Proceedings of the International Congress of Mathematicians
August 16–24, 1983, Warszawa

BERNARD TEISSIER

Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes

Introduction

On associe à chaque point x d'un espace analytique complexe réduit X la suite des multiplicités en x des *variétés polaires locales* de X. Étant donné un plongement $(X, x) \subset (\boldsymbol{C}^N, 0)$, on peut décrire la variété polaire locale de codimension k soit comme ensemble des points $y \in X$ où une direction limite en y d'hyperplans tangents à la partie lisse X^0 de X appartient à un sous-espace linéaire $\boldsymbol{P}^{d-k} \subset \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}$ donné et assez général, soit comme lieu critique d'une projection linéaire assez générale $X \to \boldsymbol{C}^{d-k+1}$. Dans le cas où X est un cône de sommet x on retrouve des notions connues de géométrie projective. La première définition permet de relier les variétés polaires à la géométrie des limites d'espaces tangents et en particulier de montrer l'existence d'une stratification de Whitney canonique minimale de X, c'est-à-dire de classifier, du point de vue de l'équisingularité à la Whitney, les singularités de X. La seconde définition permet de relier, au moyen de la théorie de Morse, les multiplicités des variétés polaires en x à des invariants topologiques locaux de X en x. Ceci permet de démontrer une réciproque du théorème de Thom–Mather, c'est-à-dire de montrer l'équivalence de conditions topologiques et des conditions de Whitney. Une partie de ces résultats s'étend au cas relatif, c'est-à-dire à la condition w_f de Thom stricte pour un morphisme $f\colon X \to S$. Les liens avec la théorie des $\mathscr{D}$-modules d'une part, et avec les problèmes de résolution simultanée des singularités d'autre part, auraient par trop allongé le texte. Le lecteur est renvoyé à [10], [17] pour l'un et à [13] pour l'autre.

§ 1. Limites d'espaces tangents

Soit N un entier et soit $X \subset \boldsymbol{R}^N$ un sous-ensemble sous-analytique. D'après [6], il existe un sous-ensemble sous-analytique $\operatorname{Sing} X$ de X

tel que $X^0 = X - \operatorname{Sing} X$ soit dense dans X et soit un sous-espace analytique réel non singulier de $\boldsymbol{R}^N$. Supposons que toutes les composantes connexes de X^0 aient la même dimension d, et considérons l'application de Gauss $\gamma\colon X^0 \to G(N-1, d-1)(\boldsymbol{R})$ de X^0 dans la grassmanienne des $(d-1)$-plans de $\boldsymbol{P}^{N-1}(\boldsymbol{R})$ qui à chaque point $x \in X^0$ associe la direction de l'espace tangent à X^0 en x. En utilisant le théorème de rectilinéarisation de *loc. cit.*, on peut vérifier que le graphe de l'application de Gauss est sous-analytique, et il en est donc de même (*loc. cit.*) de son adhérence $N(X)$ dans $X \times G$ où $G = G(N-1, d-1)(\boldsymbol{R})$. Le sous-ensemble sous-analytique $N(X)$ de $\boldsymbol{R}^N \times G$, muni du morphisme $\nu\colon N(X) \to X$ induit par la première projection, sera appelé *modification de Nash* de l'ensemble sous-analytique X. Le morphisme ν induit un isomorphisme $\nu^{-1}(X^0) \xrightarrow{\sim} X^0$ et $\dim N(X) = d$. Pour chaque point $x \in X$, le sous-ensemble sous-analytique $\nu^{-1}(x) = N(X) \cap (\{x\} \times G)$ de G est l'ensemble des positions limites en x d'espaces tangents aux points de X^0. De façon analogue, on peut définir l'espace conormal de X dans $\boldsymbol{R}^N$ comme l'adhérence $T^*_X\boldsymbol{R}^N$, dans l'espace cotangent $T^*\boldsymbol{R}^N$ à $\boldsymbol{R}^N$, de l'espace conormal à X^0 dans $\boldsymbol{R}^N$ constitué de l'ensemble des couples $(x, \xi) \in T^*\boldsymbol{R}^N$ tels que x appartienne à X^0 et que l'espace tangent à X^0 en x soit contenu dans le noyau de l'application linéaire $\xi\colon T_{\boldsymbol{R}^N,x} \to \boldsymbol{R}$. Ainsi $T^*_X\boldsymbol{R}^N$ est un sous-ensemble fermé de $T^*\boldsymbol{R}^N \simeq \boldsymbol{R}^N \times \check{\boldsymbol{R}}^N$ où $\check{\boldsymbol{R}}^N$ désigne le dual de $\boldsymbol{R}^N$, stable par les homothéties du second facteur et dont on vérifie comme plus haut qu'il est sous-analytique. On note $C(X, \boldsymbol{R}^N)$ son projectivisé, c'est-à-dire son image dans $\boldsymbol{R}^N \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}$, et $\varkappa\colon C(X, \boldsymbol{R}^N) \to X$ le morphisme induit par la première projection. Un point (x, ξ) de $T^*\boldsymbol{R}^N$ est dans $T^*_X\boldsymbol{R}^N$ si ξ est limite en x de directions d'hyperplans tangents en des points de X^0, c'est-à-dire s'il existe une suite de points $x_i \in X^0$ tendant vers x et d'hyperplans $\xi_i = 0$ tangents à X^0 en x_i, c'est-à-dire tels que T_{X^0,x_i} soit contenu dans le noyau de ξ_i, et que l'on a $\xi = \operatorname{Lim} \xi_i$. Il revient au même de dire que le noyau de ξ en x contient une direction limite en x d'espaces tangents à X^0. On remarque que pour $x \in X^0$, la fibre $\varkappa^{-1}(x)$ est isomorphe à $\boldsymbol{P}^{N-1-d}$, et donc $\dim C(X, \boldsymbol{R}^N) = N-1$.

Soit $f\colon X \to \boldsymbol{R}^p$ un morphisme sous-analytique, que nous supposons installé, c'est-à-dire que l'on s'est donné un plongement $X \subset \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N$ sous-analytique et que f est obtenu comme restriction à X de la première projection. Supposons qu'il existe un ouvert sous-analytique dense X^0 de X qui soit une sous-variété analytique réelle de X telle que en chaque point x de X^0 le noyau de l'application linéaire tangente à f en x soit de dimension d. On peut définir une application de Gauss relative $\gamma_f\colon X^0 \to G$ et par l'adhérence de son graphe définir comme plus haut la modification de Nash relative, notée ν_f: $N_f(X) \to X$; un point $z \in N_f(X)$ représente une direction limite en $\nu_f(z)$ d'espaces tangents aux fibres de f en des points de X^0 tendant vers $\nu_f(z)$. De même on peut définir l'espace conormal relatif $T^*_{X^0/\boldsymbol{R}^p}\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N$ de X^0 dans $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N$ comme noyau de l'homomorphisme naturel de fibrés cotangents relatifs $T^*(\boldsymbol{R}^p \times \times \boldsymbol{R}^N)/\boldsymbol{R}^p \underset{\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N}{\times} X^0 \to T^*(X^0/\boldsymbol{R}^p)$ et l'adhérence dans $T^*(\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N)/\boldsymbol{R}^p$ de $T^*_{X^0/\boldsymbol{R}^p}(\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N)/\boldsymbol{R}^p$ est l'espace conormal relatif de X, qui est un sous-ensemble sous-analytique de $T^*(\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N)/\boldsymbol{R}^p \simeq \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N \times \check{\boldsymbol{R}}^N$ stable par rapport aux homothéties de $\check{\boldsymbol{R}}^N$, et dont le projectivisé est un sous-ensemble sous-analytique $C_f(X, \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N)$ de $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^N \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}(\boldsymbol{R})$, de dimension $N+p-1$, en fait contenu dans $X \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}(\boldsymbol{R})$.

Supposons maintenant que X est un espace analytique complexe réduit et soit f: $X \to S$ un morphisme analytique complexe. Notons $\Omega^1_f = \Omega^1_{X/S}$ le $\mathcal{O}_X$-module cohérent des 1-formes différentielles relatives et supposons qu'il existe un sous-ensemble ouvert dense X^0 de X tel que $\Omega^1_f \mid X^0$ soit localement libre de rang d. Soit g: $G \to X$ la grassmannienne des quotients localement libres de Ω^1_f. Par définition, l'image réciproque $g^*\Omega^1_f$ a sur G un quotient localement libre de rang d: $g^*\Omega^1_f \to L \to 0$ et, pour un morphisme h: $T \to X$, se donner un quotient localement libre de rang d, $h^*\Omega^1_f \to L_T \to 0$, équivaut à se donner un morphisme $T \xrightarrow{s} G$ tel que $g \circ s = h$ et $s^*L \simeq L_T$. D'après l'hypothèse on a donc une section σ: $X^0 \to G$ de $g \mid g^{-1}(X^0)$. L'adhérence de l'image de cette section est un sous-ensemble analytique fermé $N_f(X) \subset G$, et le morphisme ν_f: $N_f(X) \to X$ induit par g est propre et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense $\nu_f^{-1}(X^0)$. C'est donc une modification de X, appelée modification de Nash relative de X/S. Si le morphisme f est installé au moyen d'un plongement $X \subset S \times \times \boldsymbol{C}^N$, ce qui est toujours le cas localement sur X, on retrouve ainsi la modification de Nash décrite ci-dessus dans le cadre sous-analytique. On peut de même, dans le cas où f est installée, définir l'espace conormal relatif (complexe) de X dans $S \times \boldsymbol{C}^N$, qui est un sous-espace analytique de $T^*(S \times \boldsymbol{C}^N)/S \simeq S \times \boldsymbol{C}^N \times \check{\boldsymbol{C}}^N$ conique par rapport aux homothéties de $\check{\boldsymbol{C}}^N$, et l'espace conormal projectif associé $C_f(X, S \times \boldsymbol{C}^N)$ ou $C_f(X)$, qui est un sous-espace analytique fermé de $X \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}$, de dimension $N-1+ +\dim S$.

Exemples. (1) Soit U un ouvert de $\boldsymbol{C}^N$ et soit f: $U \to \boldsymbol{C}$ un morphisme analytique. La modification de Nash relative coïncide avec l'espace conormal relatif et est l'éclatement dans U de l'idéal jacobien $j(f) = (\partial f/\partial z_1, \ldots \ldots, \partial f/\partial z_N)\mathcal{O}_U$ engendré par les dérivées partielles de f.

(2) Soient U un ouvert de $\boldsymbol{C}^N$ et $X = f^{-1}(0)$ avec f comme ci-dessus et tel que $f^{-1}(0)$ soit réduit non vide. La modification de Nash de X coïncide avec l'espace conormal et est l'éclatement dans X de l'idéal $j(f)\cdot\mathcal{O}_X$ engendré dans $\mathcal{O}_X$ par les restrictions à X des dérivées partielles de f (voir [26], [27]).

Soit maintenant X un sous-espace analytique complexe réduit, purement de dimension d, d'un ouvert U de $\boldsymbol{C}^N$, et soit x un point de X. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
X \times \boldsymbol{P}^{N-1} \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1} & E_x C(X) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\tilde{e}_x"] \arrow[d, "\varkappa'"'] \arrow[dr, "\zeta"'] & C(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varkappa"] & X \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1} \\
X \times \boldsymbol{P}^{N-1} & E_x X \arrow[l, hook'] \arrow[r, "e_x"'] & X \arrow[r, hook] & \boldsymbol{C}^N
\end{tikzcd}$$

où $\varkappa$ est le morphisme conormal défini ci-dessus, e_x l'éclatement du point x dans X, $\tilde{e}_x$ l'éclatement dans $C(X)$ du sous-espace $\varkappa^{-1}(x)$, et $\varkappa'$ le morphisme dû à la propriété universelle de l'éclatement. Soit $\mathscr{Y} = \bigcup_{\alpha} \mathscr{Y}_\alpha$ la réunion des composantes irréductibles de dimension $N-2$ du diviseur exceptionnel $\zeta^{-1}(x)$, que nous considérons comme sous-espace de $\boldsymbol{P}^{N-1} \times \times \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}$. Pour chaque α posons $V_\alpha = \varkappa'(|\mathscr{Y}_\alpha|) \subset \boldsymbol{P}^{N-1}$, et $W_\alpha = \tilde{e}_x(|\mathscr{Y}_\alpha|) \subset \check{\boldsymbol{P}}^{N-1}$, où $|\mathscr{Y}_\alpha|$ désigne l'espace réduit sous-jacent à $\mathscr{Y}_\alpha$. Remarquons que puisque $|\mathscr{Y}| = |\zeta^{-1}(x)|$ d'après le Hauptidealsatz, on a $\bigcup_\alpha V_\alpha = |e_x^{-1}(x)| = |\mathrm{Proj}\, C_{X,x}|$ où $C_{X,x}$ désigne le cône tangent à X en x, et $\bigcup_\alpha W_\alpha = |\varkappa^{-1}(x)|$, ensemble des limites en x d'hyperplans tangents à X.

En fait, la collection des sous-variétés projectives V_α de $|\mathrm{Proj}\, C_{X,x}|$ suffit pour reconstituer l'ensemble des limites en x d'hyperplans tangents:

THÉORÈME (Lê–Teissier). *Pour chaque α, W_α est la variété projective duale de V_α, et par conséquent l'ensemble des limites en x d'hyperplans tangents à X est réunion des variétés duales des V_α. De plus, pour chaque composante irréductible C de $|\mathrm{Proj}\, C_{X,x}|$ il existe exactement un indice α tel que l'on ait $V_\alpha = C$.*

En fait, on montre que pour chaque α, $|\mathscr{Y}_\alpha|$ est l'espace conormal $C(V_\alpha, \boldsymbol{P}^{N-1})$, ce qui implique que W_α est le dual projectif de V_α.

Exemple (cf. [17]). Soit $(X, 0) \subset (\boldsymbol{C}^3, 0)$ un germe de surface analytique complexe réduite. Il existe un nombre fini de génératrices $l_1, \ldots, l_r$ du cône tangent $C_{X,0}$ telles que l'espace $|\nu^{-1}(0)|$ des limites en 0 d'espaces tangents à X^0 soit la réunion du dual de la courbe projective $|\mathrm{Proj}\, C_{X,0}|$ et des droites projectives $\check{l}_i = \{H \in \mathbf{C}^3 | H \supset l_i\}$. De plus, si $(X, 0)$ est à singularité isolée, ou si $C_{X,0}$ est réduit, la déformation naturelle de $(X, 0)$ sur son cône tangent $C_{X,0}$ est équisingulière (cf. ci-dessous) si et seulement si $r = 0$.

Remarque. Il est probable qu'un avatar du théorème ci-dessus est vrai dans le cas sous-analytique. Pour l'étude numérique des limites d'espaces tangents, voir ([26], Chap. 2, 1.6), et pour l'étude géométrique, voir [4], [14], [17].

§ 2. Variétés polaires locales

Soient N un entier, et

$$\mathfrak{D}\colon\ (0) \subset D_{N-1} \subset D_{N-2} \subset \ldots \subset D_1 \subset D_0 = \mathbf{C}^N$$

un drapeau de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{C}^N$, avec $\operatorname{codim} D_i = i$. Étant donnés un entier d, $0 < d \leqslant N$ et une suite d'entiers $a = (a_1, \ldots, a_d)$, on considère dans la grassmanienne $G = G(N-1, d-1)$ des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathbf{C}^N$ la sous-variété algébrique (variété de Schubert)

$$\sigma_a(\mathfrak{D}) = \{T \in G |\ \dim(T \cap D_{d+a_i-i}) \geqslant i \text{ pour } i = 1, \ldots, d\}.$$

Sa codimension dans G est purement $\sum a_i$. Dans le cas particulier où $a = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ avec k fois 1, on notera $c_k(\mathfrak{D})$ pour $\sigma_a(\mathfrak{D})$.

Soit maintenant $f\colon X \to S$ un morphisme analytique complexe installé comme au § 1, c'est-à-dire muni d'un S-plongement $X \subset S \times \mathbf{C}^N$. Supposons S non singulier, et considérons la modification de Nash relative du § 1

$$\begin{tikzcd} & G \\ N_f(X) \arrow[ur, "\gamma_f"] \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times G \arrow[u, "\mathrm{pr}_2"'] \\ X & \end{tikzcd}$$

et le morphisme de Gauss relatif γ_f. À l'aide d'un théorème de Kleiman et de l'ouverture de la transversalité, on peut montrer (cf. [28], Chap. IV, 1.3) que tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert, que nous noterons encore X, tel qu'il existe un ouvert de Zariski dense W de l'espace des drapeaux, tel que pour tout $\mathfrak{D} \in W$, on ait pour tout a:

(i) $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(X^0)$ est réduit et dense dans $|\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))|$, et ce dernier espace est vide ou purement de codimension $\sum a_i$ dans $N_f(X)$.

(ii) Si $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(x)$ n'est pas vide, on a

$$\dim \gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D})) \cap \nu_f^{-1}(x) = \dim \nu_f^{-1}(x) - \sum a_i.$$

En conséquence, pourvu que le drapeau $\mathfrak{D}$ soit assez général, si l'on pose

$$P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle = \left|\nu_f\left(\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))\right)\right|,$$

on voit que $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ est l'adhérence dans X de $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle \cap X^0$, et est un sous-espace analytique réduit purement de codimension $\sum a_i$ de X ou vide. De plus, $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))$ coïncide ensemblistement avec le transformé strict de $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ par le morphisme ν_f (noter que $\gamma_f^{-1}(\sigma_a(\mathfrak{D}))$ n'est pas en général réduit).

DÉFINITION. $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ sera appelée *variété polaire locale* associée à $f\colon X \to S$, au drapeau $\mathfrak{D}$, et à la suite $a = (a_1, \ldots, a_d)$.

PROPOSITION. *Dans cette situation, pour chaque point $x \in X$ et chaque a, il existe un ouvert de Zariski dense W_x de l'espace des drapeaux tel que la multiplicité $m_x(P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle)$ de $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ en x ne dépende pas de $\mathfrak{D} \in W_x$, et en fait ce nombre ne dépend que du type analytique du germe en x du morphisme f.*

Lorsque $a = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{k}, 0, \ldots, 0)$, on notera $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ pour $P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle$. C'est un sous-espace analytique réduit, purement de codimension k dans X ou vide. Lorsque S est un point, on notera $P_k\langle X; \mathfrak{D}\rangle$ pour $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$. On note que $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ ne dépend en fait que de D_{d-k+1}, car l'on a $c_k(\mathfrak{D}) = \{T \in G \mid \dim T \cap D_{d-k+1} \geqslant k\}$. On le notera aussi $P_k\langle f; D_{d-k+1}\rangle$.

On propose ici d'associer à un morphisme $f\colon X \to S$, en chaque point x de X, les invariants analytiques $m_x(P_a\langle f; \mathfrak{D}\rangle)$ où $\mathfrak{D}$ est assez général. On s'intéressera particulièrement aux invariants $m_x(P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle)$, $k = 0, \ldots, d$. Dans le cas particulier où S est un point et X un espace analytique réduit, on associera, pour tout point $x \in X$, au germe (X, x) (ou à l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$) la suite de d entiers

$$M^*_{X,x} = \left(m_x(P_0\langle X; \mathfrak{D}\rangle), m_x(P_1\langle X; \mathfrak{D}\rangle), \ldots, m_x(P_{d-1}\langle X; \mathfrak{D}\rangle)\right).$$

On remarquera que $P_0\langle X; \mathfrak{D}\rangle = X$ et par conséquent le premier terme de cette suite est la multiplicité de X en x.

Exemples. (1) Reprenons l'exemple (1) ci-dessus. On a $d = N-1$ et la modification de Nash relative est contenue dans le sous-espace de $U \times \check{P}^{N-1}$ défini par les équations $T_i(\partial f/\partial z_j) - T_j(\partial f/\partial z_i) = 0$. Dans $\check{P}^{N-1}$ les seules variétés de Schubert sont les $c_k(\mathfrak{D})$, et en choisissant des coordonnées adaptées au drapeau $\mathfrak{D}$, on voit que $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ est obtenu comme ceci. Soit $\operatorname{Sing} f$ le lieu critique de f, et pour chaque entier k, soit $\tilde{P}_k$ le sous-espace de U défini par $\partial f/\partial z_1 = \ldots = \partial f/\partial z_k = 0$. Alors $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ est l'adhérence dans U de $\tilde{P}_k \setminus \operatorname{Sing} f$. Dans le cas où f a un seul point critique dans U, noté $0, P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ est exactement le sous-espace de U défini par $\partial f/\partial z_1 = \ldots = \partial f/\partial z_k = 0$. On retrouve la définition des variétés polaires donnée dans ([27], [14]). Dans ce cas (cf. [27]), la multiplicité en 0 de $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ (toujours pour $\mathfrak{D}$ assez général) est égale à $\mu^{(k)}(f, 0)$, qui est par définition le nombre de Milnor ([23]) de la restriction de f à un sous-espace vectoriel de dimension k assez général de C^N. De plus, le nombre d'intersection en 0 de la courbe polaire $P_{N-1}\langle f; \mathfrak{D}\rangle$ avec l'hypersurface $f^{-1}(f(0))$ vaut $\mu^{(N)}(f, 0) + \mu^{(N-1)}(f, 0)$.

(2) Reprenons l'exemple (2) ci-dessus en supposant X réduit. Puisque les valeurs critiques de f sont isolées, on peut vérifier que l'on a $P_k\langle X; \mathfrak{D}\rangle = P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle \cap X$. Si 0 est un point critique isolé de f, on a les égalités:

$$m_0(P_k\langle X; \mathfrak{D}\rangle) = \mu^{(k)}(f, 0) + \mu^{(k+1)}(f, 0) \qquad (0 \leqslant k \leqslant N-2).$$

(3) Soit $V \subset P^{N-1}$ une variété projective réduite et soit $X \subset C^N$ le cône de sommet 0 sur V. Alors les variétés polaires $P_k\langle X; \mathfrak{D}\rangle$ sont les cônes sur les lieux polaires M_k de V introduits par Todd dans le cas où V est non singulière et par R. Piene [24] dans le cas général, leurs multiplicités sont les classes de V.

La théorie classique des variétés polaires projectives correspond donc au cas particulier où S est un point et X un cône de sommet 0. Par exemple, si X est le cône sur une courbe projective plane réduite de degré m et de classe ($=$ degré de la courbe duale) $\check{m}$, on a $M^*_{X,0} = (m, \check{m})$.

Les variétés polaires "absolues" ($S =$ un point) sont introduites et étudiées dans [18]. On a dans [23, chap. IV] la description suivante des variétés polaires relatives comme lieux critiques de projections. Supposons donné un S-plongement $X \subset S \times C^N$, et supposons que f soit un morphisme lisse en tout point $x \in X^0$. Soit p: $C^N \to C^{d-k+1}$ une projection linéaire. Pour $x \in X^0$, la fibre $X(f(x))$ est non singulière en x, contenue dans $\{f(x)\} \times C^N$ et l'on notera π_x: $X(f(x)) \to C^{d-k+1}$ la restriction à la fibre $X(f(x))$ de la projection p. Soit $P_k\langle f; p\rangle^0$ l'ensemble des points $x \in X^0$ tels que x soit critique pour π_x. Alors on a $P_k\langle f; p\rangle^0 = \nu_f\big(\gamma_f^{-1}(c_k(D_{d-k+1})) \cap \nu_f^{-1}(X^0)\big)$, et par conséquent pour p assez générale, l'adhérence $P_k\langle f; p\rangle$ de $P_k\langle f; p\rangle^0$ dans X est la variété polaire locale $P_k\langle f; \operatorname{Ker} p\rangle$.

On doit à J. P. G. Henry et M. Merle (cf. [5]) la description suivante de $P_k\langle f; \mathfrak{D}\rangle$. Supposons toujours $X \subset S \times C^N$ et considérons l'espace conormal relatif du § 1:

$$\begin{array}{ccc} & & \check{P}^{N-1} \\ & \overset{\lambda_f}{\nearrow} & \uparrow \mathrm{pr}_2 \\ C_f(X) & \hookrightarrow & X \times \check{P}^{N-1} \\ \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

Alors pour tout $x \in X$ et $0 \leqslant k \leqslant d = \dim X - \dim S$, il existe un voisinage ouvert de x dans X, encore noté X, et un ouvert de Zariski dense U_k de la grassmanienne des $(d-k)$-plans de $\check{P}^{N-1}$ tels que pour $L^{d-k} \in U_k$, on ait $|\varkappa_f(\lambda_f^{-1}(L^{d-k}))| = P_k\langle X; D_{d-k+1}\rangle$, où D_{d-k+1} est l'intersection des hyperplans appartenant à L^{d-k}.

En fait, la considération des cônes tangents des variétés polaires permet de reconstruire géométriquement les sous-variétés projectives V_a de $|\operatorname{Proj} C_{X,x}|$ vues au § 1, et donc les limites d'espaces tangents à X en x:

THÉORÈME (Lê–Teissier). *Étant données* $(X,0) \subset (C^N, 0)$ *comme ci-dessus et une projection linéaire* $p\colon C^N \to C^{d-k+1}$ *assez générale, le réduit* $|C_{P_k,0}|$ *du cône tangent en* 0 *à la variété polaire* $P_k = P_k\langle X; \operatorname{Ker} p\rangle$ *est la réunion des cônes sur les variétés projectives* V_a *du* § 1 *qui vérifient* $\dim V_a + 1 = d-k$ (partie fixe) *et des variétés polaires de dimension* $d-k$ *relatives à* $\operatorname{Ker} p$ *des cônes sur les* V_a *telles que* $\dim V_a + 1 > d-k$ (partie mobile).

§ 3. Conditions de Whitney et de Thom

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels A et B de C^N, muni de la métrique hermitienne, on définit la distance de A à B (dans cet ordre) par la formule

$$\delta(A, B) = \sup_{\substack{u \in B^\perp - \{0\} \\ v \in A - \{0\}}} \frac{|(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

où $B^\perp = \{u \in C^N \mid (u, b) = 0 \text{ pour tout } b \in B\}$. On note que $\delta(A, B) = 0$ si et seulement si $B \supset A$.

Soient $f\colon X \to S$ un morphisme entre espaces analytiques réduits, tel qu'il existe un ouvert dense X^0 de X sur lequel f est de corang constant d. Soit Y un sous-espace analytique non singulier de X sur lequel f est de corang constant, et x un point de Y. On dit que le couple (X^0, Y) satisfait la *condition* a_f *de Thom* en x s'il existe un plongement local $(X, x) \subset (\mathbf{C}^M, 0)$ tel que, pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de points de X^0 tendant vers x, on a

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \delta\big(T_x Y(f(x)),\ T_{x_n} X(f(x_n))\big) = 0$$

ou: toute limite en x d'espaces tangents aux fibres de $f \mid X^0$ contient l'espace tangent en x à la fibre de $f \mid Y$.

On dit que (X^0, Y) satisfait la *condition* a_f *de Thom stricte avec exposant* 1, aussi appelée *condition* w_f s'il existe un voisinage U de x dans X et une constante $C > 0$ tels que pour tout $y \in U \cap Y$ et $x' \in U \cap X^0$ on ait

$$\delta\big(T_y Y(f(y)),\ T_{x'} X(f(x'))\big) \leqslant C\ \operatorname{dist}(x', Y).$$

Dans le cas où S est un point, on dira que le couple (X^0, Y) satisfait la *condition* (a) *de Whitney* (resp. la *condition* (w), ou condition (a) de Whitney stricte au sens de Hironaka avec exposant 1).

Cette condition est indépendante du choix du plongement.

Restons dans le cas où S est un point, et choisissons une rétraction locale $\varrho\colon \mathbf{C}^M \to Y$. On dira que (X^0, Y) satisfait en $x \in Y$ la *condition* (b) *de Whitney* (resp. la *condition* (b) *stricte avec exposant* e) si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de points de X^0 tendant vers x, on a $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(\widehat{x_n \varrho(x_n)},\ T_{x_n} X^0\big) = 0$ (resp. s'il existe un voisinage U de x et une constante C tels que l'on ait $\operatorname{dist}\big(\widehat{x\varrho(x)},\ T_x X^0\big) \leqslant C \operatorname{dist}(x, Y)^e$ pour $x \in X^0$) où $\widehat{x\varrho(x)}$ désigne la direction de la droite sécante joignant x et $\varrho(x)$ dans $\mathbf{C}^M$.

On appelle stratification d'un espace analytique X une partition localement finie $X = \bigcup X_\alpha$ de X en sous-espaces analytiques non singuliers à fermeture et frontière analytiques.

DÉFINITION. Une stratification de X est une *stratification de Whitney* si pour tout couple X_α, X_β tel que $X_\alpha \cap \overline{X}_\beta \neq \emptyset$ on a $X_\alpha \subset \overline{X}_\beta$ et en tout $x \in X_\alpha$, le couple (X_β, X_α) satisfait les conditions (a) et (b) de Whitney.

On appelle stratification d'un morphisme $f\colon X \to S$ la donnée d'une stratification $X = \bigcup X_\alpha$ de X, et d'une stratification $S = \bigcup S_\beta$ de S telles que la restriction de f à chaque X_α soit une submersion de X_α sur une strate S_β. Ainsi chaque $f^{-1}(S_\beta)$ est réunion de strates X_α.

Définition (Thom–Sabbah, cf. [25]). On dit qu'un morphisme stratifié f est *sans éclatement* si

(1) Pour tout couple de strates X_α, X_β de X telles que $X_\alpha \cap \bar{X}_\beta \neq \emptyset$ on a:

$X_\alpha \subset \bar{X}_\beta$ et (X_β, X_α) satisfait la condition $a_{f|\bar{X}_\beta}$ en tout point de X_α.

(2) La stratification $S = \bigcup S_\beta$ de S est une stratification de Whitney, et enfin:

(3) Pour tout β, la stratification $f^{-1}(S_\beta) = \bigcup_{X_\alpha \subset f^{-1}(S_\beta)} X_\alpha$ est de Whitney.

Les stratifications de Whitney et de Thom–Sabbah ont des propriétés opologiques extrêmement utiles:

Théorème (Thom–Mather, cf. [21]). *Si $X = \bigcup X_\alpha$ est une stratification de Whitney, pour tout $x \in X$, tout plongement local $(X, x) \subset (\boldsymbol{C}^N, 0)$ il existe une rétraction locale r: $(\boldsymbol{C}^N, 0) \to (X_\alpha, x)$, où X_α est la strate contenant x, et un nombre réel $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < \eta < \eta_\varepsilon$ on ait, en notant $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ la boule de centre 0 et de rayon ε dans $\boldsymbol{C}^N$, un homéomorphisme $\boldsymbol{B}_\varepsilon \cap r^{-1}(\boldsymbol{B}_\eta \cap X_\alpha) \simeq \left(r^{-1}(x) \cap \boldsymbol{B}_\varepsilon\right) \times (X_\alpha \cap \boldsymbol{B}_\eta)$ compatible avec la rétraction r et induisant pour chaque $\bar{X}_\beta$ contenant x un homéomorphisme de*

$$\bar{X}_\beta \cap \boldsymbol{B}_\varepsilon \cap r^{-1}(\boldsymbol{B}_\eta \cap X_\alpha) \quad \textit{sur} \quad \left(\bar{X}_\beta \cap r^{-1}(x)\right) \times (X_\alpha \cap \boldsymbol{B}_\eta).$$

En d'autres termes, chaque $\bar{X}_\beta$, ou si on préfère, l'ensemble stratifié X est localement topologiquement trivial le long de X_α en x.

Théorème (Thom–Lê–Sabbah). *Si f: $X \to S$ est un morphisme stratifié sans éclatement, f admet une théorie des cycles évanescents en tout point $x \in X$.* (Voir [25].)

Rappelons que cela signifie que pour tout $x \in X$, posant $s = f(x)$, il existe un système fondamental à un paramètre de bons voisinages de x (resp. s) dans X (resp. S), noté $(B_\varepsilon)_{\varepsilon \in I}$ (resp. $(D_\eta)_{\eta \in I'}$) où $I =]0, a]$, $I' =]0, a']$ (cf. [19], § 2), et un sous-ensemble sous-analytique E de $I \times I'$ auquel $I \times 0$ est adhérent tels que pour $(\varepsilon, \eta) \in E$, le morphisme induit par f:

$$f_{\varepsilon,\eta}\colon B_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta) \to D_\eta$$

est descriptible, c'est-à-dire qu'il existe une stratification de Whitney analytique complexe de D_η, en fait $D_\eta = \bigcup (D_\eta \cap S_\beta)$, telle que $f_{\varepsilon,\eta}$ induise une fibration topologique localement triviale $f_{\varepsilon,\eta}^{-1}(D_\eta \cap S_\beta) \to D_\eta \cap S_\beta$ pour tout β. Ceci implique en particulier que les faisceaux images directes

$R^i(f_{\varepsilon,\eta})_* C$ sont analytiquement constructibles sur D_η et que l'on a de plus, pour $\varepsilon' < \varepsilon$ et η' tel que $(\varepsilon', \eta') \in E$, l'égalité $R^i(f_{\varepsilon',\eta'})_* C = R^i(f_{\varepsilon,\eta})_* C \mid D_{\eta'}$.

En outre, les stratifications de Whitney et de Thom–Sabbah ont le mérite d'exister!

THÉORÈME (Whitney [32]). *Soient X un espace analytique complexe (réduit) et $(Y_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de sous-espaces analytiques à fermeture analytique dans X. Il existe une stratification de Whitney $X = \bigcup X_\alpha$ telle que chaque Y_i soit réunion de strates.*

Rappelons que l'existence de stratifications de Whitney pour les ensembles semi-(resp. sous-) analytiques a été démontrée par Łojasiewicz [20] (resp. Hironaka [8] et Hardt [34]).

THÉORÈME (Sabbah [25]). *Soit $f\colon X\to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes réduits muni d'une stratification $\mathscr{S}$. Il existe un éclatement $\pi\colon S'\to S$ de S et une stratification $\mathscr{S}'$ du produit fibré $X' = X \times_S S'$, compatible avec $\mathscr{S}$ en ce sens que les images réciproques dans S' (resp. X') des strates de S (resp. X) sont réunions de strates, et telle que le morphisme $f'\colon X'\to S'$ déduit de f par changement de base soit sans éclatement. Dans le cas où f est complexifié d'un morphisme analytique réel, l'éclatement est aussi complexifié d'un morphisme analytique réel, et les strates des stratifications sont invariantes par conjugaison.*

En particulier, si S est une courbe non singulière, f admet une théorie des cycles évanescents.

Remarque. Sabbah a également montré dans *loc. cit.* l'analogue local du Théorème ci-dessus.

Exemple. Reprenons l'exemple (1) ci-dessus et soit Y un sous-espace non singulier de U contenu dans l'hypersurface $f^{-1}(0)$. Supposons $0 \in Y$ et $f(0) = 0$. Choisissons des coordonnées locales $y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_{N-t}$ pour C^N en 0 telles que Y soit défini par: $z_1 = \ldots = z_{N-t} = 0$. Dans [29], j'ai introduit la condition d'équisingularité appelée condition (C) pour X le long de Y en 0:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)_0 \in \overline{(z_1, \ldots, z_{N-t})\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{N-t}}\right)}\mathcal{O}_{C^N,0} \qquad (1 \leqslant i \leqslant t),$$

où la barre désigne la fermeture intégrale des idéaux. Dans [27] on montre que la condition (C) implique les conditions (a) et (b) de Whitney et dans [2] la réciproque, dans le cas où $X^0 = X - Y$. Dans [27] (appendice) on montre que la condition (C) équivaut à la condition w_f pour (X^0, Y) en 0, et d'autre part un exemple de Briançon–Speder, $f = z_1^3 + yz_1z_2^3 + z_2^4z_3 + z_3^9$, satisfait a_f en 0 mais pas w_f.

Par ailleurs, Kuo–Verdier (cf. [31]) ont montré que la condition (w) implique les conditions (a) et (b) de Whitney, dans le cadre sous-analytique réel.

§ 4. Critères numériques pour les conditions de Whitney et de Thom

THÉORÈME (cf. [28], chap. V, [22]). *Soient X un espace analytique complexe réduit purement de dimension d, Y un sous-espace analytique de X et $0 \in Y$ un point non singulier de Y. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Le couple* (X^0, Y) *satisfait les conditions* (a) *et* (b) *de Whitney en* 0.

(2) *L'application* $Y \to N^d$ *définie par* $y \mapsto M^*_{X,y}$ *est constante au voisinage de* 0.

(3) *Le couple* (X^0, Y) *satisfait la condition* (w) *en* 0, *donc au voisinage de* 0.

La démonstration est par récurrence sur $d-t$ où $t = \dim_0 Y$. On utilise de façon fondamentale le diagramme analogue à celui du § 1, où e_Y est l'éclatement de Y:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \check{P}^{N-1} \\
 & E_Y C(X; C^N) \arrow[r, "\tilde{e}_Y"] \arrow[d, "\varkappa'_Y"'] \arrow[dr, "\zeta"] & C(X; C^N) \arrow[d, "\varkappa"] \arrow[urr] & \subset & X \times \check{P}^{N-1} \arrow[u, "\mathrm{pr}_2"'] \\
X \times P^{N-1-t} \supset & E_Y X \arrow[r, "e_Y"'] & X & \subset C^N &
\end{tikzcd}$$

qui permet de relier les cônes normaux le long de Y des variétés polaires aux limites d'hyperplans tangents. Une étape importante de la démonstration de (2) $\Rightarrow$ (3) est de prouver que (2) est équivalent à

(2') *Le morphisme* ζ: $\zeta^{-1}(Y)\to Y$ *a toutes ses fibres de la même dimension au voisinage de* 0.

On doit à J. P. G. Henry et M. Merle la découverte du fait que l'équivalence de (2) et (2') nécessite la considération du diagramme ci-dessus à la place du diagramme analogue construit à partir de la modification de Nash. On peut supposer choisi un plongement local de X dans C^N tel que Y soit un sous-espace linéaire de C^N. L'idée de la récurrence est de prouver que chacune des conditions implique que si H est un hyperplan de C^N assez général parmi ceux contenant Y, alors $|X\cap H|$ satisfait les mêmes conditions. À part des résultats généraux sur l'équimultiplicité et une idée de Hironaka prouvant (2')$\Rightarrow$(3), les résultats utilisées sont des généralisations et renforcements de l'idée de "transversalité des variétés polaires aux plans servant à les définir" dont le prototype est le résultat suivant (cf. [19]): si $\mathfrak{D}$ est un drapeau assez général, pour chaque i, l'espace vectoriel D_i est transverse en 0 dans C^N à la variété polaire $P_{d-i}\langle X; D_{i-1}\rangle$ en ce sens que l'on a $|D_i\cap C_0(P_{d-i}\langle X; D_{i-1}\rangle)| = \{0\}$, où $C_0(P_{d-i}\langle X; D_{i-1}\rangle)$ désigne le cône tangent en 0 à la variété polaire.

Pour les courbes polaires, on a un résultat beaucoup plus précis inspiré par un résultat de [1] dans le cas $N = 3$, qui est très utile pour la preuve de (1)$\Rightarrow$(2). Soit $(X, 0)\subset(C^N, 0)$, et soit $(Y, 0)\subset(X, 0)$ une courbe non singulière. Pour une projection linéaire p: $C^N\to C^2$ assez générale, notant $P_{d-1}\langle X; \operatorname{Ker} p\rangle$ la courbe polaire associée à la projection p, *la même* projection p est une projection générale pour la courbe $Y\cup P_{d-1}\langle X; \operatorname{Ker} p\rangle$ en ce sens qu'aucune direction limite en 0 de bisécantes à cette courbe n'est contenue dans $\operatorname{Ker} p$ (cf. [28], chap. V, lemme clé).

Remarque. On doit pouvoir démontrer le résultat analogue en géométrie analytique réelle en traduisant géométriquement le raisonnement algébrique de *loc. cit.*

Comme on a ainsi traduit les conditions de Whitney en termes purement algébriques (dimension des fibres de ζ et multiplicités de variétés polaires) ne dépendant que des algèbres locales $\mathcal{O}_{X,x}$ (en fait de leur complété $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$) on peut utiliser les résultats généraux sur la semi-continuité de la multiplicité de la manière suivante (cf. [18], [28], chap. VI).

Soient X un espace analytique, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille localement finie de sous-espaces analytiques fermés de X. Définissons une filtration de X inductivement comme suit: $F_0 = X$ et supposons avoir défini $F_0, \ldots, F_{k-1}$. Pour chaque i, notons $F_i = \bigcup F_{i,j_i}$ la décomposition en composantes irréductibles de F_i. Définissons F_k comme la réunion du lieu singulier de F_{k-1}, et de la famille localement finie de sous-espaces analytiques fermés rares dans F_{k-1} que voici: les $F_{k-1} \cap Y_j$ rares dans F_{k-1} et les $\{x \in F_{k-1,j_{k-1}} |$ l'une des suites $M^*_{X,x}$, $M^*_{F_{1,j_1},x}$, $\ldots$, $M^*_{F_{k-2,j_{k-2}},x}$, ne prend pas en x la valeur qu'elle prend en un point général de $F_{k-1,j_{k-1}}\}$.

La filtration $X = F_0 \supset F_1 \supset \ldots F_{k-1} \supset F_k \supset \ldots$ stationne localement, et l'on a:

PROPOSITION. *La famille des composantes connexes des $F_k - F_{k+1}$ est une stratification de Whitney de X telle que chaque Y_i soit réunion de strates. Toute stratification de Whitney ayant ces propriétés en est un raffinement, c'est-à-dire que chaque F_k est réunion de strates de cette stratification* (cf. [28], chap. VI, [19]).

En particulier, prenant $I = \emptyset$, on a:

COROLLAIRE. *Pour tout espace analytique réduit localement équidimensionnel, la construction ci-dessus fournit une stratification de Whitney à strates connexes, dite* canonique, *dont toute stratification de Whitney de X est un raffinement.* On appelle *filtration canonique* de X la filtration construite ci-dessus.

Remarques. La stratification canonique est invariante par le pseudogroupe des isomorphismes locaux de X. Pour tout ouvert U de X, la famille des $F_k \cap U$ est la filtration canonique de U. Enfin pour tout plongement local $(X, x) \subset (C^N, 0)$ et tout sous-espace non singulier $(H, 0)$ de $(C^N, 0)$ transverse dans C^N en 0 à la strate contenant x, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que les $|F_k \cap H \cap U|$ constituent la filtration canonique de $|U \cap H|$.

COROLLAIRE. *Si X et les Y_i sont des variétés algébriques complexes définies sur une extension galoisienne K de Q, les fermés F_i sont des sous-variétés algébriques de X définies sur K.*

En particulier, comme l'a remarqué Deligne, nous pouvons considérer un germe $(X, 0) \subset (C^N, 0)$ défini par des polynômes $P_j = \sum_A p_{j,A} Z^A$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Notons M le nombre des $p_{j,A}$, introduisons des indéterminés $P_{j,A}$, et soit $\mathscr{X}$ la sous-variété de $C^M \times C^N$ définie par les équations $\sum_A P_{j,A} Z^A = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ et la filtration canonique $\mathscr{X} = F_0 \supset F_1 \supset \ldots$ associée à $\mathscr{X}$ et au sous-espace $C^M \times \{0\}$.

Notons π: $\mathscr{X} \to C^M$ la première projection. Quitte à raffiner la stratification associée aux F_k, on peut supposer que pour chaque strate $\mathscr{X}_a$ contenue dans $C^M \times \{0\}$, $\pi^{-1}(\mathscr{X}_a)$ est réunion de strates. D'après le théorème de Thom–Mather, $\pi^{-1}(\mathscr{X}_a)$ est localement topologiquement trivial le long de $\mathscr{X}_a$ et donc pour $p, q \in \mathscr{X}_a$, les germes définis par $\sum p_{j,A} Z^A = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ et par $\sum q_{j,A} Z^A$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ sont topologiquement équivalents (et en fait bien plus, voir ci-dessous). Puisque les $\mathscr{X}_a$ sont définis sur $\mathbf{Q}$, les points à coordonnées algébriques y sont denses, et par conséquent n'importe quel germe algébrique est topologiquement équivalent (et en fait bien plus) avec un germe défini par des polynômes à coefficients entiers algébriques.

Ceci répond en particulier à une question que posait F. Pham en 1972 au séminaire de Thom, et implique que l'ensemble des germes algébriques à (w)-équisingularité près est dénombrable; la classification de ceux-ci est donc possible.

On a, avec une preuve analogue, un analogue relatif du théorème ci-dessus. Soit $f\colon X \to S$ comme au § 1. Pour tout $x \in X$ notons $P_k(f, x)$ le germe en x de "la" variété polaire générale locale de codimension k, et posons $\Sigma_k(f) = \{x \in X \mid P_k(f, x) \neq \emptyset\}$. (Si f est installé, $\Sigma_k(f) = \{x \in X \mid \dim \varkappa_f^{-1}(x) \geqslant N - d + k\}$.)

DÉFINITION (Sabbah). On dit que f est *sans éclatement en codimension* 0 si pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant d$, les fibres de $f \mid \Sigma_k(f)\colon \Sigma_k(f) \to S$ sont de dimension $\leqslant d - k$.

THÉORÈME (Henry–Merle–Sabbah, cf. [5]). *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme sans éclatement en codimension* 0, *Y un sous-espace analytique non singulier d'une fibre $f^{-1}(0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Le couple (X^0, Y) satisfait la condition w_f en tout point de Y.*

(2) *Les variétés polaires générales $P_k(f)$ $(0 \leqslant k \leqslant d)$ sont équimultiples le long de Y.*

§ 5. Critères topologiques pour les conditions de Whitney

La présentation des variétés polaires locales comme lieux critiques de restrictions à $X \subset \mathbf{C}^N$ de projections linéaires $p\colon \mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^{d-k+1}$ vue au § 2 permet d'appliquer la théorie de Morse pour calculer les multiplicités en x des variétés polaires locales de X en x en fonction d'invariants topologiques locaux de X, généralisant ainsi les formules de l'exemple (2) du § 2. Voici les invariants topologiques locaux qui interviennent (cf. [9], [10], [3], [19]).

Soit $X = \bigcup X_a$ une stratification de Whitney de X. Pour $x \in X_a$ soit $(X, x) \subset (\mathbf{C}^N, 0)$ un plongement local. Pour chaque entier $i \geqslant d_a$, où $d_a = \dim X_a$, il existe un ouvert de Zariski dense W de la grassmanienne des plans de codimension i de $\mathbf{C}^N$ et pour chaque $L_i \in W$ deux nombres réels ε_0, η_0, un sous-ensemble sous-analytique $E \subset]0, \varepsilon_0] \times]0, \eta_0]$ auquel $]0, \varepsilon_0] \times \{0\}$ est adhérent et un sous-ensemble sous-analytique U de $\bigcup_{\eta \in]0,\eta_0]} \boldsymbol{B}_\eta$ tel que chaque $U_\eta = U \cap \boldsymbol{B}_\eta$ soit dense dans $\boldsymbol{B}_\eta$, tels que pour tout $(\varepsilon, \eta) \in E$ et $t \in U_\eta$ la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi\big(X \cap (L_i + t) \cap \boldsymbol{B}_\varepsilon\big)$ ne dépende que de (X, X_a), i.e., pas du plongement, ni du choix de $x \in X_a$ (ici $L_i + t$ est un $(N-i)$-plan parallèle à L_i et passant par t). On la notera $\chi_i(X, X_a)$.

THÉORÈME ([19], 4.11). *Soit $X = \bigcup X_a$ un espace analytique complexe réduit muni d'une stratification de Whitney analytique complexe et soit $x \in X_a$. On a l'égalité*

$$\chi_{d_a+1}(X, X_a) - \chi_{d_a+2}(X, X_a) = \sum_{\beta \neq a} (-1)^{d_\beta - d_a - 1} m_x\big(P_{d_\beta - d_a - 1}(\overline{X}_\beta, x)\big)\big(1 - \chi_{d_\beta+1}(X, X_\beta)\big).$$

On vérifie aussitôt que cette formule permet de calculer par récurrence les $m_x\big(P_k(\overline{X}_\beta, x)\big)$ en fonction des caractéristiques d'Euler–Poincaré $\chi_j(X_\beta, X_\gamma)$, et inversement.

Ce résultat, joint à la caractérisation numérique des stratifications de Whitney vue ci-dessus, a permis dans *loc. cit.* de caractériser les stratifications de Whitney des espaces analytiques complexes par des conditions topologiques: Soit $X = \bigcup X_a$ une stratification analytique complexe. Disons qu'elle satisfait la *condition* (T T)* (= trivialité topologique locale pour les sections générales) si pour toute strate X_a, $x \in X_a$ et tout plongement local $(X, x) \subset (\boldsymbol{C}^N, 0)$, il existe pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant N - d_a$ un ouvert de Zariski dense W_i de la grassmanienne des plans de codimension i de $\boldsymbol{C}^N$ contenant $T_{X_a,x}$ tel que pour tout sous-espace non singulier L de $\boldsymbol{C}^N$ défini au voisinage de 0, contenant X_a et tel que $T_{L,0} \in W_i$, l'intersection $\overline{X}_\beta \cap L$ est localement topologiquement triviale le long de X_a en x pour toute strate X_β telle que $x \in \overline{X}_\beta$. On a alors

THÉORÈME (Lê–Teissier, [19]). *Pour une stratification analytique complexe $X = \bigcup X_a$ d'un espace analytique X, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $X = \bigcup X_a$ *est une stratification de Whitney.*
(2) $X = \bigcup X_a$ *satisfait la condition* (TT)*.

On a ainsi, dans ce cas, la réciproque correcte du théorème de Thom–Mather. En fait dans *loc. cit.* on associe à chaque point d'un espace analytique complexe son "type d'homotopie évanescent total" qui est un invariant combinatoire local de X et on montre que les conditions ci-dessus sont aussi équivalentes à:

(3) *le type d'homotopie évanescent total de X est constant le long de chaque strate.*

Il se trouve que la formule ci-dessus, appliquée dans le cas où X est le cône sur une variété projective $V \subset \boldsymbol{P}_{N-1}$, contient une généralisation des formules de Plücker, c'est-à-dire permet de calculer le degré de la variété duale $V^{\vee}$ de V (i.e., sa classe) en fonction de la topologie de l'ensemble stratifié que constitue V munie de sa stratification de Whitney canonique. Pour le voir il suffit de faire les observations suivantes:

(1) La classe de V est égale à $m_0(P_{d-1}\langle X; \mathfrak{D}\rangle)$, où $d = \dim X$.

(2) Si $V = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_i \supset \ldots$ est la filtration canonique de V, notant F_i le cône de sommet 0 sur G_i, la filtration canonique de X est $X = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset \{0\}$ (parfois le $\{0\}$ est superflu).

(3) Si $L+t$ est un hyperplan voisin de 0 dans $\boldsymbol{C}^N$ et général, on a

$$\chi\big(X \cap (L+t) \cap \boldsymbol{B}_\varepsilon\big) = \chi(V) - \chi(V \cap H) \quad \text{où} \quad H = \operatorname{Proj} L.$$

(4) Si $L_i + t$ est un plan de codimension i voisin de 0 dans $\boldsymbol{C}^N$, il existe un hyperplan $L_1 + t$ voisin de 0 et un plan L_{i-1} de codimension $i-1$ passant par 0 tel que $L_i + t = L_{i-1} \cap (L_1 + t)$. On a donc $\chi\big(X \cap (L_i+t) \cap \boldsymbol{B}_\varepsilon\big) = \chi(V \cap \cap H_{i-1}) - \chi(V \cap H_{i-1} \cap H_1)$ où $H_i = \operatorname{Proj} L_i$.

(5) Pour toute strate X_α de X autre que $\{0\}$, notant $V_\alpha = \operatorname{Proj} X_\alpha$, on a

$$\chi_k(X, X_\alpha) = \chi_{k-1}(V, V_\alpha).$$

On retrouve ainsi facilement, dans le cas où V est une hypersurface de degré m à singularités isolées de $\boldsymbol{P}^{d+1}$ la formule de [29] et [12]:

$$\deg V^{\vee} = m(m-1)^d - \sum_{x_i \in \operatorname{sing} V} \big(\mu^{(d+1)}(V, x_i) + \mu^{(d)}(V, x_i)\big).$$

(Comparer à [24], [11], [35].)

Enfin il faut remarquer que l'on n'a pas encore donné de réciproque au théorème de Thom–Lê–Sabbah du § 3 dans un cas plus général que celui de l'exemple du § 3.

Notes ajoutées à la correction des épreuves:

1. J'ai appris à Varsovie que la sous-analycité du morphisme de Gauss du § 1 était prouvé dans [36].

2. Dans l'énoncé du théorème de Thom–Mather au § 3, il existe en fait, par l'analycité, un sous-ensemble sous-analytique E de $]0, a] \times]0, a']$, auquel $]0, a] \times \{0\}$ est adhérent, et tel que pour $(\varepsilon, \eta) \in E$, on ait...

Références

[1] Briançon J. et Henry J. P. G., Equisingularité générique des familles de surfaces à singularités isolées, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), pp. 259–281.

[2] Briançon J. et Speder J. P., Les conditions de Whitney impliquent «μ^* constant», *Ann. Inst. Fourier* **26** (2) (1976), pp. 153–163.

[3] Dubson A., Classes caractéristiques des variétés singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **287** (1978), pp. 237–240.

[4] Henry J. P. G. et Lê D. T., Limites d'espaces tangents. In: *Séminaire Norguet*, Lecture Notes in Math., 482, Springer, 1975, pp. 251–265.

[5] Henry J. P. G., Merle M. et Sabbah C., Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1984), à paraître.

[6] Hironaka H., *Introduction to Real-Analytic Sets and Real-Analytic Maps*, Istituto Matematico «L. Tonelli», Università di Pisa, Pisa, 1973.

[7] Hironaka H., Stratifications and Flatness. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 199–265.

[8] Hironaka H., Subanalytic Sets. In: *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Volume in honour of Y. Akizuki*, Kinokuniya, Tokyo, 1973.

[9] Kashiwara M., Index Theorem for a Maximally Overdetermined System of Linear Differential Equations, *Proc. Japan. Acad. Sci.* **49** (1973), pp. 803–804.

[10] Kashiwara M., *Systèmes d'équations microdifférentielles*, cours rédigé par T. Monteiro-Fernandes, Université de Paris-Nord, 1978.

[11] Kleiman S., The Enumerative Theory of Singularities. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976*, Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 297–396.

[12] Laumon G., Degré de la variété duale d'une hypersurface à singularités isolées, *Bull. Soc. Math. France* **104** (1976), pp. 51–63.

[13] Laufer H., Weak Simultaneous Resolution for Deformations of Gorenstein Surface Singularities. In: *Singularities*. Proc. Sympos. Pure Math., 40, 1983, part 2, pp. 1–29.

[14] Lê D. T., Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, *Ann. Inst. Fourier* **23** (4) (1973), pp. 261–270.

[15] Lê D. T., Some Remarks on Relative Monodromy. In: *Real and Complex Singularities, Nordic Summer School, Oslo 1976,* Sijthoff and Noordhoff, 1977, pp. 397–403.

[16] Lê D. T. et Mebkhout Z., Variétés caractéristiques et variétés polaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **296** (1983), pp. 129–132.

[17] Lê D. T. et Teissier B., Sur la géométrie des surfaces complexes I. Tangentes exceptionnelles, *Amer. J. Math.* **101** (1979), pp. 420–452.

[18] Lê D. T. et Teissier B., Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières, *Ann. of Math.* (2) **114** (1981), pp. 457–491.

[19] Lê D. T. et Teissier B., Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney II. In: *Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math., 40, 1983, part 2, pp. 65–103.

[20] Łojasiewicz S., *Ensembles semi-analytiques*, preprint multigraphié, I. H. E. S., Bures-sur-Yvette, 1965.

[21] Mather J., Stratifications and Mappings. In: *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, pp. 195–232.
[22] Merle M., Variétés polaires, stratifications de Whitney et classes de Chern des espaces analytiques complexes (d'après Lê–Teissier), *Séminaire Bourbaki, Nov. 82, Astérisque* **105–106** (1983), pp. 65–78.
[23] Milnor J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.
[24] Piene R., Polar Classes of Singular Varieties, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **11** (1978), pp. 247–276.
[25] Sabbah C., Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **294** (1982), pp. 39–41, et article dans: *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II–III), 6–10 juillet 1981, Astérisque* **101–102** (1983), pp. 286–319.
[26] Teissier B., Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. In: *Singularités à Cargèse, 1972, Astérisque* **7-8** (1973), pp. 285–362.
[27] Teissier B., Variétés polaires I, *Invent. Math.* **40** (1977), pp. 267–292.
[28] Teissier B., Variétés polaires II. In: *Algebraic Geometry, Proceedings, La Rábida, 1981*, Lecture Notes in Math., 961, Springer, pp. 314–491.
[29] Teissier B., Résolution simultanée et cycles évanescents II, appendice. In: *Séminaire sur les singularités des surfaces*, Lecture Notes in Math., 777, Springer, pp. 136–143.
[30] Thom R., Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), pp. 240–284.
[31] Verdier J.-L., Stratifications de Whitney et théorème de Bertini–Sard, *Invent. Math.* **36** (1976), pp. 295–312.
[32] Whitney H., Tangents to an Analytic Variety, *Ann. of Math.* **81** (1965), pp. 496–549.
[33] Zariski O., Some Open Questions in the Theory of Singularities, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), pp. 481–491.

Ajouté à la correction des épreuves:

[34] Hardt R., Stratification of Real Analytic Mappings and Images, *Invent. Math.* **28** (1975), pp. 193–208.
[35] Urabe T., Duality of Numerical Characters of Polar Loci, *Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ.* **17** (1981), pp. 331–345.
[36] Denkowska Z. et Wachta K., La sous-analycité de l'application tangente, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **30** (1982), pp. 329–331.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PLATEAU DE PALAISEAU, 91128 PALAISEAU CÉDEX, FRANCE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S. N° 169