Thèse, Université Paris VII, avril 1988 (à paraître).

[27] Claude SABBAH, Morphismes sans éclatement et cycles évanescents, *Astérisque*, **101-102** (1983).

[28] Masahiro SHIOTA, Piecewise linearization of real-valued subanalytic functions, *Trans. A.M.S.*, à paraître.

[29] —, Piecewise linearization of subanalytic functions, II, à paraître dans les Actes de la Conférence de Trento sur *La géométrie réelle*, 1988.

[30] —, *Subanalytic geometry and PL topology*, Prepublication Nagoya University, 1989.

[31] René THOM, Sur la stabilité topologique des applications polynomiales, in *Differentialgeometrie und Topologie*, Zürich, 1960, Monographie n° 11 de l'*Enseignement mathématique*, Genève, 1962, 146-155.

[32] —, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. A.M.S.*, **75** (1969), 240-284.

[33] Bernard TEISSIER, Sur trois questions de finitude en géométrie analytique réelle, Appendice à [36], *Acta Mathematica*, **151** (1983), 38-48.

[34] —, Théorèmes de finitude en géométrie analytique (d'après Heisuke Hironaka), *Séminaire Bourbaki 1973-1974*, exposé 451, *Springer Lecture Notes*, n° 431.

[35] —, Variétés polaires 2; multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 961, 1982, 314-491.

[36] François TRÈVES, On the local solvability and the local integrability of systems of vector fields, *Acta Mathematica*, **151** (1983), 1-38.

[37] Andrei VERONA, Stratified mappings-Structure and triangulability, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 1102, Springer, 1984.

[38] Hassler WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, 1957.

[39] Oscar ZARISKI, Local uniformization on algebraic varieties, *Annals of Math.*, **41** (1940), 852-896.

[40] —, The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. A.M.S.*, **45** (1944), 683-691.

D.M.I.
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05

Manuscrit reçu le 28 octobre 1989.