1 803 601 800 : de l'art des nombres à l'analyse, une autre voie ?

Catherine Goldstein [1]

Si à la fin du XIX^{e} siècle, dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* lancée par Felix Klein, l'analyse est une des grandes divisions des mathématiques, à côté de la géométrie ou de la mécanique – une division qui traite des fonctions et des équations différentielles en particulier –, il est maintenant bien connu qu'elle apparaît d'abord comme une approche particulière aux questions mathématiques [2], comme en témoigne encore cette description extraite de l'article sur l'« Analyse » de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert :

> « L'Analyse, s. f. en Logique, c'est ce qu'on appelle dans les écoles la méthode qu'on suit pour découvrir la vérité ; on la nomme autrement la méthode de résolution. Par cette méthode, on passe du plus composé au plus simple ; au lieu que dans la synthese, on va du plus simple au plus composé. Comme cette définition n'est pas

---

1. CNRS – Institut de mathématiques de Jussieu (UMR 7586 du CNRS). Courriel : `cgolds@math.jussieu.fr`.

2. Cette question est déjà soulevée par Paul Tannery dans (Tannery, 1904). Christian Gilain a étudié ces différentes acceptions pour la période charnière définie par l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert dans (Gilain, 2010).

des plus exactes, on nous permettra d'en substituer une autre. L'analyse consiste à remonter à l'origine de nos idées, à en développer la génération & à en faire différentes compositions ou décompositions pour les comparer par tous les côtés qui peuvent en montrer les rapports. L'analyse ainsi définie, il est aisé de voir qu'elle est le vrai secret des découvertes. Elle a cet avantage sur la synthese, qu'elle n'offre jamais que peu d'idees à la fois, & toujours dans la gradation la plus simple. Elle est ennemie des principes vagues, & de tout ce qui peut être contraire à l'exactitude & à la précision. Ce n'est point avec le secours des propositions générales qu'elle cherche la vérité : mais toujours par une espece de calcul, c'est-à-dire, en composant & décomposant les notions pour les comparer, de la maniere la plus favorable, aux découvertes qu'on a en vûe. »

À l'époque moderne, cette approche a en mathématiques partie liée avec le développement de l'algèbre symbolique. L'article ANALYSE de l'*Encyclopédie*, destinée par d'Alembert « au commun des lecteurs », précise d'ailleurs :

« ANALYSE (*Ordre encyclop. Entend. Raison. Philosoph. ou Science, Science de la Nature, Mathématiques pures, Arithmétique littérale, ou Algèbre, Analyse*.) est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations. Voyez Problème & Equation.

L'Analyse, pour résoudre les problèmes, employe le secours de l'Algebre, ou calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots, Analyse, Algebre, sont souvent regardés comme synonymes. »

Les configurations qui, des programmes analytiques de François Viète et René Descartes jusqu'aux travaux de Joseph-Louis Lagrange et de Condorcet, ont fait du symbolisme algébrique et de l'art des équations la méthode privilégiée « pour découvrir la vérité », ont déjà été finement étudiées [3]. Cette « voie royale » de l'analyse, pour reprendre l'expression de Michael Mahoney, n'a pourtant pas été suivie par tous avec ferveur. Au milieu du XVII^{e} siècle, dans le cercle de Marin Mersenne, plusieurs mathématiciens contestent la capacité de l'algèbre symbolique à « résoudre tous les problèmes » (*nullum non problema solvere*), comme l'avait espéré Viète en 1591 dans l'*In artem analyticen Isagoge*. Bernard Frenicle de Bessy écrit ainsi à Pierre Fermat le 2 août 1641 :

« Je sais que l'Algèbre de ce pays-ci n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer : c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'analyse

3. Je renvoie en particulier à (Mahoney, 1973), (Cifoletti, 1990), (Brian, 1994), (Gardies, 2001). Dans (Cifoletti, 2006), Giovanna Cifoletti explicite en particulier les relations entre les transformations de la logique et le passage des problèmes aux équations.

> particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages. » (Fermat, 1894, p. 227)

Contrairement aux problèmes géométriques, les problèmes sur les nombres entiers résistent en effet à l'analyse algébrique. Les symboles représentent des grandeurs quelconques : si ceci est mis en avant par les défenseurs de l'algèbre comme preuve de l'universalité de leur outil favori, la nature des solutions, du même coup, n'y est plus contrôlée. Certaines questions arithmétiques « ne tomb[e]nt point sous la science des rapports qui les considère universellement, aussi bien entre les lignes commensurables et incommensurables »[4]. Les problèmes *universels*, décrits par des équations, ne sont donc pas *tous* les problèmes. C'est ce dont les arithméticiens, comme Frenicle, cherchent à convaincre les algébristes, comme de Beaune, en leur soumettant des défis numériques, soigneusement calibrés pour que leur analyse échappe à l'algèbre ordinaire. À partir de l'examen d'un de ces défis, je voudrais discuter ici la place qui peut être ménagée à ces recherches dans une histoire de l'analyse.

1. Des triangles rectangles : 243 et quelques autres

Début 1643, Fermat écrit à Mersenne :

> « Je dois maintenant répondre aux deux questions numériques de M. de Saint Martin. La première est de trouver trois triangles rectangles desquels les aires fassent les trois côtés d'un triangle rectangle. Les trois triangles qu'on demande sont ceux-ci :
>
> 2405, 2397, 196   2213, 2205, 188   2305, 2303, 96
>
> S'il en veut d'autres qui satisfassent à la question, je lui en puis fournir infinis [...].
>
> La seconde question est celle-ci : un nombre étant donné, déterminer combien de fois il est la différence des côtés d'un triangle qui ait un quarré pour différence de son petit côté au deux autres côtés. le nombre qu'il donne est 1 803 601 800. Je réponds qu'en l'exemple proposé, il y a 243 triangles qui satisfont à la question, et qu'il n'y en peut pas avoir davantage. » (Fermat, 1894, p. 249-250)

4. Florimond de Beaune à Marin Mersenne, lettre du 26 mars 1639 (Mersenne, 1963, p. 360).

Le cadre de cet échange est bien clair [5]. Depuis la fin des années 1630, Fermat a trouvé chez Frenicle un interlocuteur avisé et stimulant sur les questions arithmétiques. Aux échanges quelque peu acerbes des débuts, a succédé une seconde phase de leur interaction : ils ne posent plus seulement des problèmes tests, ils se communiquent aussi règles, méthodes et probablement de la part de Fermat quelques démonstrations. C'est à cette période qu'apparaissent dans leur correspondance la formulation de ce que nous appelons maintenant le petit théorème de Fermat, des considérations sur les sommes de carrés (ou d'un carré et d'un double carré) et sur les carrés magiques, ainsi que de nombreux problèmes d'origine diophantienne sur les triangles rectangles en nombres.

Cette harmonie semble quelque peu troublée vers 1643 avec l'arrivée d'un nouveau venu, Pierre Brulard de Saint Martin, conseiller au Grand Conseil. Celui-ci collabore avec Frenicle autour de la rédaction de travaux sur les nombres [6] : nous en avons des traces claires sous la forme de manuscrits déposés aux Archives de l'Académie des sciences, principalement dus à Frenicle, mais où l'écriture de Saint Martin apparaît de temps en temps. Ces manuscrits n'ont été que partiellement publiés après la mort de Frenicle, par l'Académie des sciences [7]. Ils ne sont pas datés, mais, vers 1646-1647, Mersenne dresse une liste de textes de Frenicle dont les titres correspondent à ceux des manuscrits. Cette date est d'ailleurs cohérente avec celle suggérée par les correspondances, où des problèmes analogues à ceux des manuscrits circulent dans les années 1640. C'est de cette période, bien antérieure à la parution des traités posthumes de Frenicle, antérieure également aux recherches mieux connues de Pascal ou de Leibniz, dont il sera question ici.

Comme à chaque fois qu'un interlocuteur nouveau intervient, Fermat s'empresse de lui proposer des problèmes [8]. L'enjeu est ici particulièrement

5. Je renvoie à (Goldstein, 1995) et (Goldstein, 2009) pour les relations entre Fermat et Frenicle. Le dernier article étudie en particulier ces relations à travers le fonctionnement global du réseau de correspondants de Mersenne.

6. La mort d'André Jumeau de Sainte Croix, lui aussi amateur d'arithmétique, n'y est peut-être pas étrangère ; Mersenne se plaint en effet qu'il n'ait laissé aucun écrit sur ces recherches.

7. Voir (Coumet, 1968), (Goldstein, 1995, p. 37-39) et (Goldstein, 2001) pour des informations sur ces manuscrits.

8. Ce cycle est expliqué dans (Goldstein, 2009). En l'occurrence, certains problèmes seront interprétés par Frenicle et Saint Martin comme des propositions « impossibles »

important, car Fermat souhaite avoir accès aux manuscrits en préparation. Début janvier 1643, il demandait à Mersenne de « presser M. de Carcavi pour le Pappus manuscrit, et pour les propositions que M. de Saint Martin a de M. Frenicle » (Fermat, 1894, p. 247). Il ajoute encore à ses réponses à Saint Martin :

> « Je ne vous envoie ces deux solutions que pour vous faire voir que les mystères numériques de M. Frenicle me doivent être communiqués aussi tôt qu’à tout autre, et que M. de Saint Martin n’y doit pas faire difficulté. » (Fermat, 1894, p. 250)

Entre les détracteurs de l’algèbre et les détracteurs de l’arithmétique, Fermat occupe une position maîtresse : il comprend les différents enjeux du champ ainsi dessiné, sait répondre à la plupart des questions posées, de quelque camp qu’elles viennent, et, très vite, peut évaluer les positions particulières de ses différents interlocuteurs, testant les uns et les autres selon leurs faiblesses respectives [9]. Les défis de Saint Martin ne font pas exception : Fermat, on l’a vu, fournit immédiatement des réponses satisfaisantes. Elles méritent cependant qu’on s’y attarde un peu.

2. Le premier problème

Un résumé de la solution de Fermat se trouve dans ses *Observations sur Diophante* (Fermat, 1891, p. 320-321). Cette observation particulière s’intéresse plus généralement à la construction de triangles rectangles en nombres dont les aires soient dans des rapports donnés. Par exemple, si R, S, T sont trois nombres, tels que $R+T=4S$, Fermat propose d’utiliser comme nombres générateurs des trois triangles rectangles [10] les trois couples de nombres $(R+4S, 2R-4S)$, $(6S, R-2S)$, $(4S+T, 4S-2T)$. Il est en effet facile de vérifier que les surfaces des triangles alors obtenus sont proportionnelles à R, S et T.

typiques de Fermat, et provoqueront une brouille jusqu’à ce que Fermat en exhibe des solutions effectives numériques.

9. Ces points sont discutés dans (Goldstein, 2009). Voir aussi (Goldstein, 2001) pour un exemple mettant en scène Frenicle, Descartes et Fermat autour d’un même problème.

10. Si deux nombres p et q sont donnés, on dit qu’ils sont les nombres générateurs du triangle rectangle dont les côtés sont définis à partir de p et q par les expressions : $2pq$, p^2-q^2, p^2+q^2. Ici, comme au XVII^e siècle, je ne distinguerai pas nombre, mesure, côté, et je parlerai sans vergogne de « nombre coté » d’un triangle par exemple.

Une application au problème de Saint Martin est aussi indiquée dans cette observation : Fermat suggère simplement de choisir pour les nombres donnés R, S, T les trois côtés d'un triangle rectangle. Il faut simplement imposer la condition que la somme d'un côté et de l'hypoténuse est égale à 4 fois le troisième côté : Fermat propose comme exemple le triangle rectangle de côtés 17, 15 et 8. Si on substitue à R, S et T les valeurs respectives 17, 8 et 15, on obtient comme nombres générateurs 49 et 2, 48 et 1, 47 et 2, et finalement les trois triangles de la solution de Fermat :

2405, 2397, 196 2213, 2205, 188 2305, 2303, 96.

On comprend aussi sa proposition d'en fournir d'autres, en variant le triangle de départ. L'algèbre semble montrer ici toute sa puissance. Les formules des nombres générateurs étant polynomiales, elles fabriquent facilement des valeurs entières à partir d'entiers R, S, T.

Pourtant, un détour par le manuscrit *Discours sur les triangles rectangles en nombres* de Frenicle ne manque pas d'intérêt. Dans le chapitre 13, consacré à « L'aire des triangles » [11], se trouve le problème posé par Saint Martin. La solution est rédigée à deux mains et fournit plusieurs solutions numériques.

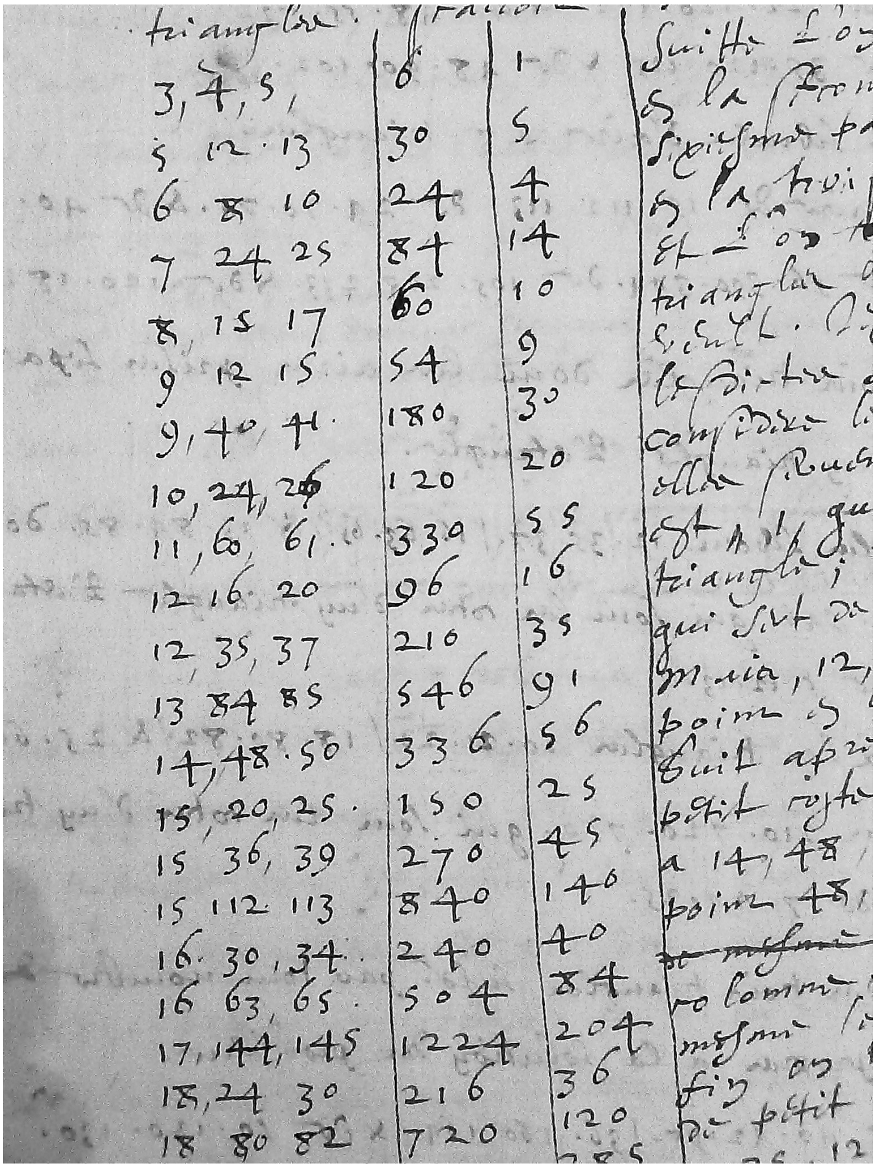
> « Les trois triangles sont 12. 35. 37 / 16. 63. 65 / 13. 84. 85 dont les aires sont 210. 504. 546 qui sont les cotes d'un triangle rectangle multiplie par 42 de 5. 12. 13. ou bien on aura les triangles 20. 21. 29 / 18. 80. 82 / 25. 60. 65 dont les aires sont 210. 720. 750 qui sont les cotes multiplies par 30 de 7. 29. 25. »

Leur détection repose sur des tables d'aires de triangles rectangles en nombres incluses dans le texte. Saint Martin explique comment repérer dans la colonne des aires les valeurs qui interviennent dans les autres colonnes comme côtés. La démarche est caractéristique de celles décrites, par exemple, dans la *Méthode des Exclusions* de Frenicle [12] ou ailleurs dans le *Discours des triangles rectangles*.

Le mode même de construction ne permet bien sûr pas d'annoncer des solutions en nombre infini – remarquons toutefois que Fermat ne prouve pas du tout cette partie de sa réponse, se contentant de tabler sur l'infinité des solutions fournies par des formules où interviennent des quantités

11. Ce chapitre contient en particulier la démonstration célèbre que l'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré ou le double d'un carré, et donc une preuve du Grand Théorème de Fermat pour l'exposant 4, voir (Goldstein, 1995).

12. Voir (Frenicle de Bessy, 1729). La méthode des exclusions, et plus généralement, la démarche mise en œuvre par Frenicle autour des tables est détaillée dans (Goldstein, 2008).



triangles		
3,4,5,	6	1
5 12 13	30	5
6 8 10	24	4
7 24 25	84	14
8, 15 17	60	10
9 12 15	54	9
9, 40, 41	180	30
10, 24, 26	120	20
11, 60, 61	330	55
12 16 20	96	16
12 35, 37	210	35
13 84 85	546	91
14, 48 50	336	56
15, 20, 25	150	25
15 36, 39	270	45
15 112 113	840	140
16 30, 34	240	40
16 63, 65	504	84
17, 144, 145	1224	204
18, 24 30	216	36
18 80 82	720	120

FIGURE *1 – Table des aires de triangles rectangles en nombres dans le* Discours des triangles. *Archives de l’Académie des Sciences, Fonds Roberval, carton 4. (Reproduit avec l’aimable autorisation de l’Académie des Sciences de l’Institut de France.)*

théoriquement à peu près arbitraires. Mais les solutions de Frenicle et Saint Martin sont de bien plus petite taille que celle offerte par Fermat, à partir du plus petit triangle lui offrant les conditions requises. L'universalité de l'algèbre alors pratiquée ne donne donc pas nécessairement, ou facilement, accès à toutes les solutions.

De plus, cet exemple annonce le rôle particulier que peuvent jouer certains types d'énoncés afin d'éprouver les limites de l'algèbre disponible : « trouver le *moindre* nombre tel que… », trouver un ordre naturel sur les solutions qui permette à rebours de chercher *à quel rang* apparaît une solution spécifique [13], « déterminer *combien de fois* un nombre donné peut être de telle ou telle forme », etc. Le deuxième problème appartient justement à cette catégorie.

3. Le deuxième problème

Rappelons qu'il s'agit dans ce problème, de déterminer combien de fois un nombre donné, en l'occurrence 1 803 601 800, est la différence des (plus grands) côtés d'un triangle qui ait un carré pour différence de son petit côté aux deux autres côtés.

Une reconstruction

Pour mieux comprendre les enjeux de ce problème, je vais d'abord en expliquer brièvement une solution. Sa présentation est tout à fait anachronique et, par commodité, j'utilise ici des notations algébriques ; je reviendrai ensuite sur les rapports entre cette solution inventée pour l'occasion et ce que nous savons de la pratique de Frenicle et de Saint Martin.

Un triangle rectangle en nombres entiers (autrement dit, un triplet pythagoricien) est déterminé par trois entiers, p, q et d, avec p et q premiers entre eux, $p > q$, $p - q$ impair. Les côtés a, b, c du triangle peuvent en effet s'écrire sous la forme :

$$a = 2pqd, \quad b = d(p^2 - q^2), \quad c = d(p^2 + q^2) \tag{1}$$

où c est l'hypoténuse et a et b les deux côtés de l'angle droit.

13. Cette question apparaît chez Mersenne (Coumet, 1972).

Rappelons-en brièvement une preuve. Si l'on choisit pour d le plus grand diviseur commun des trois côtés, le triangle $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}, c' = \frac{c}{d}$, obtenu en divisant les côtés par d, est aussi rectangle. La relation de Pythagore $a'^2 + b'^2 = c'^2$ montre que a' et b' ne peuvent être tous deux impairs, car la somme de leurs carrés serait alors divisible par 2, mais pas par 4, et ne pourrait donc être le carré c'^2. Donc l'un est pair, disons a', l'autre impair. On a alors $a'^2 = c'^2 - b'^2 = (c' + b')(c' - b')$ et $\frac{c'+b'}{2}$ et $\frac{c'-b'}{2}$ sont deux entiers premiers entre eux dont le produit est un carré, ils sont donc des carrés premiers entre eux, qu'on note p^2 et q^2, ce qui fournit bien la représentation (1), unique avec les conditions indiquées.

Revenons maintenant au problème posé par Saint Martin et Frenicle. Si c'est le côté impair b qui est le plus petit, les différences $a - b$ et $c - b$ doivent être des carrés, soit

$$d(2pq - p^2 + q^2) = u^2 d(2q^2) = v^2$$

La deuxième équation montre que $2d$ est un carré, donc d doit être le double d'un carré. On déduit alors que $2(2pq - p^2 + q^2)$ doit être un carré, donc $2((p+q)^2 - 2p^2)$ est un carré. Mais $p + q$ est impair, donc $(p+q)^2 - 2p^2$ également et son double ne peut donc être un carré.

C'est donc le côté pair a qui est le plus petit. Les différences $b - a$ et $c - a$ doivent être des carrés, soit respectivement $d((p-q)^2 - 2q^2)$ et $d(p^2 + q^2 - 2pq) = d(p-q)^2$. La deuxième équation montre que d est un carré, ce qui donne finalement

$$(p-q)^2 - 2q^2 = u^2 \tag{2}$$

Le problème propose sous ces conditions d'étudier la différence M des deux plus grands côtés, soit $c - b$. Cette différence vaut $2dq^2$ d'après (1), soit ici, en utilisant l'équation (2), $d(p - q - u)(p - q + u)$. L'équation montre aussi que $p - q$ et u ont même parité, donc que $p - q - u$ et $p - q + u$ sont pairs, et qu'ils ont 1 pour seul diviseur commun impair (car un tel diviseur divise $p - q$ et u, donc $p - q$ et q, donc p et q).

Si maintenant un entier M est donné, comment l'exprimer comme différence des deux grands côtés d'un tel triangle rectangle ? Le nombre d peut être choisi arbitrairement parmi les diviseurs de M, s'il en existe, qui sont des carrés et tels que que M/d soit le double d'un carré, $2q^2$; ce choix de d fixe aussi q. Si on se donne ensuite une décomposition de M/d quelconque en deux facteurs pairs, sans facteur impair commun autre que 1, cette décomposition fixe $p-q$, donc p. Le triangle rectangle est alors fixé. On remarque que dans cette situation, le produit $(p-q-u)(p-q+u)$ est divisible par 4, donc q est nécessairement pair, ce qui veut dire que M/d et donc aussi M doit être de la forme $8r^2$. Le nombre de triangles rectangles possibles dépend du nombre de décompositions de M sous cette forme, c'est-à-dire, finalement, de sa décomposition en facteurs premiers (remarquons que $p-q$ est obtenu comme somme des deux facteurs, donc ne dépend pas de l'assignation particulière d'un des facteurs).

Si par exemple, $M = 2(2r)^2$, où r est un nombre premier impair, les diviseurs de M qui sont des carrés, donc les possibles d, sont d =1 ou 4 ou r^2, ou $4r^2$.

Dans le premier cas, $q = 2r$ et M peut se décomposer de deux manières en un produit de 2 facteurs pairs sans diviseur impair commun autre que 1 : soit $M = 2 \times 4r^2$, soit $M = 4 \times 2r^2$. Chaque décomposition fournit exactement un triangle de la forme demandée.

Si l'on choisissait $d = 4$, q devrait être égal à r, qui est impair, ce qui est impossible. Il en est de même pour $d = 4r^2$, qui donnerait $q = 1$.

Si $d = r^2$, $M/d = 8$, ce qui donne une décomposition unique, 2×4, de la forme souhaitée, soit un triangle.

Ce cas donne donc 3 triangles.

Plus généralement si $M = 2(2xyz\ldots)^2$, où x, y, $z\ldots$ sont n facteurs premiers impairs distincts, on trouve de la même façon 3^n triangles solutions. En effet, $M/d = 8$ fournit 1 triangle, $M/d = 8x^2$ en fournit 2 (et ceci pour chacun des n choix d'un facteur x parmi les n facteurs de M), $M/d = 8x^2y^2$ en fournit 4 (ceci pour les C_n^2 choix de x et y parmi les facteurs premiers de M), etc. On obtient donc au total $C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + C_n^2 2^2 + \cdots + C_n^n 2^n$, soit, par la formule du binôme, $(1+2)^n$, c'est-à-dire 3^n.

Le nombre proposé dans le défi à Fermat est bien de la forme nécessaire pour que le problème ait des solutions : en effet, $1803601800 = 2(2.3.5.7.11.13)^2$. On trouve alors $3^5 = 243$ triangles, comme Fermat l'écrit à Mersenne.

De l'art des nombres à l'analyse

Pratiques arithmétiques

La plupart des ingrédients utilisés ci-dessus sont bien connus des arithméticiens du XVII^{e} siècle, et de Frenicle en particulier : l'engendrement des triangles rectangles à partir de générateurs [14], les raisonnements reposant sur la parité ou les restes de division par 3, 4 ou d'autres petits nombres, les résultats sur les décompositions en facteurs premiers. Une variante de l'argument utilisé plusieurs fois plus haut, à savoir que si un produit de deux nombres premiers entre eux est un carré, chacun d'eux l'est aussi, apparaît couramment : considérant deux nombres dont le produit est un carré, Frenicle conclut que « ces deux nombres sont premiers entre eux ; & parce qu'ils sont entre eux comme quarré à quarré, ce seront deux quarrez premiers entre eux » [15].

Les indications laissées par Frenicle laissent entrevoir néanmoins une approche quelque peu différente [16].

Frenicle se place d'abord dans le cas de triangles primitifs (i.e. avec des côtés premiers entre eux, c'est-à-dire $d = 1$ dans les formules (1)) et prouve comme ci-dessus que pour les triangles considérés, c'est le côté pair qui est le plus petit. Il constate ensuite que « la difference totale est un quarré, qui est la somme d'un double quarré & d'un quarré ».

Cette différence totale est celle entre le plus grand (l'hypoténuse, donc)

---

14. Ceci figure d'ailleurs à peu près dans les commentaires de Claude Gaspard Bachet de Méziriac à son édition de Diophante. Dans le *Traité des triangles rectangles en nombres*, version réduite du *Discours* publiée à la mort de Frenicle en 1676, la proposition XX énonce que : « L'hypotenuse de tout triangle primitif [i.e. dont les cotés sont premiers entre eux] est la somme de deux quarrez inégaux, & premiers entre eux, dont l'un est pair, & l'autre impair ; & le costé impair du mesme triangle est la difference des mesmes quarrez. » (Frenicle de Bessy, 1729, p. 105).

15. Prop. XX, (Frenicle de Bessy, 1729, p. 105). Le langage des proportions, « comme quarré à quarré », au lieu de celui des facteurs premiers, vient d'Euclide. C'est aussi celui employé par Bachet.

16. Aux aspects abordés ci-après, il faut ajouter que le problème, intervenant dans un chapitre assez tardif du *Discours*, apparaît souvent comme un produit dérivé des enseignements acquis précédemment. Le chapitre en question est le 16ème, intitulé « Des triangles dont le moindre côté a un quarré pour différence avec chaqu'un des deux autres cotés ». Il suit un chapitre sur les « triangles qui ont mesme difference en leurs cotes & qui ont un quarre pour difference entre chaqu'un de leurs cotes prochains » (c'est-à-dire les *couples* de triangles comme 11. 60. 61 et 119. 120. 169) et de nombreuses comparaisons sont faites entre les deux situations étudiées. Je ne les rapporte pas ici.

et le plus petit côté ; avec les notations ci-dessus, il s'agit de $(p-q)^2$ et la proposition de Frenicle correspond donc à la relation (2). C'est sur cette condition, qui a ramené la question à l'étude de la forme $2X^2+Y^2$, que s'arrête longuement Frenicle : « Si donc on trouve tous les quarres, qui sont la somme d'un quarré et d'un double quarré, on aura aussy les triangles sudits car il est facile ayant les differences des cotes du triangle de trouver ces dits triangles, comme on peut voir par le chapitre precedent. » Il donne alors plusieurs manières de construire les triangles cherchés, à partir de tables élaborées méthodiquement [17].

La suite du chapitre est tout entière consacrée aux problèmes de dénombrements. L'auteur énonce par exemple que « Le double de tout quarre pair se peut joindre a autant de quarres pour faire un quarre qu'il y a de pairement pairs qui le divisent premièrement, de sorte toutefois que le quotient de la division surpasse la quotite du pairement pair » [18]. C'est au cours de cette discussion qu'apparaît explicitement la condition nécessaire sur les nombres M différence des deux côtés ($M=8r^2$, vue ci-dessus).

Frenicle traite alors un exemple, celui de 1800 ($=2(2.3.5)^2$), pour évaluer le nombre de triangles primitifs de la forme voulue qui ont exactement ce nombre pour différence des côtés. Le nombre 1800 est divisible par 4 entiers « pairement pairs » (4, 8, 36, 72) vérifiant les conditions indiquées (par exemple 1800 divisé par 36 donne 50 qui est premier à $36/4=9$). On retrouve les décompositions vues plus haut, dans le cas où $d=1$.

Le résultat est une puissance de 2 (« un nombre de l'analogie de 2 »), en l'occurrence 4 : comme le remarque Frenicle, « il n'y a point de nombre qui ne serve de difference qu'a 3, 5, 6, ou 7 susdits triangles primitifs ». Même si le problème n'est discuté directement que sur l'exemple de 1800, la situation des triangles primitifs cherchés est donc explorée méthodiquement : l'examen des propriétés pertinentes de 1800 (en l'occurrence celles de ses facteurs premiers) servant autant à produire de nouveaux exemples acceptables qu'à exclure d'autres nombres.

La réciproque discutée ensuite (choisir le nombre M pour obtenir un nombre voulu de triangles) est l'occasion de voir apparaître 1803601800. Pour obtenir $32=2^5$ triangles primitifs, il faut partir d'un nombre avec

17. Une construction est rappelée brièvement dans le Dixième Exemple de la *Méthode des Exclusions* (Frenicle de Bessy, 1729, p. 78-79).

18. Cette quotité est simplement par définition le quotient du nombre par 4. Diviser premièrement veut dire que le quotient est premier au quart du diviseur.

6 facteurs premiers, soit $2(2.3.5.7.11.13)^2$. Ce nombre est alors repris pour résoudre enfin le problème analogue lorsqu'on « demande icy tous les triangles en general & non pas les primitifs seulement », c'est-à-dire le problème posé à Fermat.

La solution demande cette fois de prendre en compte l'ensemble de tous les diviseurs, comme nous l'avons vu (à un facteur 2 près, puisque seuls les diviseurs pairs sont retenus). Sans autre explication, Frenicle se contente dans ce chapitre de donner, sous la forme d'une règle numérique, le calcul à effectuer à partir des exposants entrant dans la décomposition du nombre en facteurs premiers :

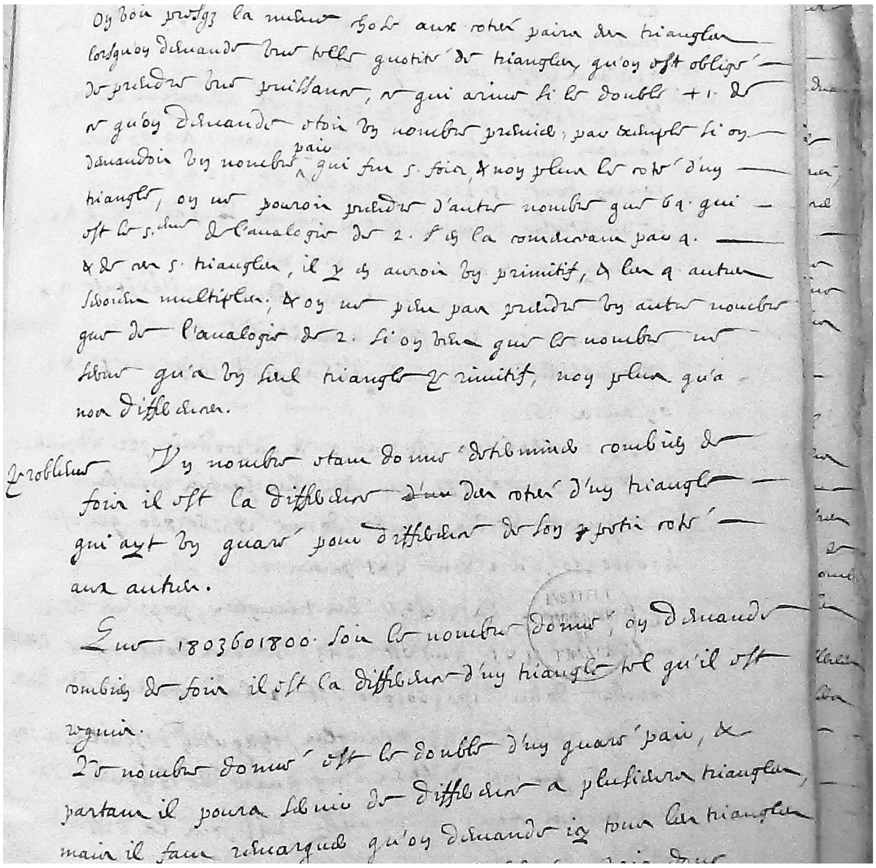
> « Pour trouver avec les parties susdites 2. 9. 25. 49. 121. 169 combien le nombre a de parties en tout, je prends les exposants desdits parties qui sont 1.2.2.2.2.2.
>
> Je multiplie 1 par 2 j'ay 2 auquel adjoutant les deux nombres qui se sont multiplies, savoir 1 & 2 on aura 5. J'auray donc 5. 2.2.2.2. au lieu de 1.2.2.2.2.2.
>
> Je multiplie 5 par 2 et au produit 10 j'adjoute 5 & 2 et j'auray 17 et on aura 17. 2.2.2.
>
> Je multiplie 17 par 2 & au produit 34 j'adjoute 17 & 2 pour avoir 53 & restera a multiplier 53.2.2.
>
> 53 multiplie par 2 fait 106 auquel joignant 53 & 2 on aura 161.
>
> Enfin multipliant 161 par 2 & au produit 322 adjoutant 161 & 2 on aura 485 qui sont les parties requises.
>
> Un quart du nombre donne 1803601800 qui est 450900450 aura donc 485 parties.
>
> Pour avoir la quotite des triangles, je prends le milieu de 485 qui est 243 » [19].

Mais ce genre de calcul est expliqué à plusieurs reprises dans les ouvrages de Frenicle, en particulier dans la *Méthode des exclusions*. Il y emploie à la fois des tables, ce qui oblige à mettre un ordre soigneusement réfléchi sur les nombres selon leur décomposition en facteurs premiers, et un codage des puissances par des lettres, car « la grandeur des parties ne fait rien à la multitude [...] Il faudra donc considerer seulement lesdites puissances, lesquelles seront commodément représentées par leurs exposans » (Frenicle de Bessy, 1729, p. 39) [20].

Autrement dit, si l'exposition du problème prend une forme synthé-

19. Le calcul correspond à celui des diviseurs d'un nombre donné sous la forme $p^a q^b r^c$..., soit $(a+1)(b+1)(c+1)$.... Frenicle et ses contemporains ne considèrent que les diviseurs propres, d'où la nécessité d'enlever 1, ce qui complique quelque peu la présentation. Comme indiqué, il faut diviser par 2 le nombre total de diviseurs, soit ici 486, pour obtenir les décompositions acceptables, soit 243.

20. Pour une présentation plus détaillée d'un de ces calculs, voir (Goldstein, 2001).


On voit presque la mesme chose aux costés pairs des triangles
lorsquon demande une telle quotité de triangles, qu'on est obligé
de prendre une puissance, ce qui arrive si le double +1. de
ce qu'on demande estoit un nombre premier; par exemple si on
demandoit un nombre pair qui fust 5. fois, & non plus le costé d'un
triangle, on ne pourroit prendre d'autre nombre que 64. qui
est le 5.me de l'analogie de 2. & en la considerant par 4.
& de ces 5. triangles, il y en auroit un primitif, & les 4 autres
seroient multiples; & on ne peut pas prendre un autre nombre
que de l'analogie de 2. Si on veut que le nombre ne
serve qu'a un seul triangle primitif, non plus qu'a
nos differences.

Problesme Un nombre estant donné determiner combien de
fois il est la difference d'un des costés d'un triangle
qui ayt un quarré pour difference de son petit costé
aux autres.

Que 1803601800 soit le nombre donné, on demande
combien de fois il est la difference d'un triangle tel qu'il est
requis.
Le nombre donné est le double d'un quarré pair, &
partant il pourra servir de difference a plusieurs triangles,
mais il faut remarquer qu'on demande icy tous les triangles

FIGURE 2 – *Le deuxième problème de Saint Martin à Fermat, dans le* Discours des triangles*. Archives de l'Académie des Sciences, Fonds Roberval, carton 4. (Reproduit avec l'aimable autorisation de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.)*

tique, il y a bien en amont une analyse [21] s'exerçant sur les relations réciproques des nombres générateurs des côtés d'une part, sur les décompositions des nombres en facteurs vérifiant diverses conditions d'autre part. C'est cette analyse seule qui permet *in fine* la constitution de problèmes convenables, en indiquant par exemple comment sélectionner la forme adéquate des entiers tests (ici 1803601800).

4. Sur l'histoire de l'analyse

Jusqu'au XX^{e} siècle, l'art des combinaisons semble s'intégrer aisément comme une branche, parfois un peu marginale, de l'analyse, frôlant la théorie des déterminants, puis celle des groupes : c'est le point de vue exprimé par exemple dans l'article « Analyse combinatoire » de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Pourtant, comme nous l'avons vu, l'analyse algébrique fait plus que remplacer les mots par des symboles : elle induit certaines formules, par exemple, qui captent l'attention (comme celle du binôme), des méthodes d'exploration spécifiques qui laissent d'autres aspects à l'écart.

« Le géométrisme fait manquer à cette algèbre une autre voie de généralisation, à savoir la combinatoire qui est d'essence arithmétique », écrit Yvon Belaval en opposant Leibniz à Descartes (Belaval, 1960, p. 289-290). Leibniz a explicitement suggéré d'inverser la hiérarchie des domaines, percevant dans l'art des combinaisons l'espoir d'une analyse de l'ordre, plus générale que l'analyse algébrique [22]. Comme nous l'avons vu ici, ce point de vue n'est pas unique. Avant Leibniz même, d'autres formes d'analyse ont été proposées en résistance à l'avénement de l'algèbre symbolique. Et le XVII^{e} siècle n'est pas le seul moment où les réflexions sur l'ordre ou la forme des nombres hantent et critiquent le développement mieux connu de l'analyse dans son acception ordinaire [23].

21. Pour des conclusions analogues à propos d'autres problèmes, voir (Coumet, 1968) et (Coumet, 1972).

22. Voir en particulier (Knobloch, 1974) et (Knobloch, 1976).

23. On peut citer Louis Poinsot et ses émules par exemple, voir à ce propos (Boucard, 2011a) et (Boucard, 2011b). Dans (Boucard, 2011b, ch. I), Jenny Boucard montre aussi comment d'autres mathématiciens, comme Guglielmo Libri, ont au contraire tenté de redéfinir des conditions d'intégralité par la voie de l'analyse algébrique.

Comme dans le cas de Frenicle et Saint Martin décrit ici, la situation disciplinaire à une époque donnée rend souvent difficile la prise en compte de ces approches alternatives au courant dominant. Par leur position même, elles doivent en effet s'adapter pour s'exprimer – et donc nous être visibles – à des modes de travail qui ne leur sont pas toujours favorables. Elles nous indiquent aussi l'intérêt de restituer ensemble les antagonismes de champ et les aspects les plus fins de leurs résultats [24] : comprendre ce que masquent l'énoncé maintenant banal d'un « combien de fois », ou encore le choix qui pourrait sembler puéril d'un exemple à 10 chiffres, peut être nécessaire pour capter dans leurs dynamiques historiques les multiples pratiques de l'analyse mathématique.

Bibliographie

Belaval, Yvon (1960), *Leibniz critique de Descartes*, Paris : Gallimard.

Boucard, Jenny (2011a), Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ?, *Revue d'histoire des mathématiques* 17.1, p. 41–138.

Boucard, Jenny (2011b), *Un « rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres » : études sur l'utilisation des congruences en France de 1801 à 1850*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris).

Brian, Éric (1994), *La Mesure de l'état*, Paris : Albin Michel.

Cifoletti, Giovanna (1990), *La méthode de Fermat : son statut et sa diffusion. Algèbre et comparaison de figures dans l'histoire de la méthode de Fermat*, Paris : SFHST-Belin.

Cifoletti, Giovanna (2006), From Valla to Viète : the Rhetorical reform of Logic and its Use in Early Modern Algebra, *Early Science and Medicine* 11.4, p. 390–423.

Coumet, Ernest (1968), *Mersenne, Frenicle et l'élaboration de l'analyse combinatoire dans la première moitié du XVII^e^ siècle,* 2 volumes, Thèse, Université de la Sorbonne (Paris).

Coumet, Ernest (1972), Mersenne : dénombrements, répertoires, numérotations de permutations, *Mathématiques et sciences humaines* 38, p. 5–37.

Fermat, Pierre (1891), *Œuvres*, vol. 1, Charles Henry et Paul Tannery (éd.), Paris : Gauthier-Villars.

24. Une illustration éclairante de l'importance de prendre au sérieux les variantes d'énoncés est bien sûr la discussion du théorème fondamental de l'algèbre, dans (Gilain, 1991).

Fermat, Pierre (1894), *Œuvres*, vol. 2, Charles Henry et Paul Tannery (éd.), Paris : Gauthier-Villars.

Frenicle de Bessy, Bernard (1729), *Mémoires de l’Académie royale des sciences, depuis 1666 jusqu’en 1699*, vol. 5, Paris : Compagnie des Libraires.

Gardies, Jean-Louis (2001), *Qu’est-ce que et pourquoi l’analyse ? Essai de définition*, Paris : Vrin.

Gilain, Christian (1991), Sur l’histoire du théorème fondamental de l’algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Sciences* 42, p. 91–136.

Gilain, Christian (2010), La place de l’analyse dans la classification des mathématiques : de l’*Encyclopédie* à la *Méthodique*, *Recherches sur Diderot et sur l’Encyclopédie* 45, p. 109–128.

Goldstein, Catherine (1995), *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : PUV.

Goldstein, Catherine (2001), L’expérience des nombres de Bernard Frenicle de Bessy, *Revue de synthèse* 2, p. 425–454.

Goldstein, Catherine (2008), Écrire l’expérience des mathématiques au XVII[e] siècle, dans Hélène Vérin et Pascal Dubourg-Glatigny (dir.), *Réduire en art,* Paris : MSH, p. 212–234.

Goldstein, Catherine (2009), L’arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne : une approche microsociale, *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 18, p. 25–57.

Knobloch, Eberhard (1974), The mathematical studies of G. W. Leibniz on combinatorics, *Historia mathematica* 1-4, p. 409–430.

Knobloch, Eberhard (1976), *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*, Wiesbaden : Franz Steiner.

Mahoney, Michael (1973), *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*, Princeton : Princeton University Press.

Mersenne, Marin (1963), *Correspondance*, vol. 8, Marie Tannery, Cornelius Waard et Bernard Rochot (éd.), Paris : CNRS.

Tannery, Paul (1904), Sur l’histoire des mots « analyse » et « synthèse » en mathématiques, dans *Atti del Congresse internazionale di scienze storiche*, vol. 12, Roma : Accademia dei Lincei.