g

Mémoire de DEA de mathématiques
1997-1998

SUR LA TOUR CHROMATIQUE D'UN ANNEAU COMMUTATIF NŒTHERIEN

d'après A. Neeman.

Kenji LEFEVRE
sous la direction de
Bernhard KELLER

Lundi 22 juin 1998

Université Denis Diderot Paris VII

0 Introduction

Dans ce mémoire, R désigne un anneau commutatif unitaire nœthérien, et $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ la catégorie dérivée de la catégorie des modules sur R. $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ sera la sous-catégorie pleine formée des complexes parfaits, i.e. les complexes quasi-isomorphes à un complexe borné de modules projectifs de type fini. Lorsque X appartient à $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ nous noterons $D(X)$ son dual dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$, c'est à dire $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X,R)$. Pour X,Y dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$, nous noterons $X \otimes Y$ le produit tensoriel dérivé $X \otimes_R^{\mathbf{L}} Y$. Enfin $\mathcal{H}om^{\cdot}(X,Y)$ sera le complexe dont le n-ième terme est l'ensemble des morphismes d'objets gradués $X \to Y[n]$ et la différentielle est $d(f) = d_Y f + (-1)^i f d_X$ où i est le degré de f.

Ce mémoire de DEA a pour base l'article [12] de Amnon Neeman. La première partie de cette publication traite d'un résultat obtenu par Hopkins qui permet de retrouver à partir de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ d'un anneau son spectre des idéaux premiers.

THEOREME 2.13 *L'application*

$$f(\mathcal{L}) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) |\ \textit{il existe}\ X \in \mathcal{L}\ \ \textit{tel que}\ \ p \in \mathrm{Supp}(X)\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-catégories épaisses de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ *dans l'ensenble des parties stables par spécialisation de* $\mathrm{Spec}(R)$. *Son inverse est donné par l'application*

$$g(P) = \{X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R) | \mathrm{Supp}(X) \subset P\}.$$

La catégorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ est égale à la sous-catégorie des objets compacts de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Les objets compacts forment un ensemble, il est donc possible de définir sur $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ des invariants cohomologiques, p. ex. le groupe de Grothendieck K_0 : nous regardons pour ce faire $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ comme une catégorie exacte, et K_0 est définie comme le "quotient" de ses objets par les suites exactes. Il est alors naturel de se demander ce qu'il advient de ces invariants lorsque nous localisons $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ par une sous-catégorie. Les sous-catégorie épaisses sont les noyaux des foncteurs localisations ; leur caractérisation semble un outil essentiel pour comprendre le comportement des invariants par rapport à ces foncteurs. L'auteur a déjà obtenu certains résultats dans cette direction, c.f. [13].

L'idée génératrice de ce théorème est topologique. L'objet $QS^0 = \Omega^\infty\Sigma^\infty S^0$ est un objet de la catégorie tensorielle $\mathcal{S}$ formée des spectres. Il existe une multiplication dans cette catégorie pour laquelle QS_0 est un anneau commutatif. D'autre part, il vérifie certaines propriétés dans $\mathcal{D}(\mathcal{S})$, la catégorie homotopique stable, qui sont analogues à celles de l'anneau R dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Nous voudrions connaitre le "spectre d'idéaux premiers" de cet anneau singulier QS_0 et à partir de là trouver des analogies entre la topologie et la géométrie algébrique. Regardant la catégorie des CW-spectres de type fini comme la catégorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}QS^0)$ qui est plus maniable et mieux connue que QS^0, Hopkins a tenté de reconstruire à partir de cette catégorie triangulée le "spectre" de l'anneau à homotopie près QS^0.

Le résultat que nous présentons ici est l'équivalent algébrique de celui de Hopkins. Malheureusement nous imposons à l'anneau R d'être nœthérien, ce qui exclut automatiquement le cas de QS^0. Il est cependant possible en supprimant l'hypothèse de nœthérianité de reconstruire le spectre à partir de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$, mais au lieu d'une bijection entre les systèmes de support du spectre pour la topologie de Zariski et les catégories épaisses de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$, nous ne considérons que celles qui sont principales, i.e. engendrée en tant que catégorie épaisse par un seul objet. Et le résultat est nettement moins satisfaisant.

Dans la seconde et la troisième section Neeman établit un lien entre les sous-catégories localisantes, les sous-catégories sommitales de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ et certains sous-ensembles du spectre de l'anneau. Plus précisément il montre dans la section 2 le théorème suivant :

THEOREME 3.3 *L'application f définie par*

$$f(\mathcal{L}) = \{p \in \mathrm{Spec}(R)| \textit{ il existe } X \in \mathcal{L} \textit{ tel que } X \otimes k(p) \neq 0\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-catégories localisantes de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ sur l'ensemble des parties de $\mathrm{Spec}(R)$. L'application inverse est donnée par

$$g(P) = \textit{la catégorie localisante engendrée par les } k(p) \textit{ où } p \in P$$

pour P une partie de $\mathrm{Spec}(R)$.

Notons que l'application g peut être reformulée de la façon suivante :

$$g(P) = \{X|\mathrm{Hom}(X, E(p)) = 0 \ \forall p \notin P\}.$$

Remarquons l'analogie entre ce théorème et le résultat suivant :

THEOREME 0.1 *L'application $\tilde{g}$ définie par*

$$\tilde{g}(P) = \{M | \mathrm{Hom}(M, E(R/q)) = 0 \textit{ pour tout } q \notin P\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-ensembles de Spec(R) *vers l'ensemble des sous-catégories localisantes de* Mod(R).

L'inclusion de la catégorie Mod(R) dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ induit une inclusion de la sous-catégorie $\tilde{g}(P)$ dans $g(P)$. Les sous-catégories localisantes de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ sont les sous-catégories dont les objets appartiennent à une sous-catégorie localisante de Mod$R$.

La section 5 permettra de préciser le théorème 3.3.

THEOREME 5.1 *L'application f du théorème 3.3 envoie les sous-catégories sommitales sur les systèmes de support de façon bijective.*

Ces résultats sont assez étonnants : en effet ils montrent que même en passant à la catégorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ nous gardons certaines informations sur le spectre de l'anneau.

Un corollaire important est déduit du dernier théorème. Comme cela est prouvé implicitement à la fin de ce mémoire nous savons qu'une sous-catégorie de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ engendrée par des objets compacts est sommitale et qu'une sous-catégorie sommitale est localisante par définition. Les réciproques sont fausses dans le cas général. Nous appelons la "conjecture sommitale" [6] l'énoncé suivant :

Une sous-catégorie est sommitale si et seulement si

elle est engendrée par des objets compacts.

Un contre-exemple explicite se trouve dans [8] où il est montré que nous pouvons trouver des sous-catégories sommitales qui ne contiennent aucun objet compact. Le théorème 5.1 permet cependant de prouver la conjecture dans le cas d'un anneau nœthérien. En effet il donne une caractérisation des sous-catégories sommitales de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ comme suit.

COROLLAIRE 5.2 *Les sous-catégories sommitales de* $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ *sont les sous-catégories localisantes engendrées par les sous-catégories épaisses de* $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$.

Enfin, énonçons le résultat de Thomason [15], qui généralise le théorème 2.14 au cas non nœthérien.

DEFINITION 0.2 – *Soit X un schema quasi-compact et quasi-séparé. Notons $\mathcal{D}(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur X.*

- *Les complexes parfaits, i.e. les objets localement quasi-isomorphes à des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules libres de type fini, forment la sous-catégorie $\mathcal{D}(X)_{parf}$.*
- *Une sous-catégorie $\mathcal{E}$ est dite tensorisante si, quel que soit $\mathcal{F}^\cdot \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{P}^\cdot \in \mathcal{D}(X)_{parf}$, $\mathcal{F}^\cdot \otimes \mathcal{P}^\cdot$ appartient à la sous-catégorie $\mathcal{E}$.*
- *Le support d'un objet $\mathcal{F}^\cdot \in \mathcal{D}(X)$ est défini par*

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}^\cdot) = \{x \in X | \mathcal{F}^\cdot_x \neq 0\}$$

- *Un système de support de X est une réunion de fermés.*

THEOREME 0.3 *L'application définie par*

$$f(\mathcal{E}) = \{x \in X | \textit{il existe un } \mathcal{F}^\cdot \in \mathcal{E} \textit{ tel que } \mathcal{F}^\cdot_x \neq 0\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-catégories tensorisantes de $\mathcal{D}(X)_{parf}$ vers l'ensemble des systèmes de support de X dont le complémentaire est quasi-compact. L'application inverse est donnée par

$$g(Y) = \{\mathcal{F}^\cdot \in \mathcal{D}(X)_{parf} | \mathrm{Supp}(\mathcal{F}^\cdot) \subset Y\}.$$

1 Un morphisme utile de $\mathcal{D}^{\mathbf{b}}(\mathrm{proj}\mathbf{R})$

PROPRIETE 1.1 *Lorsque X est parfait et Y appartient à $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$, le produit tensoriel dérivé $Y \otimes D(X)$ est quasi-isomorphe au complexe $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X,Y)$. En particulier, quand X est parfait, il existe un morphisme naturel $R \to X \otimes D(X)$.*

Démonstration: Nous allons montrer ce résultat par dévissage.

Pour un module projectif de type fini P et un module quelconque M, nous avons un morphisme

$$\mathrm{Hom}_R(P, M) \xleftarrow{\phi} M \otimes \mathrm{Hom}_R(P, R)$$
$$(x \mapsto m.f(x)) \leftarrow m \otimes f$$

qui est fonctoriel en P.

Clairement le morphisme ϕR est un isomorphisme. Comme ces deux foncteurs sont additifs, le morphisme ϕR^n est un isomorphisme,et le résultat reste vrai pour un module projectif de type fini.

Soit un complexe borné de modules projectifs de type fini P et M un complexe de modules. Nous avons un morphisme de complexes ϕ

$$\mathcal{H}om^{\cdot}_R(P, M) \xleftarrow{\phi} M \otimes \mathcal{H}om^{\cdot}(P, R)$$

Montrons que c'est une équivalence d'homotopie. Nous venons de voir le résultat pour un module projectif de type fini. Notons F_1 le foncteur $\mathrm{Hom}_R(\_, M)$ et F_2 le foncteur $M \otimes \mathrm{Hom}(\_, R)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathcal{A}b) \arrow[r, shift left=1.5ex, "F_1"] \arrow[r, shift right=1.5ex, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\phi"] \arrow[d] & \mathcal{C}(\mathrm{proj}R) \arrow[d] \\
\mathcal{H}(\mathcal{A}b) \arrow[r, shift left=1.5ex, "F_1"] \arrow[r, shift right=1.5ex, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\Phi"] & \mathcal{H}(\mathrm{proj}R)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $\Phi : F_2 \to F_1$ est un morphisme de foncteur triangulé, donc la sous-catégorie $\mathcal{X}$ formée des objets X tel que le morphisme ϕX soit inversible est une sous-catégorie triangulée.

Il reste à remarquer que la catégorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ est engendrée par les modules projectifs de type fini en tant que catégorie triangulée. Nous pouvons supposer que les objets de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ sont des complexes bornés de modules projectifs de type fini. Les objets concentrée en un seul degré appartiennent bien à tria(proj$R$). Montrons par récurrence sur la longueur des complexes que la catgorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ est incluse dans tria(proj$R$). Cela est clair d'après le diagramme suivant où les deux dernières lignes sont dans tria(proj$R$) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & \to & P^1 & \to & \dots & \to & P^n & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & & & \| & & \\
0 & \to & P^0 & \to & P^1 & \to & \dots & \to & P^n & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
0 & \to & P^0 & \to & 0 & \to & \dots & \to & 0 & \to & 0
\end{array}$$

Il résulte donc que pour tout P complexe borné de modules projectifs de type fini le morphisme ϕP est inversible dans $\mathcal{H}ModR$.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat (ie. $Y \otimes D(X)$ est quasi-isomorphe à $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, Y)$ pour X parfait). Par définition nous avons un quasi-isomorphisme

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, Y) \stackrel{qis}{\rightarrow} \mathcal{H}om(\mathbf{p}X, Y).$$

Comme X est parfait pX est homotope à un complexe borné de modules projectifs de type fini. Ainsi le membre de droite est quasi-isomorphe aux complexes

$$\begin{aligned} &\stackrel{qis}{\leftarrow} \mathcal{H}om(\mathbf{p}X, \mathbf{p}Y) \\ &\stackrel{qis}{\leftarrow} pY \otimes \mathcal{H}om(\mathbf{p}X, R) \\ &\stackrel{qis}{\rightarrow} Y \otimes^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathbf{p}X, R) \end{aligned}$$

Nous pouvons donc construire naturellement le morphisme annoncé par la composition $R \rightarrow \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, X) \rightarrow X \otimes D(X)$.

2 Une preuve du théorème de Hopkins

THEOREME 2.1 (théorème de nilpotence tensorielle) *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$. Supposons que pour tout corps k et tout morphisme $g : R \rightarrow k$, le morphisme $f \otimes k$ est nul. Alors le morphisme f est tensoriellement nilpotent : il existe $n > 0$ tel que $f^{\otimes n} : X^{\otimes n} \rightarrow Y^{\otimes n}$ est le morphisme nul.*

Démonstration: le morphisme f induit un morphisme $\tilde{f} : R \rightarrow D(X) \otimes Y$ defini comme la composée du morphisme naturel $R \rightarrow X \otimes D(X)$ et de $f \otimes D(X) : X \otimes D(X) \rightarrow Y \otimes D(X)$.
Nous remarquons que le morphisme $f^{\otimes n}$ est nul si et seulement si le morphisme $\tilde{f}^{\otimes n}$ est nul.
Nous pouvons donc considérer que $X = R$. Soit

$$\mathrm{Ann}(f^{\otimes n}) = \{x \in R | x f^{\otimes n} = 0\}.$$

C'est un idéal de R et $\mathrm{Ann}(f^{\otimes n}) \subset \mathrm{Ann}(f^{\otimes n+1})$. L'anneau R étant nœthérien il existe un entier n tel que pour tout entier $m > n$, nous avons $\mathrm{Ann}(f^{\otimes m}) = \mathrm{Ann}(f^{\otimes n})$. Remplaçons le morphisme f par $f^{\otimes n}$; il nous reste à montrer que $\mathrm{Ann} f = R$.

Supposons le contraire. Soit p un idéal premier minimal contenant $\mathrm{Ann} f$. En localisant par rapport à p nous nous trouvons dans la situation où

- (Condition 1) R est un anneau local d'idal maximal p.
- (Condition 2) Pour tout $n > 0$, on a l'égalité $\mathrm{Ann}(f) = \mathrm{Ann}(f^{\otimes n})$.
- (Condition 3) Il existe un m tel que, $p^m \subset \mathrm{Ann}(f) \subset p$. En effet le radical de $\mathrm{Ann}(f)$ est défini comme l'intersection des idéaux premiers minimaux qui le contiennent. La construction de p et la condition 1 implique que le radical de $\mathrm{Ann}(f)$ est l'idéal p. Et l'assertion résulte du fait qu'une puissance du radical d'un idéal est toujours contenue dans lui même.
- (Condition 4) $f \otimes R/p$ est le morphisme nul.

Pour démontrer le résultat, acceptons de façon préalable les propositions suivantes :

$\mathcal{F}(n)$: Soit R un anneau local nœthérien et réduit de dimension $\dim(R) \leq n$. Supposons que le morphisme $f : R \to X$ vérifie les conditions 3 et 4 citées plus haut. Le morphisme f est tensoriellement nilpotent.

$\mathcal{G}(n)$: Soit R un anneau local nœthérien qui n'est pas nécessairement réduit et dont la dimension $\dim(R)$ est inférieure ou égale à n. Supposons que le morphisme $f : R \to X$ vérifie les conditions 3 et 4 citées plus haut. Le morphisme f est tensoriellement nilpotent.

La contradiction cherchée est alors claire : la condition 2 est incompatible avec les trois autres.

Nous allons démontrer $\mathcal{F}(n)$ et $\mathcal{G}(n)$ par récurrence :

$\mathcal{F}(0)$: Un anneau nœthérien de dimension 0 est un anneau artinien. Pour un tel anneau le nilradical est égal au radical de Jacobson. comme l'anneau R est local, l'idéal maximal p est le radical de Jacobson. De plus R est réduit, p est l'idéal trivial. Par conséquent R est un corps.

$\mathcal{F}(n) \Rightarrow \mathcal{G}(n)$: Plaçons nous dans les conditions de $\mathcal{G}(n)$. Nous savons par $\mathcal{F}(n)$ que le morphisme $f \otimes R/\mathrm{rad}(R)$ est tensoriellement nilpotent. Il existe donc un entier m tel que $f^{\otimes m} \otimes R/\mathrm{rad}(R) = 0$. Pour simplifier, remplaçons le morphisme f par $f^{\otimes n}$. On peut donc écrire modulo les bords $f = \sum x_i g_i$ où $x_i \in \mathrm{rad}(R)$ et $g_i \in X^0$. R étant nœthérien et local $(\mathrm{rad}(R))^m = 0$ pour un m suffisamment grand. Il s'ensuit que $f^{\otimes m} = (\sum x_i g_i)^m = 0$ dans $(X^0)^{\otimes m}$.

$\mathcal{G}(n) \Rightarrow \mathcal{F}(n{+}1)$: L'anneau R est maintenant réduit et il est de dimension

$\dim(R) > 0$.Montrons qu'il existe un élément régulier dans l'idéal p.

LEMME 2.2 *Soit R un anneau local d'idéal maximal p qui est nœthérien, réduit et de dimension* $\dim(R) > 0$. *Il existe un élément régulier dans l'idéal p.*

Démonstration: Par nœthérianité de l'anneau, les idéaux premiers minimaux sont en nombre fini ; notons les $p_1, \ldots, p_n$. Clairement la réunion $\cup_i p_i$ est incluse dans p. Montrons qu'elle l'est strictement. Comme l'anneau est de dimension strictement positive, aucun idéal minimal n'est maximal. Choisissons dans chaque p_i un élément x_i qui n'est pas dans les autres idéaux p_j, $j \neq i$. Nous notôns $y_i = \prod_{j \neq i} x_j$. Alors l'élément $x = \sum_i y_i$ appartient à $(p \setminus \bigcup_i p_i)$ et il doit être régulier, sinon il existe un élément $z \neq 0$ tel que $xz = 0$. Or pour tout idéal premier minimal p_i, $xz = 0$ appartient à p_i, et par contruction $x \notin p_i$. Nous en déduisons que $z \in p_i$. Donc $z \in \cap_i p_i$ où $\cap_i p_i$ est le nilradical de R rad(0) qui est trivial car R est réduit (contradiction avec $z \neq 0$).

Retour à la démonstration précédente : Comme $p^m \subset \mathrm{Ann}(f)$, nous avons maintenant un élément régulier dans $\mathrm{Ann}(f)$; appelons le x.
Représentons le morphisme f par un morphisme de complexe

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & X^1 \\
\uparrow & & \uparrow \\
R & \xrightarrow{f} & X^0 \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & X^{-1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

L'élement x annule f donc $f(x)$ est un bord dans X^0. Par conséquent nous pouvons étendre le morphisme f au diagramme suivant :

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & X^1 \\
\uparrow & & \uparrow \\
R & \xrightarrow{f} & X^0 \\
x \uparrow & & \uparrow \\
R & \xrightarrow{g} & X^{-1} \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & X^{-2} \\
\uparrow & & \uparrow
\end{array}
$$

L'élément x étant régulier la suite $0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow R/xR \rightarrow 0$ est exacte. Cela équivaut à dire que $0 \rightarrow R \xrightarrow{x} R \rightarrow 0$ est quasi-isomorphe à R/xR. Nous en déduisons une factorisation du morphisme f par $R \xrightarrow{\alpha} R/xR \xrightarrow{\beta} X$. Par suite le morphisme $f^{\otimes n+1}$ est égal à

$$R \xrightarrow{\alpha \otimes 1} R/xR \xrightarrow{1 \otimes f^{\otimes n}} R/xR \otimes X^{\otimes n} \xrightarrow{\beta \otimes 1} X^{\otimes n+1}$$

Or la régularité de x nous certifie que R/xR est de dimension n et donc (d'après $\mathcal{G}(n)$) $f \otimes R/xR$ est tensoriellement nilpotent. Par suite f est tensoriellement nilpotent.

Remarque 2.3 *La réciproque au théorème est vraie. En effet si le morphisme $f^{\otimes n}$ est nul alors le morphisme $(f \otimes k)^{\otimes n}$ est nul. On vérifie à la main que pour un corps k, un morphisme k-linéaire tensoriellement nilpotent est nul.*

Remarque 2.4 *En utilisant le calcul graphique de Penrose nous montrons qu'un morphisme tensoriellement nilpotent est nilpotent au sens habituel. Notons $ev : X \otimes D(X) \rightarrow R$ l'évaluation, $m : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ le morphisme qui associe à $x \otimes y$ l'élément $(-1)^{degx.degy} y \otimes x$, et $\epsilon : R \rightarrow X \otimes D(X)$ le morphisme construit en 1.1.*

Le morphisme $f \cdot \ldots \cdot f : X \to X$ est la composée de

$$\begin{array}{cl}
X \otimes R \otimes \ldots \otimes R & \\
\downarrow & \mathbf{1} \otimes \epsilon \otimes \ldots \otimes \epsilon \\
X \otimes X \otimes D(X) \otimes \ldots \otimes X \otimes D(X) & \\
\downarrow & \mathbf{1} \otimes h \\
X \otimes \ldots \otimes X \otimes D(X) \otimes \ldots \otimes D(X) & \\
\downarrow & f \otimes \ldots \otimes f \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1} = 0 \\
X \otimes \ldots \otimes X \otimes D(X) \otimes \ldots \otimes D(X) & \\
\downarrow & \mathbf{1} \otimes h' \\
X \otimes X \otimes D(X) \otimes \ldots \otimes X \otimes D(X) & \\
\downarrow & \mathbf{1} \otimes ev \otimes \ldots \otimes ev \\
X \otimes R \otimes \ldots \otimes R &
\end{array}$$

où les morphismes h et h' réordonnent les termes en utilisant le morphisme m.

DEFINITION 2.5 *Soit un complexe parfait X. Le* **support cohomologique** *de X est l'ensemble $\{p \in \mathrm{Spec}(R) | X \otimes R_p \neq 0\}$. Nous le noterons* $\mathrm{Supp}(X)$.

Remarque 2.6 *Nous avons* $\mathrm{Supp}(X) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | p \supseteq \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ann}(H^i(X)\}$

$$= V(\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} \mathrm{Ann}(H^i(X))$$

LEMME 2.7 *Soient X, Y deux complexes parfaits. Supposons que* $\mathrm{Supp}(X) \subset \mathrm{Supp}(Y)$. *L'objet X est alors dans la sous-catégorie épaisse engendrée par Y.*

Démonstration: Reprenons le morphisme $R \to Y \otimes D(Y)$ (construit en 1.1) et insérons-le dans un triangle :

$$R \xrightarrow{f} Y \otimes D(Y) \to M_f \xrightarrow{h} R[1]$$

Nous allons montrer que pour un corps k et un morphisme $\alpha : R \to k$ tel que $Ker(\alpha) \in \mathrm{Supp}(Y)$, le morphisme $f \otimes k$ est un monomorphisme scindé.

Sachant qu'un monomorphisme de k vers un espace k-vectoriel non nul se scinde, il faut vérifier que $Y \otimes D(Y) \otimes k \neq 0$ et que le morphisme $k \to Y \otimes D(Y) \otimes k$ est un monomorphisme. Le premier est clair puisque $Ker(\alpha) \in \mathrm{Supp}(Y)$. Pour le second on regarde

$$\begin{array}{cccc}
1_Y & \mathcal{H}om(Y,Y) & \overset{qis}{\to} & Y \otimes_k \mathcal{H}om(Y,k) = Y \otimes D(Y) \\
\uparrow & \uparrow & \nearrow & \\
1 & k & &
\end{array}$$

Mais $H^0\mathcal{H}om(Y,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(Y,Y) \ni 1_Y \neq 0$ puisque $Y \neq 0$.
Des propriétés habituelles sur les catégories triangulées, nous déduisons que le morphisme $h \otimes k$ est nul.

LEMME 2.8 *Soit X un complexe parfait et I l'idéal $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} \mathrm{Ann}(H^i(X)\}$, alors il existe un entier $N \gg 0$ tel que le complexe X est quasi-isomorphe à un complexe X' qui appartient à* $\mathrm{par}(R/I^N)$.

Démonstration: D'après [10][prop 1.15] on sait que pour une catégorie abélienne $\mathcal{B}$ et une sous-catégorie de Serre $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on a une suite exacte de catégories

$$0 \to \mathcal{D}^b\mathcal{A} \to \mathcal{D}^b\mathcal{B} \to \mathcal{D}^b(\mathcal{B}/\mathcal{A}) \to 0$$

lorsque $\mathcal{D}^b\mathcal{A} \to \mathcal{D}^b_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ est pleinement fidèle ($\mathcal{D}^b_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{D}^b\mathcal{B}$ dont l' homologie des objets appartient à $\mathcal{A}$).

Posons $\mathcal{B} = ModR$ et $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{B} | I^N M = 0 \text{ pour } N \gg 0\}$. Nous devons vérifier que le foncteur $\mathcal{D}^b\mathcal{A} \to \mathcal{D}^b_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ est pleinement fidèle. Cela se démontre en utilisant le lemme d'Artin-Rees et le critère c1 du même article. Il s'ensuit que X est quasi-isomorphe à un complexe de R/I^N-modules pour N grand.

Retour à la démonstration précédente : Posons $J = I^N$. Remarquons que $\mathrm{Supp}(R/J)$ est égal à $\mathrm{Supp}(X)$; le morphisme $h \otimes R/J$ vérifie donc les hypothèses du théorème précédent appliqué à la catégorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R/J)$ (car $ker(\alpha) \supset J$ implique que $ker(\alpha) \in \mathrm{Supp}(X)$). Nous en déduisons que $h^n \otimes R/J = 0$ et du même coup que $h^n \otimes X = h^n \otimes R/J \otimes X = 0$.
Complétons le morphisme $M_f^{\otimes k} \overset{h^{\otimes k}}{\to} R$ en un triangle

$$\begin{array}{ccc}
M_f^{\otimes k} & \overset{h^{\otimes k}}{\to} & R \\
& \searrow \quad \swarrow & \\
& N_{h^{\otimes k}} &
\end{array}$$

En utilisant l'axiome de l'octahèdre appliqué à la composée $h \cdot (1 \otimes h^{\otimes k-1}) = h^{\otimes k}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & M_f \otimes N_{h^{\otimes k-1}} \arrow[dl] & & \\
 & M_f^{\otimes k} \arrow[rr, "1\otimes h^{\otimes k-1}"] \arrow[dr, "h^{\otimes k}"] & & M_f \arrow[ul] \arrow[dl, "h"] & \\
N_{h^{\otimes k}} \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & R \arrow[rr] & & N_h = Y \otimes D(Y) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

On trouve pour chaque k un triangle :

$$\begin{array}{ccc}
Y \otimes D(Y) = N_h & \rightarrow & M_f \otimes N_{h^{\otimes k-1}} \\
\searrow & & \swarrow \\
 & N_{h^{\otimes k}} &
\end{array}$$

Il est donc aisé par un raisonnement par réccurence d'en déduire que $N_{h^{\otimes k}}$ est dans la sous-catégorie triangulée engendrée par Y. D'autre part, le morphisme $h^{\otimes n} \otimes X$ est nul dans le triangle suivant :

$$\begin{array}{ccc}
M_f^{\otimes n} \otimes X & \overset{h^{\otimes n} \otimes X}{\rightarrow} & X \\
\searrow & & \swarrow \\
 & N_{h^{\otimes n}} \otimes X &
\end{array}$$

donc X est un facteur direct de $N_{h^{\otimes n}} \otimes X$. Par conséquent X est dans la sous-catégorie épaisse engendrée par Y.

Remarque 2.9 *Pour démontrer le lemme nous avons utilisé le morphisme $R \to Y \otimes D(Y)$. Remarquons que nous pourrions faire le même raisonnement avec le morphisme $ev : Y \otimes D(Y) \to R$.*

Soit h le morphisme qui apparait dans le triangle

$$Y \otimes D(Y) \to R \to M \to S(Y \otimes D(Y).$$

Nous montrons de la même manière que le morphisme $h \otimes R/I$ est tenseur nilpotent, et que le morphisme $h^{\otimes n} \otimes X$ s'annule. L'objet X devient alors un facteur direct du cône inverse de $h^{\otimes p}$, tensorisé par X.
Il est possible de montrer que les cônes inverses des puissances tensorielle du morphisme h sont les approximations de Brown X_p qui apparaissent dans la démonstration des théorèmes 4.3 et 4.4.

La construction est alors plus intuitive puisqu'elle consiste à approximer l'adjoint à droite I_ρ à l'inclusion I de la sous-catégorie épaisse engendrée par Y. Nous savons que

$$I_\rho IR \to R \to N \to SI_\rho IR$$

est un triangle. En le tensorisant par X, nous trouvons le triangle

$$I_\rho IX \to X \to N \otimes X \to SI_\rho IX.$$

L'objet $N \otimes X$ est nul si et seulement si X appartient à la sous-catégorie épaisse engendrée par Y. Nous ne demandons pas tant : si le deuxième morphisme s'annule, nous pouvons conclure. La démonstration nous montre que c'est ce qui se passe pour une approximation de Brown X_p.

LEMME 2.10 *Soient $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ une sous-catégorie épaisse et*

$$P(\mathcal{L}) = \{p \in \mathrm{Spec}(R)|\ \textit{il existe } X \in \mathcal{L} \ \textit{ tel que } p \in \mathrm{Supp}(X)\}.$$

Si le support cohomologique de $X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ est inclus dans $P(\mathcal{L})$, alors $X \in \mathcal{L}$.

Démonstration: Nous savons que lorsque R est un anneau nœthérien et M un R-module de type fini, les éléments minimaux de $\mathrm{Ass}(M)$ sont les mêmes que ceux de $\mathrm{Supp}(M)$ et qu'ils sont en nombre fini. Il s'ensuit que l'ensemble des idéaux minimaux de $\mathrm{Supp}(X)$ est fini. Il existe donc un nombre fini d'éléments $\{Y_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{L}$ tel que la réunion $\bigcup_i \mathrm{Supp}(Y_i)$ contient tous les éléments de $\mathrm{Supp}(X)$. Comme $\bigcup_i \mathrm{Supp}(Y_i)$ est fermé, $\bigcup_i \mathrm{Supp}(Y_i)$ est incluse $\mathrm{Supp}(X)$ et par suite $\mathrm{Supp}(X)$ est contenu dans $\mathrm{Supp}(\bigoplus_i Y_i)$. Nous concluons à l'aide du lemme précédent.

LEMME 2.11 *Soit un idéal $p \in \mathrm{Spec}(R)$. Il existe $X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ de support cohomologique $\mathrm{Supp}(X) = \overline{p}$ où $\overline{p}$ est la fermeture de p dans $\mathrm{Spec}(R)$.*

Démonstration: Par nœthérianité de R, l'idéal p est engendré par un nombre fini de générateurs, disons $a_1, \ldots, a_n$. Nous allons montrer que le complexe de Koszul $X = \otimes_i (R \xrightarrow{a_i} R)$ convient. Clairement $X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$. Il reste à montrer que son support est la fermeture de p dans $\mathrm{Spec}(R)$.

$\mathrm{Supp}(X) \supset \overline{p}$: Si un idéal q n'est pas dans $\overline{p}$ il existe un i pour lequel a_i n'est pas dans q. Cela entraine que $R_q \xrightarrow{a_i} R_q$ est inversible et par conséquent contractile. L'idéal q n'appartient donc pas au support de X.

$\overline{p} \supset \mathrm{Supp}(X)$: Nous allons montrer que

$$\mathrm{Supp}(P \otimes Q) = \mathrm{Supp}(P) \cap \mathrm{Supp}(Q)$$

lorsque $P, Q \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$.
Ramenons nous au cas de complexes d'espaces vectoriels pour lesquels le résultat est clair, car dans ce cas le produit tensoriel de deux complexes est acyclique si et seulement si l'un d'eux est acyclique.
Nous savons que $(P \otimes_R Q)_p = P_p \otimes_{R_p} Q_p$. Montrons par réccurence sur la longueur d'un complexe que, pour un anneau (A, m) local, un complexe parfait X est acyclique si et seulement si $X \otimes A/m$ est acyclique.
Si le complexe est de longueur 2 et que $0 \to P \otimes A/m \overset{f \otimes A/m}{\to} Q \otimes A/m \to 0$ (*) est acyclique, alors $Imf \otimes A/m = Q \otimes A/m$ d'où l'égalité $Q = Imf + mQ$. Le lemme de Nakayama implique que le morphisme f est surjectif. Le module Q est projectif, donc il existe un morphisme injectif g tel que $f \cdot g = \mathbf{1}$. On en déduit que $P = Q + kerf$. Or d'aprés l'acyclicité de (*), nous avons l'inclusion $kerf \subset mP$. Il s'ensuit que $P = Q + mP$. Une fois de plus le lemme de Nakayama nous donne le résultat.
Pour un complexe de longueur supérieure, nous montrons la surjectivité du dernier morphisme de la même manière et utilisons le fait que le dernier terme est projectif pour nous ramener au cas d'un complexe de longueur moindre.
Le résultat souhaité est alors clair par l'égalité

$$(P_p \otimes_{R_p} Q_p) \otimes_{R_p} k(R/p) = (P_p \otimes_{R_p} k(R/p)) \otimes_{k(R/p)} (Q_p \otimes_{R_p} k(R/p)).$$

Il s'ensuit que $\overline{p} \supset \mathrm{Supp}(X)$.

DEFINITION 2.12 *Un* **système de support** *est une réunion de fermés de* $\mathrm{Spec}(R)$.

Remarque 2.13 *Soit P une partie de* $\mathrm{Spec}(R)$. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- L'ensemble P est un système de support.
- L'ensemble P est stable par spécialisation.
- L'ensemble P est une réunion de fermés du type $\overline{p}$ où $p \in \mathrm{Spec}(R)$.

THEOREME 2.14 *L'application*

$$f(\mathcal{L}) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) |\ \textit{il existe } X \in \mathcal{L} \ \textit{ tel que } \ p \in \mathrm{Supp}(X)\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-catégories épaisses de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ sur l'ensenble des systèmes de support de $\mathrm{Spec}(R)$. *Son inverse est donné par l'application*

$$g(P) = \{X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R) | \mathrm{Supp}(X) \subset P\}.$$

Démonstration: L'injectivité de f est le lemme 2.10 ; la surjectivité est le lemme précédent.

3 Sous-catégories localisantes de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$

Dans cette section, lorsque p est un idéal premier, nous noterons $k(p)$ le corps des fractions de R/p. $E(R/p)$ désignera l'enveloppe injective de R/p. Nous rappelons que $E(R/p)$ est un module injectif indécomposable qui est de surcroît un R_p-module, et réciproquement tout module injectif indécomposable est isomorphe à un des $E(R/p)$. De plus tout élément $x \in E(R/p)$ est annulé par p^n pour un certain n. Chaque module injectif est la somme d'injectifs indécomposables à permutation près.

DEFINITION 3.1 *On appelle une sous-catégorie* **localisante** *une sous-catégorie triangulée aux sommes directes infinies.*

Remarque 3.2 *Une sous-catégorie localisante est stable par limite directe homotopique et par limite directe filtrante.*

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3.3 *L'application f définie par*

$$f(\mathcal{L}) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) |\ \textit{il existe } X \in \mathcal{L} \textit{ tel que } X \otimes k(p) \neq 0\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-catégories localisantes de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ vers l'ensemble des parties de $\mathrm{Spec}(R)$. L'application inverse p envoie une partie P sur la sous-catégorie localisante engendrée par les $k(p)$, $p \in P$.

LEMME 3.4 *Soient $p \in \mathrm{Spec}(R)$ et $X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ un complexe dont chacune des composantes est un injectif somme directe de $E(R/p)$. (les sommes d'injectifs sont injective car R est nœthérien)*
Le complexe X est alors dans la sous-catégorie localisante $\mathcal{L}$ engendrée par $k(p)$.

Démonstration: Chaque élément $x \in E(R/p)$ étant annulé par p^n pour un certain n, nous avons une filtration de X comme suit :
$0 = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$ où X_i désigne les éléments de X annulés par p^i. Nous remarquons que X_i/X_{i+1} est un complexe de $k(p)$-modules. Par conséquent le complexe quotient X_i/X_{i+1} est quasi-isomorphe à une somme directe de suspensions de $k(p)$. Par suite il est dans $\mathcal{L}$.
D'autre part, l'inclusion de X_{i-1} dans X_i nous donne un triangle $X_{i-1} \to X_i \to X_i/X_{i-1} \to X_{i-1}[1]$. Par récurrence nous déduisons que tout les X_i appartiennent à $\mathcal{L}$. Le complexe X est la limite directe $\varinjlim X_i$, d'après la

remarque 3.2 il est dans $\mathcal{L}$.

Soit $X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Le complexe X est quasi-isomorphe à un complexe I de modules injectifs. Nous savons que chaque module injectif est somme directe de modules injectifs indécomposables (ici les $E(R/p)$, $p \in \mathrm{Spec}(R)$). Remarquons que pour deux idéaux q et p, l'idéal p est inclus dans q si et seulement si il existe un morphisme non-nul de $E(R/p)$ vers $E(R/q)$.
Soit Y un système de support. Définissons le complexe $\Gamma_Y(X)$ comme le complexe "formé" des injectifs $E(R/q)$ de I, $q \in Y$, et le complexe $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X)$ par la suite exacte

$$0 \to \Gamma_{\overline{p}\backslash p}(X) \to \Gamma_{\overline{p}}(X) \to \Gamma_{\overline{p}/(\overline{p}\backslash p)}(X) \to 0.$$

Notons que le complexe quotient $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X)$ est déduit de X en "prenant" ses termes isomorphes à $E(R/p)$. Ces définitions correspondent à celles usitées dans la terminologie de Grothendieck : si M est un R-module et Y le spectre de l'anneau R/I pour I un idéal, $\Gamma_Y(M)$ est l'ensemble des "sections" de M sur le fermé Y, i.e. l'ensemble des éléments x de M tel qu'il existe un $N \gg 0$ pour lequel $I^N x = 0$.

LEMME 3.5 *Soient P une partie de* $\mathrm{Spec}(R)$ *et X un complexe de* $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ *tel que pour tout $p \notin P$, $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X) = 0$. X est alors dans la sous-catégorie localisante $\mathcal{L}$ engendrée par les $k(p)$, $p \in P$.*

Démonstration: Soit λ l'ensemble de tous les systèmes de support Y tel que $\Gamma_Y(X)$ est dans la sous-catégorie $\mathcal{L}$. Nous allons montrer que cet ensemble contient un élément maximal et que cet élément est le système de support $\mathrm{Spec}(R)$. Le résultat sera alors clair puisque $\Gamma_{\mathrm{Spec}(R)}(X) = X$.
Comme les sous-catégories localisantes sont stables par limite directe filtrante, et que $\Gamma_{\bigcup Y_i}(X) = \varinjlim \Gamma_{Y_i}(X)$, l'ensemble λ est stable par réunion. De plus λ est non vide. En effet l'ensemble vide est un système de support et $\Gamma_\emptyset(X) = 0$. Le lemme de Zorn nous certifie l'existence d'un élément maximal Y dans λ. Nous voulons montrer que $Y = \mathrm{Spec}(R)$. Raisonnons par l'absurde. Si $Y \neq R$, alors $\mathrm{Spec}(R) \setminus Y$ est non vide, et par nœthérianité il contient un élément maximal p. Par construction nous sommes dans la situation suivante :

$$\Gamma_{Y \cup p/Y}(X) = \Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X).$$

et par hypothèse soit p appartient à P, et $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X)$ est nul et par suite appartient à $\mathcal{L}$; soit p n'appartient pas à P, i.e. $k(p) \in \mathcal{L}$. Du lemme précédent et de la suite exacte

$$0 \to \Gamma_{\overline{p}\setminus p}(X) \to \Gamma_{\overline{p}}(X) \to \Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\setminus p}(X) \to 0$$

nous déduisons que $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\setminus p}(X) \in \mathcal{L}$, et par suite que $\Gamma_{Y\cup p}(X) \in \mathcal{L}$. Nous sommes en contradiction avec la maximalité de Y.

LEMME 3.6 *Soient P une partie de* $\mathrm{Spec}(R)$ *et X un complexe de* $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ *tel que pour tout $p \in P$, $X \otimes k(p) = 0$. Soit la sous-catégorie localisante $\mathcal{L}$ engendrée par les $k(p)$ où $p \in P$. Nous avons alors $X \otimes \mathcal{L} = 0$.*

Démonstration: Le produit tensoriel est un foncteur triangulé qui commute aux sommes infinies. On procède par dévissage.

LEMME 3.7 *Soit $X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ tel que quel que soit $p \in \mathrm{Spec}(R)$ le produit tensoriel $X \otimes k(p)$ est nul, alors le complexe X est lui-même nul.*

Démonstration: Le lemme précédent nous assure que pour tout Y appartenant à la sous-catégorie engendrée par les $E(R/p)$, $p \in \mathrm{Spec}(R)$, le produit tensoriel dérivé $X \otimes Y$ est nul. D'autre part le lemme 3 nous donne l'égalité $g(\mathrm{Spec}(R)) = \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$, de là $X = X \otimes R = 0$.

LEMME 3.8 *Soit $X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ un complexe dont toutes les composantes sont des sommes directes de $E(R/p)$ pour un p donné. Alors $X \otimes k(p') = 0$ si $p' \neq p$.*

Démonstration: Le lemme 3.4 nous certifiant que $X \in g(\{p\})$, il suffit de montrer que $k(p) \otimes k(p') = 0$ lorsque $p' \neq p$. Il existe un élément x qui appartient par exemple à $p \setminus p'$. Soit λ_x la multiplication par x. C'est un isomorphisme pour $k(p)$ et l'application nulle pour $k(p')$. De la bilinéarité du produit tensoriel nous déduisons l'égalité

$$\lambda_x \otimes k(p) = k(p') \otimes \lambda_x = \lambda_x$$

Le premier terme est l'application nulle, le second un isomorphisme de $k(p) \otimes k(p')$. L'objet $k(p) \otimes k(p')$ est donc nul dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$.

LEMME 3.9 *Soit $X \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ un complexe dont toutes les composantes sont des sommes directes de $E(R/p)$ pour un p donné. Alors $X \otimes k(p) = 0$ est équivalent à $X = 0$.*

Démonstration: Immédiat d'après les résultats qui précédent.

Démonstration du théorème 3.3

Montrons d'abord que $f \cdot g = \mathbf{1}$.

$P \subset f \cdot g(P)$ est clair.

Montrons $f \cdot g(P) \subset P$. Soit $X \in g(P)$. D'après les lemmes précédents le support cohomologique de X est inclus dans P.

Montrons maintenant que $g \cdot f = \mathbf{1}$.

Commençons par $g \cdot f(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$. Soit $p \in f(\mathcal{L})$. Par définition il existe un X dans $\mathcal{L}$ tel que $X \otimes k(p) \neq 0$. La sous-catégorie $\mathcal{L}$ est localisante donc $X \otimes k(p)$ appartient à $\mathcal{L}$ et $X \otimes k(p)$ est la somme directe de suspensions de $k(p)$. Etant épaisse, la sous-catégorie $\mathcal{L}$ est stable par facteur direct. Il s'ensuit que $k(p) \in \mathcal{L}$. D'où le résultat.

Montrons $\mathcal{L} \subset g \cdot f(\mathcal{L})$. Soit $X \in \mathcal{L}$. Le complexe $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X) \otimes k(p) = X \otimes k(p)$ est nul si et seulement si $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X)$ est nul. L'objet X est dans la sous-catégorie localisante engendrée par les $k(p)$ pour lesquels $\Gamma_{\overline{p}/\overline{p}\backslash p}(X)$ n'est pas nul. D'après le lemme , cela équivaut à dire que $X \otimes k(p) \neq 0$, et $X \in g \cdot f(\mathcal{L})$.

4 Théorème de localisation de Bousfield et sous-catégories sommitales.

DEFINITION 4.1 *Soient $\mathcal{L}$ une sous-catégorie localisante et $X \in \mathcal{L}$. Un objet X est dit* **$\mathcal{L}$-local** *lorsque* $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, X) = 0$ *(i.e. si $Y \in \mathcal{L}$ alors* $\mathrm{Hom}(Y, X) = 0$*).*

DEFINITION 4.2 *Soient $\mathcal{L}$ une sous-catégorie localisante et $X \in \mathcal{L}$. Un morphisme $X \xrightarrow{f} X_{\mathcal{L}}$ est une* **localisation** *si $X_{\mathcal{L}}$ est $\mathcal{L}$-local et si pour tout Y $\mathcal{L}$-local l'appplication*

$$\mathrm{Hom}(f, Y) : \mathrm{Hom}(X_{\mathcal{L}}, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y)$$

est bijective.

THEOREME 4.3 (théorème de localisation de Bousfield) *Soit $\mathcal{L}$ une sous-catégorie localisante de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Tout élément X de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ admet une localisation (L'univers est susceptible d'avoir été augmenté pour rendre cela possible). De plus l'élément Z du triangle $Z \to X \xrightarrow{f} X_{\mathcal{L}} \to$ est dans $\mathcal{L}$.*

Démonstration: La procédure consiste à montrer que le foncteur $P : \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)/\mathcal{L}$ admet un adjoint à droite P_ρ. Le morphisme $X \to P_\rho \cdot PX$ sera la localisation de X.

La sous-catégorie $\mathcal{L}$ étant localisante, l'ensemble $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{L}}$ des morphismes du système multiplicatif associé a $\mathcal{L}$ est stable par sommes directes, donc le foncteur P commute aux sommes directes et le foncteur

$$F = \mathrm{Hom}(P?, X) : \mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)^{op} \to \mathcal{A}b$$

est un foncteur cohomologique qui transforme les sommes directes en produits directs.

Le résultat sera montré si ce foncteur est représentable. En effet si nous avons l'égalité

$$\mathrm{Hom}(P?, X) = \mathrm{Hom}(?, Y)$$

il suffira de poser $P_\rho X = Y$.

Pour montrer la représentabilité de F, nous avons besoin du théorème de représentabilité de Brown.

THEOREME 4.4 (théorème de représentabilité de Brown) *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée pour laquelle les sommes infinies existent et qui admet un ensemble formé d'objets compacts $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X}$ engendre $\mathcal{T}$ en tant que catégorie localisante.*
Un foncteur cohomologique $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}b^{op}$ est représentable si et seulement si il commute aux sommes directes.

Notation : Pour chaque M de $\mathcal{T}$, posons $M^\wedge = \mathrm{Hom}(M, ?)$. Lorsque $\mathcal{X}$ est un ensemble d'objets, nous noterons $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$ la sous-catégorie formée des suspensions et des désuspensions d'objets de $\mathcal{X}$ (c'est encore un ensemble) ; et $\mathcal{X}^+$ désignera la classe formée des objets qui sont sommes (infinies) d'objets $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$.

Commençons par montrer le lemme suivant :

LEMME 4.5 *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée aux sommes infinies et $\mathcal{X}$ un ensemble formé d'objets compacts. Supposons que le foncteur $F : \mathcal{T} \to \mathcal{A}b^{op}$ commute aux sommes directes. Alors il existe un objet X de la sous-catégorie $\mathcal{X}^+$ et un morphisme $\nu : X^\wedge \to F$ dans $\mathcal{T}$ qui restreint à la catégorie $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$ est surjectif.*

Démonstration: Nous notons $\tilde{F}$ la restriction à $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$ du foncteur F. La partie $\mathcal{X}$ étant un ensemble, construisons à l'aide du lemme de Yoneda un morphisme surjectif dans la catégorie des foncteurs de $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$ vers la catégorie opposée à celle des groupes abéliens.

$$\tilde{\nu} : \bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i^\wedge \to \tilde{F}.$$

Encore d'après Yoneda, nous avons les égalités :

$$\mathrm{Hom}_{S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}}(\bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i^\wedge, \tilde{F}) = \prod_{i \in \mathbf{I}} \mathrm{Hom}_{S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}}(C_i^\wedge, \tilde{F})$$

$$= \prod \tilde{F} C_i = \prod F C_i = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i^\wedge, F).$$

D'autre part le foncteur F commute aux sommes directes, donc nous avons $\prod F C_i = F \bigoplus_i C_i$ et par conséquent

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i^\wedge, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((\bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i)^\wedge, F).$$

En d'autres termes, le morphisme $\tilde{\nu}$ s'étend en un morphisme ν dans $\mathcal{T}$, et nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\nu : \bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i^\wedge \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{F} \\
& (\bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i)^\wedge \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Lorsque nous restreignons le diagramme à la sous-catégorie $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$, la flèche de gauche devient un isomorphisme car les objets sont tous compacts, et la flèche de droite devient surjective puisque le morphisme $\tilde{\nu}$ l'est par construction. L'objet $X = \bigoplus_{i \in \mathbf{I}} C_i$ avec le morphisme ν vérifie bien ce que nous souhaitions.

Démonstration du théorème de Brown : Nous allons prouver que le foncteur F est représenté par la limite homotopique d'une suite

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \to \ldots \to X_p \xrightarrow{f_p} X_{p+1} \to \ldots, \quad p \in \mathbf{N}$$

où les cônes sur les morphismes f_p sont dans la sous-catégorie $\mathcal{X}^+$.

Montrons que la condition est suffisante.

Nous allons construire par récurrence une suite

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \to \ldots \to X_p \xrightarrow{f_p} X_{p+1} \to \ldots, \quad p \in \mathbf{N}$$

et des morphismes $\pi_{p+1} : X_{p+1}^{\wedge} \to F$ tel que $\pi_{p+1} \cdot f_p^{\wedge} = \pi_p$.

Les objets de $\mathcal{X}$ forment un ensemble. D'après le lemme précédent, il existe un objet X_0 qui appartient à $\mathcal{X}^+$ et un morphisme $\pi_0 : X_0^{\wedge} \to F$ qui induit une surjection

$$\pi_0 X : S^n X_0^{\wedge}(S^n X) \to F S^n X$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $X \in \mathcal{X}$.

Supposons le morphisme f_p construit. Appliquons le lemme précédent au foncteur $\ker \pi_i$. Nous trouvons un objet Z_p qui appartient à $\mathcal{X}^+$ ainsi qu'un morphisme $\rho_p : Z_p \to X_p$ qui induit une surjection

$$Z_p^{\wedge}(S^n X) \to \ker \pi_p(S^n X)$$

pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $X \in \mathcal{X}$. Définissons X_{p+1} par l'objet apparaissant dans le triangle

$$Z_p \to X_p \to X_{p+1} \to S Z_p.$$

Par construction $\pi_p \cdot \rho_p^{\wedge} = 0$, et nous avons la suite exacte

$$F Z_p \leftarrow F X_p \leftarrow F X_{p+1}.$$

Cela nous permet de choisir $\pi_{p+1} : X_{p+1}^{\wedge} \to F$ tel que $\pi_{p+1} \cdot f_p^{\wedge} = \pi_p$. Soit X_∞ la limite homotopique de la suite $(X_p)_{p \in \mathbf{Z}}$, i.e. le troisième objet du triangle

$$\oplus X_p \xrightarrow{\Phi} \oplus X_q \xrightarrow{\Psi} X_\infty \to S \oplus X_p$$

où le morphisme Φ est défini par $X_p \overset{[\mathbf{1}, -f_p]^t}{\to} X_p \oplus X_{p+1}$.

Le foncteur F transforme les sommes (infinies) en produits. Par conséquent nous avons la suite exacte

$$\prod_{p \in \mathbf{N}} F X_p \leftarrow \prod_{q \in \mathbf{N}} F X_q \leftarrow F X_\infty$$

qui nous donne un morphisme $\pi_\infty : X_\infty^{\wedge} \to F$ tel que $\pi_\infty \cdot \Psi_q^{\wedge} = \pi_q$ pour tout entier q. Nous allons montrer que $X_\infty^{\wedge}$ est isomorphe à F ; Pour cela commençons par montrer

$$\mathrm{Hom}(S^n X, X_\infty) \to F S^n X,$$

pour $X \in \mathcal{X}$. C'est à dire que

$$\mathrm{Hom}((S^n X)^{\wedge}, X_\infty^{\wedge}) \overset{(\pi_\infty)_*}{\to} \mathrm{Hom}((S^n X)^{\wedge}, F^{\wedge}).$$

La compacité de l'objet X de $S^{\mathbf{Z}}\mathcal{X}$ nous permet de factoriser un morphisme de $\mathrm{Hom}((S^nX)^\wedge, X_\infty^\wedge)$ par un morphisme de $\mathrm{Hom}((S^nX)^\wedge, X_i^\wedge)$. Supposons qu'un morphisme $\mu : (S^nX)^\wedge \to X_\infty^\wedge \to F$ s'annule ; d'après ce qui précède μ s'annule déjà au stade i, i.e. le morphisme $\mu_i : (S^nX)^\wedge \to X_i^\wedge \to F$ est trivial. Il se factorise donc par un morphisme de $(S^nX)^\wedge$ vers $\ker \pi_i$. Par suite dans le morphisme $\mu_{i+1} : (S^nX)^\wedge \to Xi+1^\wedge \to F$ la première flèche est nulle. Le morphisme $(\pi_\infty)_*$ est donc injectif, et par construction il est surjectif. Donc il est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $X \in \mathcal{X}$. L'ensemble $\mathcal{X}$ étant un système de générateur, c'est un isomorphisme quel que soit X de $\mathcal{T}$.

Remarque 4.6 *Posons $I_\rho X = Z$, i. e. le terme qui apparait dans le triangle $I_\rho X \to X \xrightarrow{f} X_\mathcal{L} \to SI_\rho$. La flèche $I_\rho X \to X$ est universelle parmi les morphismes partant d'un objet de $\mathcal{L}$ vers X. Le foncteur I_ρ est donc l'adjoint à droite à l'inclusion de la sous-catégorie $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$.*

DEFINITION 4.7 *Une sous-catégorie $\mathcal{L}$ est dite* **sommitale** *lorsque elle est localisante et que le foncteur localisation $X \to X_\mathcal{L}$ commute aux sommes directes infinies.*

Remarque 4.8 *Lorsque $\mathcal{L}$ est une sous-catégorie sommitale, la localisation en $\mathcal{L}$ commute aux limites homotopiques.*

Remarque 4.9 *Une sous-catégorie $\mathcal{L}$ est sommitale si et seulement si l'adjoint à droite à l'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ commute aux sommes directes. Cette équivalence découle de la remarque 4.6 sur le triangle $I_\rho X \to X \xrightarrow{f} X_\mathcal{L} \to Z$.*

5 Les sous-catégories sommitales de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$

Dans cette section nous allons rendre plus précis le théorème 3.3 de la section précédente. Cela nous permettra de caractériser les sous-catégories sommitales de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$.

THEOREME 5.1 *L'application f du théorème 3.3 envoie les sous-catégories sommitales vers les systèmes de support de façon bijective.*

COROLLAIRE 5.2 *Les sous-catégories sommitales de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ sont les sous-catégories localisantes engendrées par les sous-catégories épaisses de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$.*

La démonstration du théorème sera une succession de lemmes.

LEMME 5.3 *Soient $\mathcal{L}$ une sous-catégorie localisante et p un idéal premier. Ou bien $k(p)$ est $\mathcal{L}$-local ou bien $k(p) \in \mathcal{L}$.*

Démonstration: Si $k(p)$ n'est pas $\mathcal{L}$-local c'est qu'il existe un morphisme non trivial $X \to k(p)$ où $X \in \mathcal{L}$. Nous pouvons alors écrire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \to & k(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes k(p) & \to & k(p) \otimes k(p) \\ & & \downarrow \\ & & k(p) \end{array}$$

où la composée des deux flèches verticales de droite est l'identité. Nous déduisons du diagramme que $X \to k(p)$ se factorise à travers $X \to X \otimes k(p)$. Par conséquent $X \otimes k(p)$ n'est pas nul. Et comme nous savons qu'il est la somme de suspensions de $k(p)$, l'objet $k(p)$ appartient à $\mathcal{L}$.

LEMME 5.4 *Soit $\mathcal{L}$ une sous-catégorie sommitale de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Ou bien l'enveloppe injective $E(R/p)$ est dans $\mathcal{L}$, ou bien $E(R/p)$ est $\mathcal{L}$-local.*

Démonstration: Comme nous l'avons vu, $E(R/p)$ est la limite directe d'objets obtenus à partir d'extensions de $k(p)$. Le lemme précédent implique que $k(p)_{\mathcal{L}}$ est, soit $k(p)$, soit c'est un objet nul. D'autre part la remarque 3.2 nous certifie la commutation de la localisation par rapport aux limites directes filtrantes. La localisation étant bien un foncteur triangulé, le résultat est maintenant clair : soit $(E(R/p))_{\mathcal{L}}$ est $E(R/p)$, soit c'est un objet nul.

LEMME 5.5 *Soit un idéal premier q appartenant à la fermeture $\overline{p}$ dans* $\mathrm{Spec}(R)$ *d'un autre idéal premier p. Supposons que la sous-catégorie $\mathcal{L}$ est sommitale et que $k(p)$ appartient à $\mathcal{L}$. Alors l'objet $k(q)$ appartient à $\mathcal{L}$.*

Démonstration: Les hypothèses sur les idéaux p et q reviennent à dire que $p \subset q$. Il existe donc un morphisme non trivial $R/p \to R/q$ qui induit un morphisme de $E(R/p) \to E(R/q)$ lui aussi non trivial.. L'objet $k(p)$ appartient à $\mathcal{L}$. Cela entraîne que la localisation de $E(R/p)$ est un objet nul. Il s'ensuit que l'objet $E(R/q)$ ne peut pas être $\mathcal{L}$-local, sinon nous aurions les égalités

$$\mathrm{Hom}(E(R/p), E(R/q)) = \mathrm{Hom}((E(R/p))_{\mathcal{L}}, E(R/q)) = \mathrm{Hom}(0, E(R/q)) = 0.$$

Ce qui serait en contradiction avec l'existence du morphisme non trivial $E(R/p) \to E(R/q)$ construit tout à l'heure. Il résulte de tout ceci que $(E(R/q))_{\mathcal{L}}$ n'est pas égal à $E(R/q)$; c'est donc un objet nul par le lemme 5.4. Par suite $k(q)_{\mathcal{L}}$ est nul, i.e. $k(q)$ appartient à la sous-catégorie localisante $\mathcal{L}$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème annoncé au début de la section.

Démonstration du théorème 5.1 : Le dernier lemme montre que l'application g associe à une sous-catégorie sommitale de $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$ un système de support. Montrons que la réciproque est vraie.

Soit un système de support P. Nous allons dans un premier temps montrer que la sous-catégorie $g(P)$ est engendrée en tant que catégorie triangulée localisante par des complexes parfaits. Puis nous montrerons que cela implique que $g(P)$ est une sous-catégorie sommitale.

Nous notons E_P la sous-catégorie de $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ définie dans le théorème 2.14 comme la sous-catégorie formée des éléments $X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}R)$ dont le support cohomologique $\mathrm{Supp}(X)$ est inclus dans P. Soit un élément X de E_P. S'il existe un idéal p tel que $X \otimes k(p)$ n'est pas nul, alors $X \otimes R_p \otimes k(p) \neq 0$. Cela implique que $X \otimes R_p$ n'est pas nul, et par conséquent p appartient au support de X. La sous-catégorie E_P est donc incluse dans $\mathcal{L}$. Il reste à voir que l'objet $k(p)$ appartient bien à $\mathrm{Tria}(E_p)$ lorsque p est un idéal de P. Notons K le complexe de Koszul construit en 2.11 à partir de p. Le complexe K appartient à E_P. La sous-catégorie $\mathrm{Tria}(E_P)$ étant localisante $K \otimes k(p)$ appartient à $\mathrm{Tria}(E_P)$. Il suffit donc de montrer que l'objet $K \otimes k(p)$ est non nul. C'est clair par l'égalité

$$H^0(K \otimes k(p)) \overset{*}{=} H^0(K) \otimes k(p) = R/p \otimes k(p) = k(p).$$

L'égalité $*$ est la conséquence du fait qu'en appliquant au triangle

$$\tau_{<0}K \otimes k(p) \to K \otimes k(p) \to H^0(K) \otimes k(p) \to S\tau_{<0}K \otimes k(p)$$

le foncteur H^0, les objets situés aux extrêmes deviennent nuls.
Montrons maintenant que la sous-catégorie $g(P)$ est sommitale. Rappelons que I_ρ est le foncteur adjoint à droite de l'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)$. Pour montrer le résultat nous allons utiliser la caractérisation des catégories

sommitales de la remarque 4.9. Montrons que le morphisme de foncteur cohomologique

$$\mathrm{Hom}(\_, I_\rho(\oplus X_i)) \to \mathrm{Hom}(\_, \oplus(I_\rho X_i))$$

est un isomorphisme. Procédons par dévissage. Soit un objet X de E_P.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X, I_\rho(\oplus X_i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)}(X, \oplus(X_i))$$

L'objet X est un complexe parfait donc le terme de droite est égal à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}R)} \oplus (X, X_i) = \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X, I_\rho(X_i)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(X, \oplus I_\rho(X_i)),$$

et le foncteur I_ρ commute aux sommes infinies. Le théorème 5.1 est donc démontré.

Références

[1] M. Bökstedt et A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories*, Compositio math. **86** (1993), 209–234.

[2] A. K. Bousfield, *The localisation of spaces with respect to homology*, Topology **14** (1975), 133–150.

[3] A. K. Bousfield, *The localisation of spaces with respect to homology*, Topology **18** (1979), 257–281.

[4] A. K. Bousfield, *The boolean algebra of a spectra*, Com. math. helv. **54** (1979), 368–377.

[5] E. S. Devinatz, M. J. Hopkins and J. M. Smith, *Nilpotence and stable homotopy theory I*, Ann. math. **128** (1988), 207–241.

[6] M. J. Hopkins, *Global methods in homotopy theory.* Dans *Homotopy theory Proc. Durham Symp. 1985*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[7] M. Kashiwara et P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren **292**, Spinger-Verlag, Berlin Heidelberg 1990.

[8] B. Keller, *A remark on the generalized smashing conjecture*, Manuscripta math. **84** (1994), 193–198.

[9] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. scient. éc. norm. sup. **27** (1994), 63–102.

[10] B. Keller, *On the cyclic homology of exact categories*, preprint.

[11] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, Cambridge 1986.

[12] A. Neeman, *The chromatic tower of* $\mathcal{D}(R)$, Topology **31** (1992), 519–532.

[13] A. Neeman, *The connection between the K-theory localisation theorem of Thomason, Trobaugh and Yao, and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, Ann. scient. éc. norm. sup. **25** (1992), 547–566.

[14] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio math. **65** (1988), 121–154.

[15] R. W. Thomason, *The classification of triangulated subcategories*, Compositio math. **105** (1997), 1–27.

[16] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996).

[17] J. -L. Verdier, *Catégories dérivées, état 0* dans *SGA 4 1/2*, Springer LNM **579**, Springer 1977, 262–311.