Algébre/*Algebra* C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988), 543-546.

Dualité de Grothendieck-Roos et basculement

Bernhard Keller et Dieter Vossieck

Résumé[1] - Nous étudions les relations entre les coeurs de deux t-structures d'une même catégorie triangulée. Des conditions de compatibilité appropriées nous permettent de généraliser à la fois la théorie de dualité développée par Grothendieck et Roos [10] et la théorie du basculement [3] [6] [4] utilisée dans l'étude des algèbres de dimension finie [5].

Grothendieck-Roos-Duality and Tilting

Abstract[1] - We investigate the relations between the hearts of two t-structures on one triangulated category. Under suitable compatibility conditions, we obtain a common generalization of the duality theory developed by Grothendieck and Roos [10] for regular commutative rings and the tilting theory [3] [6] [4] used in the investigation of finite-dimensional algebras [5].

1. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée [2] [7] de foncteur suspension S et $(\mathcal{V}^{<1}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ une t-structure au sens de Beilinson-Bernstein-Deligne [2] [8]. L' inclusion de $\mathcal{V}^{\geq n} := S^{-n}\,\mathcal{V}^{\geq 0}$ (resp. de $\mathcal{V}^{<n} = S^{-n+1}\,\mathcal{V}^{<1}$) dans $\mathcal{T}$ possède un adjoint à gauche $\tau^{\geq n} : \mathcal{T} \to \mathcal{V}^{\geq n}$ (resp. à droite $\tau^{<n} : \mathcal{T} \to \mathcal{V}^{<n}$) et donne naissance à des triangles de la forme

$$\tau^{<n}X \to X \to \tau^{\geq n}X \to S\tau^{<n}X, \quad X \in \mathcal{T}.$$

Nous nous proposons de comparer $(\mathcal{V}^{<1}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ à une deuxième t-structure notée $(\mathcal{U}_{\geq 0}\,,\, \mathcal{U}_{<1})$. Nous désignons par $\tau_{\geq n} : \mathcal{T} \to \mathcal{U}_{\geq n}$ et $\tau_{<n} : \mathcal{T} \to \mathcal{U}_{<n}$ les adjoints à droite et à gauche des inclusions de $\mathcal{U}_{\geq n} := S^n\,\mathcal{U}_{\geq 0}$ et $\mathcal{U}_{<n} = S^{n-1}\,\mathcal{U}_{<1}$ dans $\mathcal{T}$. Ceux-ci donnent naissance à des triangles

$$\tau_{\geq n}X \to X \to \tau_{<n}X \to S\tau_{\geq n}X, \quad X \in \mathcal{T}.$$

Les coeurs [2] des deux t-structures sont les catégories abéliennes $\mathcal{A} = \mathcal{U}_{\geq 0} \cap \mathcal{U}_{<1}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{V}^{\geq 0} \cap \mathcal{V}^{<1}$. Ils sont reliés à $\mathcal{T}$ par les foncteurs "homologie"

$$H_n = \tau_{<1}\tau_{\geq 0}S^{-n} : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$$

et "cohomologie"

$$H^n = \tau^{<1}\tau^{\geq 0}S^{n} : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$$

qui transforment des triangles $X \to Y \to Z \to SX$ de $\mathcal{T}$ en suites exactes longues [2]

$$\ldots \to H_{n+1}Z \to H_nX \to H_nY \to H_nZ \to H_{n-1}X \to \ldots$$

et

$$\ldots \to H^{n-1}Z \to H^nX \to H^nY \to H^nZ \to H^{n+1}X \to \ldots$$

2. Afin d'examiner les liens entre les coeurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, nous posons

$$\mathcal{A}^{\geq n} := \mathcal{A} \cap \mathcal{V}^{\geq n} \text{ et } \mathcal{B}_{\geq n} := \mathcal{B} \cap \mathcal{U}_{\geq n} \ ,$$

obtenant ainsi des filtrations de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par des sous-catégories pleines stables par extensions

$$\ldots \subset \mathcal{A}^{\geq n+1} \subset \mathcal{A}^{\geq n} \subset \ldots \subset \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \supset \ldots \supset \mathcal{B}_{\geq n} \supset \mathcal{B}_{\geq n+1} \supset \ldots$$

Nous disons que l'aile [8] $\mathcal{U}_{\geq 0}$ est *compatible* avec la co-aile $\mathcal{V}^{\geq 0}$ si $\tau^{<n}\mathcal{U}_{\geq 0} \subset \mathcal{U}_{\geq 0}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Ceci implique $\tau^{\geq n}\mathcal{U}_{\geq 0} \subset \mathcal{U}_{\geq 0}$, $H^n\mathcal{U}_{\geq 0} \subset \mathcal{B}_{\geq n}$ et $H_m\, H^n |\, \mathcal{A} = 0$ pour tous m, n tels que $m < n$.

PROPOSITION - *Si $\mathcal{U}_{\geq 0}$ est compatible avec $\mathcal{V}^{\geq 0}$, la filtration $(\mathcal{B}_{\geq n})$ de $\mathcal{B}$ a la propriété (*) qui suit: Pour tout morphisme $g : N \to N'$ de $\mathcal{B}$ tel que $N \in \mathcal{B}_{\geq n}$ et $N' \in \mathcal{B}_{\geq n+1}$, on a $\operatorname{Ker} g \in \mathcal{B}_{\geq n}$ et $\operatorname{Coker} g \in \mathcal{B}_{\geq n+1}$.*

En effet, considérons l'octaèdre suivant où $K = \operatorname{Ker} g$, $I = \operatorname{Im} g$, $C = \operatorname{Coker} g$.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
SK \arrow[ur] \arrow[d] & & C \arrow[ll] \arrow[ddl] \\
N \arrow[rr] \arrow[dr] & & N' \arrow[u] \arrow[uul] \\
 & I \arrow[ur] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}$$

Le triangle $N \to N' \to Y \to SN$ montre que $Y \in \mathcal{U}_{\geq n+1}$. Le triangle $SK \to Y \to C \to S^2K$ fournit des suites exactes $0 = H^{-2}C \to K \to H^{-1}Y \to H^{-1}C = 0$ et $0 = H^1K \to H^0Y \to C \to H^2K = 0$. La condition de compatibilité implique que $K \xrightarrow{\sim} H^{-1}Y \in \mathcal{B}_{\geq n}$ et que $C \xrightarrow{\sim} H^0Y \in \mathcal{B}_{\geq n+1}$.

Nous dirons de même que la co-aile $\mathcal{V}^{\geq 0}$ est *compatible* avec l'aile $\mathcal{U}_{\geq 0}$ si $\tau_{<n}\mathcal{V}^{\geq 0} \subset \mathcal{V}^{\geq 0}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. Cette nouvelle définition donne lieu à une proposition duale de la précédente.

3. Nous disons que $\mathcal{B}$ *engendre* $\mathcal{T}$, si $\mathcal{T}$ coïncide avec la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathcal{T}$ qui soit strictement pleine et contienne $\mathcal{B}$. Tout objet $X \in \mathcal{T}$ est alors obtenu par extensions successives à partir d'un nombre fini de groupes de cohomologie translatés $S^{-n}H^nX$. En particulier, la t-structure $(\mathcal{V}^{<1}, \mathcal{V}^{\geq 0})$ n'est pas dégénérée [2]. De plus, $\mathcal{U}_{\geq 0}$ est alors compatible avec $\mathcal{V}^{\geq 0}$ si et seulement si $\mathcal{U}_{\geq 0} = \{X \in \mathcal{T} : H^nX \in \mathcal{B}_{\geq n} \text{ pour tout } n \in \mathbf{Z}\}$.

Proposition - *Supposons $\mathcal{T}$ engendrée d'une part par $\mathcal{A}$, d'autre part par $\mathcal{B}$. Pour que $\mathcal{T}_{\geq 0}$ soit compatible avec $\mathcal{V}^{\geq 0}$, il faut alors et il suffit que $H_mH^n|\,\mathcal{A} = 0$ si $m < n$, et que la filtration $(\mathcal{B}_n)$ satisfasse à la condition (*) ce dessus.*

En effet, il reste à voir que les conditions formulées sont suffisantes. Comme $(\mathcal{U}_{\geq 0}, \mathcal{U}_{<1})$ n'est pas dégénérée, la première de ces conditions équivaut à $H^n\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\geq n}$, $\forall n$. Nous en déduisions que $H^nX \in \mathcal{B}_{\geq n}$ pour tout $X \in \mathcal{U}_{\geq 0}$: si $X \neq 0$, nous procédons pour cela par récurrence sur le plus grand r tel que $H_rX \neq 0$ ($\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{T}$!). Le triangle

$S^r H_r X \to X \to \tau_{<r} X \to S^{r+1} H_r X$ induit une suite exacte

$$H^{n-1}\tau_{<r}\, X \xrightarrow{f} H^{n+r} H_r\, X \to H^n X \to H^n \tau_{<r} X \xrightarrow{g} H^{n+r+1} H_r X \quad ,$$

où $H^{n+r} H_r\, X \in \mathcal{B}_{\geq n+r}$ d'après ce qui précède et $H^{n-1}\tau_{<r}\, X \in \mathcal{B}_{\geq n-1}$ par hypothèse de récurrence. La condition (*) implique $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{B}_{\geq n}$. De même, $\operatorname{Ker} g \in \mathcal{B}_{\geq n}$, d'où $H^n\, X \in \mathcal{B}^{\geq n}$, puisque $\mathcal{B}_{\geq n}$ est stable par extensions.

Comme $\mathcal{T}$ est également engendrée par $\mathcal{B}$, nous obtenons finalement $\tau^{<n}\, \mathcal{U}_{\geq 0} \subset \mathcal{U}_{\geq 0}$ pour tout n.

4. **Example.** (cf. [10]) Soit Λ un anneau *régulier*, c'est-à -dire commutatif, noethérien, de dimension homologique finie. Nous rappelons que [9]:

a) Pour tout Λ-module M de type fini, la "codimension"

$$c\,(M) = \inf \{dim\Lambda_p : p \in \mathit{Spec}\ (\Lambda)\ , M_p \neq 0\}$$

coïncide avec le "grade"

$$g\,(M) = \inf\{i : \mathit{Ext}^i_\Lambda\,(M, \Lambda) \neq 0\}.$$

b) $c\,(\mathit{Ext}^i_\Lambda\,(M, \Lambda)) \geq n$ pour tous les Λ-modules de type fini M, N et tout n.

Le foncteur dérivé $D = R\operatorname{Hom}_\Lambda(?, \Lambda)$ induit une dualité sur la catégorie dérivée "bornée" $\mathcal{T} := \mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\Lambda)$ associée à la catégorie $\operatorname{mod}\Lambda$ des Λ-modules de type fini. Nous considérons la co-aile naturelle $\mathcal{V}^{\geq 0} = \{X \in \mathcal{T} : H^n\, X = 0,\ \forall n < 0\}$ définie au moyen de la cohomologie usuelle, et l'aile $\mathcal{U}_{\geq 0} = \{Y \in \mathcal{T} : \exists X \in \mathcal{V}^{\geq 0},\ Y \xrightarrow{\sim} DX\}$. Nous "identifions" $\operatorname{mod}\Lambda$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{V}^{\geq 0} \cap \mathcal{V}^{<1}$, $(\operatorname{mod}\Lambda)^{\mathrm{op}}$ avec $\mathcal{A} = \mathcal{U}_{\geq 0} \cap \mathcal{U}_{<1}$, et les foncteurs $H_n : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ et $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ avec $\operatorname{Ext}^n_\Lambda\,(?, \Lambda)$.

Dans ce cas, $\mathcal{B}_{\geq n}$ est une sous-catégorie de Serre de $\mathcal{B}$, formée des Λ-modules de codimension $\geq n$ et vérifiant (*). Il résulte de b) que $H_m\, H^n |\, \mathcal{A} = 0$ si $m < n$, donc que $\mathcal{U}_{\geq 0}$ *est compatible avec* $\mathcal{V}^{\geq 0}$, *et* $\mathcal{V}^{\geq 0}$ *avec* $\mathcal{U}_{\geq 0}$.

5. **Exemple.** (cf. [3][6][4][5]) Soient k un corps commutatif, Λ une k-algèbre de dimension finie, $\mathcal{B}_{\geq n} = \mathcal{B} = \operatorname{mod}\Lambda$ pour $n < 0$, $\mathcal{B}_{\geq n} = 0$ pour $n > 0$ et $\mathcal{B}_{\geq 0}$ une sous-catégorie de *torsion* (c'est-à -dire pleine et stable par extensions et quotients) de $\mathcal{B}$. Alors $\mathcal{U}_{\geq 0} = \{X \in \mathcal{D}^b(\mathcal{B}) : H^n X \in \mathcal{B}_{\geq n},\ \forall n \in \mathbf{Z}\}$ est une aile de $\mathcal{D}^b(\mathcal{B})$ compatible avec la co-aile naturelle $\mathcal{V}^{\geq 0}$ (§4). De même $\mathcal{U}_{<1}$ est compatible avec $\mathcal{V}^{<1}$, $\mathcal{V}^{\geq 0}$ avec $\mathcal{U}_{\geq 0}$ et $\mathcal{V}^{<1}$ avec $\mathcal{U}_{<1}$.

Supposons de plus que $\mathcal{B}_{\geq 0}$ est engendré par un Λ-module basculeur (tilting !) T_Λ. Si $\Gamma = \operatorname{End}(T_\Lambda)$, les dérivés $R\operatorname{Hom}_\Lambda(T, ?)$ et $L\,(? \otimes_\Gamma T) : \mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\Lambda)$ sont des S-équivalences [8] quasi-inverses [1] [5]. Elles nous permettent d'identifier $\mathcal{U}_{\geq 0}$ avec l'aile naturelle de $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\Gamma)$, $\mathcal{A}$ avec $\operatorname{mod}\Gamma$, $H_n|\,\mathcal{A}$ avec $\operatorname{Tor}_n^\Gamma(?, T)$ et $H^n|\,\mathcal{B}$ avec $\operatorname{Ext}_\Lambda^n(T, ?)$.

6. **Exemple.** (cf. [2] [8]) Soient k un corps commutatif, Q un carquois fini sans cycle orienté , I un idéal admissible de la catégorie des chemins kQ, Λ le quotient kQ/I et $\operatorname{mod}\Lambda$ la catégorie des Λ-"modules" $M : \Lambda^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod} k$. Nous considérons la co-aile naturelle $\mathcal{V}^{\geq 0}$ de $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(\operatorname{mod}\Lambda)$.

Afin de construire une aile (artificielle) de $\mathcal{T}$, nous partons d'une fonction $p : \{$ points de $\Lambda\} \to \mathbf{Z}$ telle que $p(x) \geq p(y)$ si $\operatorname{Hom}(x, y) \neq 0$. Nous notons $\Lambda_{\geq n}$ (resp. $\Lambda_{<n}$, resp. Λ_n) la sous-catégorie pleine de Λ formée des $x \in \Lambda$ tels que $p(x) \geq n$ (resp. $p(x) < n$, resp. $p(x) = n$) et posons

$$\mathcal{U}' = \{X \in \mathcal{T} : \operatorname{supp} H^n X \subset \Lambda_{\geq n},\ \forall n\}$$

$$\mathcal{U}'' = \{X \in \mathcal{T} : \operatorname{supp} H^n X \subset \Lambda_{<n},\ \forall n\}$$

Il est clair que $\mathcal{U}'$ est stable sous S et $\mathcal{U}''$ sous S^{-1}. De plus, $\operatorname{Hom}(X, Y) = 0$ si $X \in \mathcal{U}'$ et $Y \in \mathcal{U}''$: en effet, $X \in \mathcal{U}'$ équivaut à l'existence d'un quasi-isomorphisme $P \to X$, où les P^n sont projectifs tels que $\operatorname{supp} P^n \subset \Lambda_{\geq n}$, $\forall n$. Et $Y \in \mathcal{U}''$ signifie qu'il y a un quasi-isomorphisme $Y \to J$, où les J^n sont injectifs et tels que $\operatorname{supp} J^n \subset \Lambda_{<n}$, $\forall n$.

Pour tout $X \in \mathcal{T}$ nous notons X' le sous-complexe tel que $X'^n = (X^n|\,\Lambda_{\geq n+1})_0 + (Z^n X|\,\Lambda_{\geq n})_0$, l'indice 0 désignant ici le prolongement par 0. Nous obtenons un triangle $X' \to X \to X'' = X/X' \to SX'$ de $\mathcal{T}$ où $X \in \mathcal{U}'$ et $X'' \in \mathcal{U}''$, comme le montrent les restrictions $X'|\,\Lambda_n$ et $X''|\,\Lambda_n$. Nous constatons finalement:

- $\mathcal{U}_{\geq 0} = \mathcal{U}'$ est une aile de $\mathcal{T}$, et nous retrouvons la situation décrite au §1 avec $\mathcal{U}_{<0} = \mathcal{U}''$.

- $\tau_{\geq 0}$ et $\tau_{<0}$ peuvent être choisis de telle manière que $\tau_{\geq 0}X = X'$ et $\tau_{<0}X = X''$ avec les notations ci-dessus.

- Le foncteur $X \mapsto (H^n\, X)_{n \in \mathrm{Z}}$ induit une équivalence entre le coeur

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{T} : \operatorname{supp} X \subset \Lambda_n,\ \forall n\}$$

  et la somme directe des $\operatorname{mod} \Lambda_n$; en particulier $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{T}$.

- Si $X \in \mathcal{T}$, le complexe $H_0\, X$ de $\operatorname{mod} \Lambda$ est tel que $H^n\, H_0\, X \xrightarrow{\sim} (H^n\, X |\, \Lambda_n)_0$.

Par construction, $\mathcal{U}_{\geq 0}$ est compatible avec $\mathcal{V}^{\geq 0}$ et $\mathcal{U}_{<1}$ avec $\mathcal{V}^{<1}$. La description de $\tau_{\geq 0}$ et $\tau_{<1}$ montre que $\mathcal{V}^{\geq 0}$ est aussi compatible ave $\mathcal{U}_{\geq 0}$ et $\mathcal{V}^{<1}$ avec $\mathcal{U}_{<1}$. Pour tout $N \in \operatorname{mod} \Lambda$, on a en particulier $H^n\, H_n\, N \xrightarrow{\sim} (N |\, \Lambda_n)_0$ pour tout n et $H^m\, H_n\, N = 0$ si $m \neq n$.

7. Revenons à la situation de §1. Dans ce qui suit, nous supposons que $\mathcal{U}_{\geq 0}$ est compatible avec $\mathcal{V}^{\geq 0}$ et $\mathcal{V}^{\geq 0}$ avec $\mathcal{U}_{\geq 0}$.

Tout $N \in \mathcal{B}$ donne naissance à un triangle $\tau_{\geq n}N \to N \to \tau_{<n}N \to S\tau_{\geq n}N$ de $\mathcal{T}$. Comme $\tau_{\geq n}N \in \mathcal{V}^{\geq 0}$ et $\tau_{<n}N \in \mathcal{V}^{\geq 0}$, la suite e cohomologie associée se réduit à

$$0 \to H^0\tau_{\geq n}N \to N \to H^0\tau_{<n}N \to H^1\tau_{\geq n}N \to 0$$

et aux isomorphismes $H^i\tau_{<n}N \xrightarrow{\sim} H^{i+1}\tau_{\geq n}N$ $(i > 0)$. Comme $\tau_{\geq n}N \in \mathcal{U}_{\geq n}$, il s'ensuit que $H^0\tau_{\geq n}N \in \mathcal{B}_{\geq n}$ et $H^1\tau_{\geq n}N \in \mathcal{B}_{\geq n+1}$.

8. Proposition -

a) La sous-catégorie $\mathcal{B}_{\geq n}$ de $\mathcal{B}$ contient avec tout N tous les quotients de N.

b) Pour tout $N \in \mathcal{B}$, $N_{\geq n} := H^0\tau_{\geq n}N$ est le plus grand sous-objet de N appartenant à $\mathcal{B}_{\geq n}$.

En effet, tout morphisme $N' \to N$ de $\mathcal{B}$ tel que $N' \in \mathcal{B}_{\geq n}$ se factorise à travers $N_{\geq n} \to N$, ce qui prouve b) et a).

9. Nous disons qu'un morphisme $t : N \to N'$ de $\mathcal{B}$ est un *n-quasi-isomorphisme* si $\operatorname{Ker} t \in \mathcal{B}_{\geq n}$ et $\operatorname{Coker} t \in \mathcal{B}_{\geq n+1}$. Un objet $B \in \mathcal{B}$ est dit n-fermé si l'application $\operatorname{Hom}(t, B) : \operatorname{Hom}(N', B) \to \operatorname{Hom}(N, B)$ par tout n-quasi-isomorphisme $t : N \to N'$ est bijective.

Proposition - *L'inclusion de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ formeée des objets n-fermés a pour adjoint à gauche le foncteur $N \mapsto H^0\tau_{<n}N$ ($= n$-fermeture de N).*

En effet, le morphisme canonique $N \to H^0\tau_{<n}N$ est un n-quasi-isomorphisme (§7). Il suffit donc de montrer que $H^0\tau_{<n}N$ est n-fermé. Pour cela, soit $t : Q \to Q'$ un n-quasi-isomorphisme. Comme $\tau_{<n}N \in \mathcal{V}^{\geq 0}$, $H^0\tau_{<n}N$ coïncide avec $\tau^{<1}\tau_{<n}N$, et $\operatorname{Hom}(t, H^0\tau_{<n}N)$ s'identifie à $\operatorname{Hom}(t, \tau_{<n}N)$. Le triangle inférieur du diagramme

$$\begin{tikzcd}
SK \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\Delta"] & & C \arrow[ll] \\
{} \arrow[r, phantom, "="] & Y \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
Q \arrow[rr, "t"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Delta"] & & Q' \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

où $K = \operatorname{Ker} t$, $C = \operatorname{Coker} t$ et $Y \in \mathcal{U}_{\geq n+1}$ (cf. §2), fournit une suite exacte

$$0 = \operatorname{Hom}(Y, \tau_{<n}N) \to \operatorname{Hom}(Q', \tau_{<n}N) \to$$

$$\operatorname{Hom}(Q, \tau_{<n}N) \to \operatorname{Hom}(S^{-1}Y, \tau_{<n}N) = 0 \ \ ,$$

qui prouve notre assertion.

On définit de façon duale les "n-coquasi-isomorphismes" et les objets "n-cofermés" de $\mathcal{A}$.

10. Considérons les sous-catégories strictement pleines suivantes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\underline{\mathcal{A}}^n = \{M \in \mathcal{A}^{\geq n} : \text{ M est } (n+1)\text{-cofermé}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}}_n = \{N \in \mathcal{B}_{\geq n} : \text{ N est } (n+1)\text{-fermé}\}$$

PROPOSITION - *Les foncteurs H_n et H^n induisent des couples de foncteurs adjoints*

$$H_n : \mathcal{B}_{\geq n} \to \mathcal{A}^{\geq n} \ , \quad H^n : \mathcal{A}^{\geq n} \to \mathcal{B}_{\geq n}$$

et d'équivalences quasi-inverses

$$H_n : \overline{\mathcal{B}}_n \to \underline{\mathcal{A}}^n \ , \quad H^n : \underline{\mathcal{A}}^n \to \overline{\mathcal{B}}_n.$$

En effet, nous savons que $H_n \, \mathcal{B}_{\geq n} \subset \mathcal{A}^{\geq n}$ et $H^n \, \mathcal{A}^{\geq n} \subset \mathcal{B}_{\geq n}$. Pour tout $N \in \mathcal{B}_{\geq n}$, on a $H_n \, N = \tau_{<1} S^{-n} N$; de même, $H^n \, M = \tau^{<1} S^n M$ pour tout $M \in \mathcal{A}^{\geq n}$. Nous obtenons ainsi un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}\,(H_n \, N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(S^{-n} N, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(N, S^r M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(N, H^n \, M),$$

ce qui démontre notre assertion.

Si $n \in \mathcal{B}_{\geq n}$, nous avons aussi $S^n H_n \, N = \tau_{<n+1} N$, et le morphisme d'adjonction $N \to H^n \, H_n \, N$ coïncide avec le morphisme canonique $N \to H^0 \tau_{<n+1} N$ de but la $(n+1)$-fermeture de N. Il s'ensuit que $N \to H^n \, H_n \, N$ est inversible si et seulement si N est $(n+1)$-fermé. Par dualité, on voit que $H_n \, H^n \, M \to M$ est inversible si et seulement si M est $(n+1)$-cofermé.

([1]) Wir danken P. Gabriel für Vorlesungen zu diesem Thema.

Références bibliographiques

[1] A. A. Beilinson, *Faisceaux cohérents sur P^n et problèmes d'algèbre linéaire*, Anal. fonct. et applications, vol. 12, no. 3, p. 214-216

[2] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.

[3] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Representation theory II, Proc. Ottawa 1979, Lecture Notes in Math., no. 832, Springer, 1980, p. 399-443.

[4] K. Bongartz, *Tilted algebras*, Representations of Algebras, Proceedings Puebla 1980,Lecture Notes in Math., 903, Springer,1982, p. 26-38.

[5] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. 62, 1987 , p. 339-389.

[6] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 274(2), 1982, p. 399-443.

[7] B. Keller, D. Vossieck, *Sous les catégories dérivées*, C. R. Acad. Sci. Paris 305, 1987, p. 225-228.

[8] B. Keller, D. Vossieck, *Aisles in derived categories*, Bulletin de la Soc. Belgique de Math., à paraître.

[9] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.

[10] J.-E. Roos, Bidualité et structure des foncteurs dérivées de $\varinjlim$ dans la catégorie des modules sur un anneau régulier, C. R. Acad. Sci. Paris, 280, série I, 1962, p. 1556-1558.

Bernhard Keller : Mathematik, G 28.2, E.T.H.-Zentrum, 8092 Zürich, Suisse;
Dieter Vossieck : Mathematisches Institut, Universität Zürich, Suisse.