Un entretien avec Alain Connes

Propos recueillis par Claire Debord

As-tu eu une enfance qui te prédestinait à devenir un grand scientifique ?

Je dirais « pas du tout ». Par contre, j'ai eu une enfance qui a été très heureuse jusqu'à l'âge de huit ans. Je suis né à Draguignan dans la propriété de mes grands-parents, qui était un endroit merveilleux. Puis à l'âge de huit ans, mon père a accepté un poste de chef de brigade à Marseille. On a donc quitté Draguignan pour un quartier déplaisant de Marseille où il y avait des bandes de blousons noirs. Cela a été un changement radical de mon environnement. Le travail de mon père jusqu'en 66 consistait à poursuivre des gangsters pour démanteler les trafics de contrebande, ce qui était très dangereux. Ma mère était médecin pédiatre, elle exerçait dans les écoles. C'est mon frère aîné, Bernard, qui, en intégrant deux ans avant moi l'École normale de la rue d'Ulm, a fait la percée. Il a eu du mal à convaincre ma mère qu'il valait mieux entrer à l'École normale plutôt que d'aller à l'École polytechnique. Mes parents ne connaissaient pas l'École normale, ils n'étaient pas du tout de ce milieu-là, ce n'était pas de « grands intellectuels ».

Comment et quand as-tu commencé à t'intéresser aux mathématiques ?

Il y a une photo assez parlante : j'avais cinq ans, on est assis à une table avec mon père et mon plus jeune frère dans ce qu'on appelait le bosquet, c'est-à-dire un petit bois qui était dans la propriété. Mon père me faisait faire les quatre opérations et j'éprouvais un plaisir immense à faire ça. Il était avec nous, très calme, très sérieux... On a compris, au bout d'un moment, qu'il utilisait ce qu'on appelle la règle de trois pour vérifier nos calculs et on pouvait alors en faire autant. C'était un vrai plaisir et un premier contact.

J'ai toujours eu plaisir à faire des maths, mais en Sixième s'est produit un peu par accident, un épisode intrigant. Notre professeur, M. Emdon, qui était habituellement enseignant en Sup et Spé, n'avait pas du tout réalisé à quel niveau il devait faire ses cours. Un jour, il posa un problème de géométrie au tableau. Il me regarda longuement sans rien dire, puis me demanda « Alors Monsieur Connes, comment fait-on ? ». Ce qui est absolument extraordinaire, c'est que je lui ai donné la solution. Mais après lui avoir donné la solution, il m'a fallu plus d'une demi-heure pour comprendre pourquoi ma réponse n'était pas complètement idiote. J'ai alors perçu que nous possédons sans doute des savoirs dont nous n'avons pas conscience et qui peuvent s'exprimer, surgir, dans des conditions favorables. Cela a été un tournant.

Il y a eu un autre épisode en classe de Seconde. Mon professeur de mathématiques nous avait dit « Il n'existe pas de formule qui donne le nombre $\Pi(n)$ de nombres premiers plus petit que n. » Je suis rentré chez moi et le lendemain, je lui ai donné une formule ! Bien sûr, elle était trop compliquée pour être utile – mais évidemment, il y a une formule... Il y a deux ou trois ans, j'ai enfin trouvé une formule que l'on peut écrire sur une demi-ligne [1]. Elle n'est pas utile non plus, mais elle n'est pas très difficile à concevoir.

Quand j'étais en Math Sup et Math Spé, c'était beaucoup plus net. J'avais conçu de mon côté ma propre théorie qui consistait à remplacer partout les dérivées par des différences finies. Travailler avec des suites au lieu de travailler avec des fonctions. Je ne savais pas du tout, bien sûr, que ça avait déjà été fait par Newton. Il arrivait, de temps en temps dans le cours, que ça tombe pile dans le cadre de la théorie que j'avais développée, ce qui était un vrai plaisir pour moi ! Je rentrais souvent du Lycée Thiers avec un professeur de Math Sup, assez particulier, qui s'appelait Victor Charlier de Chily, on marchait ensemble, je lui racontais ma théorie et il me répondait. Par contre, le reste ne m'intéressait pas beaucoup.

1. $\Pi(n)$ est la partie entière de $\sum_1^n \sin^2(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k})$.

Saurais-tu dire vers quel âge et dans quelle circonstance tu as décidé d'être mathématicien, d'en faire un métier ?

La direction des mathématiques était assez naturelle. D'autant plus que mon frère Bernard avait intégré l'École normale deux ans avant moi. J'ai donc quitté Marseille, pour entrer à l'École normale à Paris en 66 et je dois avouer que je n'avais alors qu'une idée, c'était de ne rien faire... Or, on se posait tout le temps des problèmes de maths avec les autres élèves de l'école. Ainsi, la première année, je jouais au foot avec mon équipe ou je passais mon temps dans mon bistrot préféré et je réfléchissais aux problèmes posés par les copains. C'était formateur parce que l'on réfléchissait vraiment à ces problèmes avec une liberté totale. Mais je n'allais pas suivre les cours à la fac. J'ai refusé de passer l'agrégation ensuite, car je voulais continuer à réfléchir à mes idées et je ne voulais pas recommencer le calvaire des classes préparatoires, je ne voulais absolument pas retourner dans ce système-là.

Ensuite, des concours de circonstances incroyables se sont produits et m'ont amené à trouver la voie qui m'intéressait. Quand j'étais à l'École normale, j'ai travaillé sur la localisation des zéros de polynômes et j'avais inventé une manière d'ordonner les nombres complexes, que j'appelais ordre faible. Alors bien entendu, ce n'est pas vrai que le produit de deux positifs est positif ; par contre, j'avais observé que la moyenne harmonique de deux positifs est positive et j'en avais déduit des théorèmes connus sur la localisation des zéros de polynômes simplement à partir de là. J'avais présenté mon travail au séminaire Pisot. Mais j'étais sur cette voie assez bizarre de localisation de zéros de polynômes. Durant l'année 69/70, qui correspond à la fin de mes années d'école et à mes débuts de stagiaire au CNRS, j'ai fréquenté le séminaire Choquet qui était très stimulant intellectuellement et je me suis laissé séduire par l'analyse non-standard. À l'issue de cette première année, Gustave Choquet, qui pensait qu'il fallait que j'apprenne de la physique, m'a envoyé à l'école d'été des Houches où j'ai fait la première rencontre signifiante de mon existence. Le physicien-mathématicien Oscar Lanford faisait un cours sur les algèbres de Von Neumann. Durant cette école, j'ai aussi été repéré par un physicien américain, Andrew Lenard, qui m'a offert une bourse pour participer à une école d'été, à Seattle l'année suivante. En juillet 1971, je venais de me marier, et nous avons commencé ce voyage aux États-Unis avec ma femme par une visite chez mon frère à Princeton. En prévision du long voyage en train qui devait me permettre de me rendre à Seattle, j'ai acheté un peu au hasard au BookStore un livre écrit par un japonais. À ma grande surprise, j'ai découvert une fois à Seattle, que le japonais était là et qu'il donnait un cours sur son livre – c'était Takesaki. Cela m'évoque cette phrase de Shakespeare « There is a tide in the affairs of men. Which, taken at the flood, leads on to fortune. »[2] Je n'ai suivi que ce cours-là et de retour en France, j'ai cherché les mathématiciens qui faisaient des algèbres d'opérateurs. C'est comme cela que j'ai intégré le séminaire de Jacques Dixmier en septembre 1971. Lors de la distribution des articles à étudier, j'ai reçu celui d'Araki et Woods sur la classification des produits tensoriels infinis. En regardant cet article dans le train qui me ramenait chez moi, j'ai réalisé que la théorie de Tomita et Takesaki permet de réécrire les invariants d'Araki-Woods. J'ai écrit une première lettre d'une page à Dixmier, qu'il jugea trop courte, puis une seconde dans laquelle je donnais tous les détails de la trouvaille. Quand je suis allé le voir, je m'en souviens comme si c'était hier, tout ce qu'il m'a dit, c'est « Foncez ! ». La thèse a démarré et puis tout le reste a suivi. Ce qui était rupinant, ça a été l'enchaînement. Ce n'est pas vraiment de la chance parce qu'il faut saisir l'opportunité et il me semble important de dire que cela ne se fait pas tout seul. Le fait que Araki-Woods soit relié à la théorie de Tomita-Takesaki m'a paru être une évidence parce que j'avais les connaissances qu'il fallait. Mais j'ai aussi trouvé quelque chose de très simple, de très important et qui m'a permis d'avancer beaucoup – la technique des matrices 2×2.[3] Bien que ce soit très simple, c'est arrivé au bout de calculs extrêmement compliqués... Après avoir fait tous ces calculs, à un moment donné, effectivement, l'idée est arrivée d'un coup, mais c'était après un très très long travail de préparation. Et puis après tout s'est enchaîné.

Voudrais-tu nous parler de ton lien avec ton directeur de thèse Jacques Dixmier, comment se passait le travail avec lui ?

2. « Il y a une marée dans les affaires des hommes, prise dans son flux, elle porte au succès. »

3. Tomita associe à tout poids normal, semifini et fidèle sur une algèbre de Von Neumann A, un groupe d'évolution ou groupe modulaire qui est un groupe d'automorphisme de A à un paramètre mesurant le défaut pour le poids d'être une trace. Si φ et ψ sont deux poids, le poids $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \varphi(a) + \psi(b)$ sur $M_2(A)$ et l'égalité $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, permettent de montrer que le groupe d'évolution ne dépend pas du poids à automorphismes intérieurs près.

Travailler avec Jacques Dixmier a joué un rôle crucial, en particulier parce qu'il lisait vraiment les articles qu'on lui donnait. Chaque semaine, je lui envoyais une lettre de trois ou quatre pages, il la lisait et il faisait des commentaires… J'avais donc une routine, je savais que chaque semaine, il fallait que je lui donne trois ou quatre pages les plus nouvelles possible. Ce n'était pas un échange verbal au tableau, c'était un échange par lettre, mais qui fonctionnait incroyablement bien parce qu'il avait cette attention qui est si rare. Je me sentais parfaitement écouté et ça, c'est merveilleux. De même pour la thèse, il a fait un grand nombre de corrections.

Il faut que je raconte l'histoire incroyable de ma soutenance. C'était en avril ou mai 73, je devais passer ma thèse et j'avais tout préparé. À l'époque, il y avait aussi une deuxième thèse que je faisais avec Marie-Paule Malliavin sur l'algèbre. Un des résultats importants de mon travail, l'existence des facteurs hyperfinis qui ne sont pas des produits tensoriels infinis, utilisait un résultat de théorie de la mesure de Wolfgang Krieger. La veille de la soutenance, le soir, je reçois un télégramme de Krieger qui dit « Mon article est faux. ». Catastrophé, j'appelle Dixmier au téléphone, il me dit « Écoutez, vous rigolez, vous avez 36 autres résultats, ce n'est pas un problème. »… Mais moi, j'étais complètement démoralisé. Le lendemain, je soutiens ma thèse et puis le soir, je reçois un deuxième télégramme de Krieger « L'erreur est réparée ». C'était une sacrée bonne nouvelle ! Mais j'ai quand même passé ma thèse en sous-marin à cause de ça.

Quelles ont été les autres rencontres déterminantes dans ton parcours ?

Lorsque je suis rentré de Kingston après avoir beaucoup travaillé sur les algèbres d'opérateurs, j'ai été invité à l'IHÉS à Bures où j'ai fait la rencontre de Dennis Sullivan. Il posait des questions à toutes les nouvelles têtes qu'il voyait. Il a un pouvoir socratique qui le conduit à te pousser dans tes retranchements et à t'apercevoir que ce que tu prends pour argent comptant n'est pas si évident que ça et demande à être approfondi. À Bures, je voyais défiler un tas de notions dont je ne connaissais rien et j'ai pu comprendre la plupart d'entre elles en un rien de temps grâce aux explications de Dennis. Par exemple, c'est lui qui m'a expliqué ce que c'est qu'un feuilletage. Quand j'ai compris qu'on pouvait associer une algèbre de Von Neumann à un feuilletage et que la plupart des facteurs les plus exotiques venaient de feuilletages, j'ai été enthousiasmé parce que je pouvais enfin expliquer mon travail à des gens dotés d'un vocabulaire et d'un cercle d'idées complètement différents. Tout ça, c'était à partir de l'année 76. Et la géométrie non commutative a vraiment commencé à cette époque. Les feuilletages ont joué un rôle fondamental et je ne les aurais jamais utilisés si j'avais essayé de les comprendre dans les livres. Ainsi, la rencontre avec Dennis Sullivan est ce qui m'a fait passer des algèbres d'opérateurs à la géométrie des espaces non commutatifs. Le lien avec la physique a également été essentiel. J'ai, depuis toujours, pas loin de moi, un petit livre constitué d'articles de physique de théorie des champs sur l'électrodynamique, intitulé *Collected Papers In Quantum Electrodynamics*. J'avais en ligne de mire de comprendre la renormalisation. Ce que j'ai fait avec Dirk Kreimer dans les années 2000. C'est un autre pan important qui trouve sa source dans le fait que dans les années 70, il y avait en France un autre endroit où les algèbres d'opérateurs jouaient un rôle essentiel et en particulier en physique. C'était à Bandol avec Daniel Kastler qui avait réuni autour de lui de nombreux chercheurs physiciens théoriciens et mathématiciens qui pratiquaient une recherche à la frontière entre les algèbres d'opérateurs et la physique quantique. Cela a aussi joué un rôle très important.

Tu as reçu la médaille Fields en 1982, qu'est-ce que cela a changé pour toi ?

Pour moi, cela n'a rien changé, ça a dû changer le regard des gens sur moi, mais pour moi rien du tout. La réalité sur laquelle on travaille est tellement résistante que cela ne change rien.

On peut parfois douter.

Mais je doute tout le temps et cela n'a absolument pas changé ! Le doute a toujours été présent, il l'est encore parfois, il faut bien vivre avec… Je n'ai jamais eu une impression de facilité. Je pense que le doute est une composante absolument essentielle de l'être humain. Il y a, bien entendu, des moments où l'on est très content que quelque chose fonctionne, mais cela n'enlève pas le doute et la médaille Fields n'a rien changé du tout dans ce domaine-là. La médaille Fields révèle quel était le regard des gens, comment ils ont changé. Mais ce n'est que sociologique, ce n'est pas du tout une consécration, c'est un encouragement à continuer. Cela, d'autant plus, lorsqu'il s'agit d'un sujet mal reconnu comme les algèbres d'opérateurs et même ensuite, la géométrie non commutative.

Parlons un peu de mathématiques. Tu as débuté en révolutionnant les algèbres de von Neumann. Tu as donné naissance et développé ensuite la géométrie non commutative. Tu as travaillé et travailles encore sur la conjecture de Riemann et sur des questions de théorie des nombres. Tu t'intéresses à la physique théorique et plus particulièrement à produire un modèle de l'espace-temps. Enfin, tu revisites la géométrie algébrique de Grothendieck. Quel est le lien ? Est-ce un fil continu qui t'a mené de l'un à l'autre de ces thèmes ou est-ce plutôt un vaste et immense tableau qui se forme à la façon des impressionnistes ?

Il y a bien un fil entre les algèbres d'opérateurs et la géométrie non commutative, et cela, grâce aux feuilletages. Les algèbres d'opérateurs n'étaient plus un objet complètement abstrait, algébrique ; elles devenaient visibles. Et étant visibles, cela suggérait que notre notion d'espace est beaucoup trop restrictive et qu'il faut la généraliser en remplaçant un espace par un groupoïde, de la manière la plus simple possible, et de permettre ainsi aux points de parler entre eux. On s'aperçoit alors que dans le leitmotiv de la géométrie algébrique, qui est de coder un espace par une algèbre commutative, la commutativité est trop restrictive, car dès que l'on prend un groupoïde, même le plus simple, avec deux points qui se parlent entre eux, on obtient comme algèbre associée celle des matrices 2×2. On est donc attiré vers le développement de la géométrie non commutative. Mais la raison profonde pour laquelle la géométrie non commutative m'a paru extraordinaire, ce n'est pas en tant que généralisation. Grâce à l'astuce des matrices 2×2, je me suis aperçu qu'un espace non commutatif génère son propre temps. Il a une évolution dans le temps qui est complètement canonique, modulo les automorphismes intérieurs. Et cela signifie, qu'un espace non commutatif est en fait « vivant », on peut le refroidir, on peut le chauffer, on peut chercher les états d'équilibre à différentes températures. On peut faire des choses qui sont complètement inédites pour un espace commutatif. Ensuite, le fait que des théories aussi fondamentales que la K-théorie se prolongent aux espaces non commutatifs rend les choses extrêmement efficaces, avec par exemple l'utilisation du groupoïde tangent… Cela m'a conduit, en 81, à la découverte de la cohomologie cyclique qui fournit un analogue de la théorie de De Rham dans le cas non commutatif. Donc, là il y avait un fil qui s'est poursuivi dans le sens géométrique. Mais je n'avais pas trouvé d'incarnation en physique de cette évolution temporelle canonique des espaces non commutatifs. J'avais essayé un peu en théorie des champs, mais sans succès. Jusqu'au jour où j'ai rencontré Carlo Rovelli qui est quelqu'un qui a une véritable compréhension philosophique de la physique. On a écrit un article dans lequel on a compris que cette évolution temporelle pouvait être la véritable origine du temps tel qu'on le connaît, le temps qui passe, et que c'était une origine thermodynamique. On a donc fait une hypothèse physique qui est l'hypothèse du temps thermodynamique.

La rencontre avec la théorie des nombres est elle aussi singulière. J'avais écrit un article avec Jean-Benoît Bost dans les années 90 dans lequel on avait rencontré, un peu par hasard, un espace non commutatif. Nous avions construit des algèbres de Hecke, à partir d'un groupe discret et un sous-groupe presque normal, qui nous permettaient d'obtenir des facteurs de type III alors que les constructions traditionnelles donnaient des facteurs de type II dont l'évolution temporelle est statique. Nous avions considéré l'exemple, le plus simple possible, du groupe affine sur les rationnels avec le sous-groupe correspondant aux entiers et nous avions obtenu le facteur de type III_1 hyperfini. On avait observé, en refroidissant l'espace et en le réchauffant, que dès qu'on le refroidissait un peu, il y avait une transition de phase avec une brisure spontanée de symétrie, et que le groupe de Galois de l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ apparaissait. De plus, on obtenait le corps cyclotomique en évaluant les états sur une sous-algèbre. On avait trouvé, que la fonction Zêta de Riemann apparaissait comme fonction de partition du système thermodynamique. De retour d'un exposé donné sur le sujet en 96 à Seattle pour l'anniversaire des 70 ans d'Atle Selberg, après une semaine de réflexions nocturnes, j'ai compris qu'en prenant le dual du système obtenu avec Jean Benoît, et en regardant ce que l'on appelle l'action duale, les zéros de la fonction Zêta apparaissaient naturellement sous la forme de ce que l'on appelle un spectre d'absorption. Ce qui était vraiment intéressant, ce n'était pas la réalisation spectrale, c'était le fait qu'on comprenait immédiatement les formules explicites de Riemann-Weil. J'avais écrit une note aux comptes-rendus, dans laquelle je proposais une stratégie qui consistait à forcer un peu les zéros à être sur la droite critique. Après, il s'en est suivi toute une saga, et je continue à travailler sur ces questions avec la même stratégie. Mais ça a considérablement évolué depuis. En particulier dans un travail récent avec Katia Consani et avec Henri Moscovici, on a transformé le spectre d'absorption, qui est très difficile parce qu'il ne se voit pas, en un spectre d'émission. Et là, les chances sont bien plus grandes d'arriver à quelque chose. Mais c'est un parcours très très long, dans lequel néanmoins, on a rencontré toutes sortes de notions incroyables auxquelles on n'aurait jamais pensé autrement. L'une d'entre elles, qui est sans doute la plus exotique, est ce qu'on appelle la caractéristique 1. C'est un formalisme algébrique, parfaitement analogue à la caractéristique p, dans lequel l'application $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme pour tout n, pas seulement pour la puissance p. Et donc il y a un Frobenius pour tout n, il y a un tas de propriétés étonnantes qui se produisent.

Il y a un autre volet qui est apparu très brutalement par une autre rencontre. J'avais toujours été hanté par la renormalisation qui me paraissait extrêmement bizarre comme recette de cuisine utilisée par les physiciens. En 98 j'ai rencontré Dirk Kreimer à l'IHÉS, qui est un vrai physicien pur et dur, doté d'une intuition incroyable et qui avait imaginé quelque chose qui ressemblait à une algèbre de Hopf, à partir des diagrammes de Feynman. En parlant avec Dirk, j'ai vu qu'il y avait une vraie algèbre de Hopf, que l'on a mise au point. On a commencé à travailler ensemble, on a eu des heures de discussions pendant deux années. Et puis un samedi de septembre 2000, j'ai compris que la renormalisation n'était rien d'autre que la décomposition de Birkhoff pour les fibrés en groupe unipotent sur la sphère. Quand j'ai compris ça, il faut être honnête, là, j'ai vraiment été au plafond. Pas pendant une heure, pas pendant une journée... pendant sept jours! Parce qu'enfin, ce galimatias de recettes de calcul, prenait un sens mathématique parfait. Tel que si on me demandait, à l'improviste, qu'est-ce que la renormalisation? Je pouvais répondre! Cela a été une profonde révélation et après, j'ai continué avec Matilde Marcolli. On a été beaucoup plus loin, on a compris le lien avec ce qu'on appelle le problème de Riemann-Hilbert. Mais la percée, ça a été à un moment extrêmement précis, où j'ai enfin compris que ce que faisait Dirk était précisément ce qui permettait de faire la décomposition de Birkhoff quand on a un groupe qui n'est pas un groupe semi-simple, mais un groupe unipotent.

L'autre épisode important en lien avec la physique, c'est celui du modèle standard. Cette histoire a commencé en 86 par un calcul tout bête. On ajoute souvent une unité à une C^*-algèbre qui n'en a pas. J'avais une formule de géométrie non commutative qui donnait l'action de Yang Mills et j'ai voulu regarder ce que donne cette action si on ajoute une unité à l'algèbre associée à l'espace-temps... Le calcul a produit un terme bizarre. Et puis je me suis dit, pourquoi est-ce que je ne rajoute qu'un point? Je vais rajouter toute une couche, je vais penser que l'espace-temps a deux côtés, comme une feuille de papier. Il y a le dessus, il y a le dessous... J'ai recommencé le calcul, et j'ai trouvé un champ scalaire avec un potentiel en ϕ^4 qui interagissait avec les autres forces... J'ai reconnu, après quelques péripéties, le champ de Higgs. Donc, là, j'ai compris que la géométrie non commutative pouvait aider à déchiffrer la signification géométrique du modèle standard de la physique des particules. La vraie collaboration s'est produite en 96, quand j'ai rencontré Ali Chamseddine, qui est un être singulier, à la fois très paresseux et génial. On a compris qu'il y avait un moyen de retrouver le modèle standard couplé à la gravitation en prenant une action qui est purement gravitationnelle, parce qu'elle ne dépend que de l'opérateur de Dirac. La géométrie est décrite par l'opérateur de Dirac, et puis l'action spectrale de l'opérateur de Dirac redonne non seulement la gravitation, mais aussi le modèle standard. C'est une histoire où on avance, et puis on a toujours des pépins. Le premier pépin qu'on a eu, c'était en 98. À Kamiokande, au Japon, ils ont trouvé qu'il y avait des oscillations entre les neutrinos. Or, le modèle standard ne permet pas les oscillations entre neutrinos. Donc on s'est dit, « C'est foutu, on n'a pas le bon truc ». J'ai rencontré Dixmier à l'époque, et Dixmier m'a dit, « Non, ce n'est pas foutu. Vous ne persévérez pas assez. ». À l'époque, j'ai abandonné et j'ai été obligé de reprendre en 2004, lorsque l'on a écrit notre livre avec Matilde Marcolli. Elle m'avait demandé d'écrire tous les détails de la formule que nous avions obtenue avec Ali Chamseddine, pour montrer comment retrouver le modèle standard à partir de l'action spectrale : c'est une formule qui prend plusieurs pages, qui est très compliquée. J'ai alors réalisé, en reprenant ces calculs, qu'en modifiant une de nos hypothèses, on obtenait non seulement l'oscillation des neutrinos, mais on obtenait en plus le mécanisme qui donne aux neutrinos une toute petite masse qui est connue en physique comme étant le mécanisme « see-saw », qui avait été « mis à la main » par les physiciens. On était ravi! J'ai écrit un tout petit article seul, puis un article avec Chamseddine et Marcolli. On a eu à nouveau un coup dur en 2008, parce qu'on avait exagérément pensé que notre modèle pouvait être valable jusqu'à unification. Et du coup, on avait une prédiction pour la masse du Higgs qui était de l'ordre de 170 GeV. Or, en 2008, cette masse a été exclue. Une fois encore, je me suis dit « C'est foutu ». En 2012, Ali m'apprend que trois groupes de physiciens ont montré comment corriger le modèle standard de telle sorte que la masse du Higgs soit la bonne et que ça soit valable à unification. Il suffit de rajouter un champ scalaire avec des couplages particuliers avec le Higgs. Et il ajoute que ce champ scalaire était présent dans notre théorie, publiée deux ans avant, avec les bons couplages mais que l'on avait ignoré. Au lieu de le prendre en compte dans la renormalisation on l'avait fixé à sa valeur du vide. On a donc repris espoir. Depuis, on a collaboré avec Walter van Suijlekom et on a obtenu un modèle qui est un peu plus subtil que le modèle standard, que l'on appelle le modèle de Pati-Salam, qui n'est pas du tout exclu expérimentalement. Du moins, pas encore...

À la même époque j'ai travaillé avec Ali Chamseddine et Slava Mukhanov, un physicien qui fait de la cosmologie, pour cette fois, non pas partir de la physique pour trouver l'espace non commutatif, mais pour justifier l'espace non commutatif à partir de rien... Quand on regarde un espace, même commutatif comme la sphère, il est en fait beaucoup plus facile de définir l'algèbre des matrices 2×2 des fonctions sur la sphère que de définir l'algèbre des fonctions sur la sphère. La raison à cela, c'est que l'algèbre des matrices 2×2 des fonctions sur la sphère, est, à une petite condition près, le produit libre de l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2×2 par l'algèbre commutative $\mathbb{C}^2$. Donc on prend ces deux algèbres de dimension finie, et on écrit des mots, ou alternativement, on prend un élément de $M_2(\mathbb{C})$ et puis un élément de $\mathbb{C}^2$. On démontre que l'on obtient comme cela exactement [4] les matrices 2×2 des fonctions sur la sphère. Autrement dit, si on écrit des mots sans permuter des lettres, comme dans le langage courant, on a un contenu d'information qui est infiniment plus grand, plus efficace qu'avec l'algèbre commutative qui, elle, ne distingue pas une phrase comme « L'horloge des anges ici-bas. » de « Le boson scalaire de Higgs. ». Dans le non commutatif, et on y est parfaitement habitué à cause du langage, le contenu en quantité d'information est bien plus grand. Ce qu'on démontre avec Mukhanov et Chamseddine c'est que pour toutes les variétés spinorielles de dimension 4, il y a exactement ce même phénomène d'écriture de l'algèbre des fonctions à condition de prendre un petit peu de non-commutativité qui vient des algèbres de Clifford, et cette non-commutativité est exactement celle du modèle plus subtil que l'on avait trouvé avec Ali et Walter !

Tes cours au Collège de France ont occupé une place importante, il me semble. Veux-tu nous en parler ?

J'ai donné ma leçon inaugurale en janvier 1985, je suis entré au Collège et j'ai continué de faire des cours pendant 32 ans... ce qui est très long. Il faut arriver à se renouveler et pour cela, il ne faut absolument pas tomber dans l'ornière qui consiste à répéter toujours la même chose, à faire des variantes. Il faut avoir les yeux ouverts, changer de sujet, être prêt à aborder des questions qui ne sont a priori pas reliées à ce que l'on faisait avant... Les meilleurs cours que j'ai donnés étaient les cours dont la préparation n'était pas finie avant que je ne commence les exposés. C'était alors vraiment la recherche en train de se faire : on tente un truc et puis on voit bien. Je pense que c'est terriblement important et que c'est le rôle du Collège de permettre de prendre des risques, de s'attaquer à un sujet devant tout le monde... pour l'auditoire, c'est idéal. Je me souviens très bien des périodes de tension des cours. Ma routine était la suivante. Je ne travaillais pas le vendredi parce qu'après le cours du jeudi, j'étais trop fatigué. Donc je travaillais chaque jour du samedi jusqu'au mercredi. Le jeudi matin, je ne regardais absolument pas mes notes. Je ne voulais surtout pas faire marcher ma mémoire, car ce n'est pas la bonne stratégie. Il faut se remettre les idées en place et avoir tout en tête sous forme condensée. Je prenais des dos de grandes enveloppes. En général, j'en avais deux, et j'écrivais les points principaux dont j'allais parler - après avoir fait ça dans la matinée, j'étais prêt et je n'avais besoin de rien, à la rigueur, j'avais ces deux enveloppes, mais je ne m'en servais jamais. Donc j'étais prêt en ayant ce protocole qui était d'avoir vraiment réfléchi pendant la semaine. Parfois, je ne dormais pas beaucoup... J'ai encore des piles de grandes enveloppes que j'avais faites. C'est un moment très spécial pendant l'année, très tendu, mais en même temps, c'est un dosage qui est à peu près parfait. Il y a un petit nombre d'heures, dix-huit, mais c'est un petit nombre d'heures qui est sous-tendu par le travail du reste de l'année. Ce sont dix-huit heures de trucs nouveaux, il faut vraiment aller au bout des démonstrations, aller au bout des idées et ne pas aller vite. Le public du Collège a été extrêmement varié, il y avait bien sûr des gens très forts, qui suivaient parfaitement, mais aussi des curieux et des personnages hauts en couleur. Cela m'a aidé sacrément d'avoir ce public.

4. Moyennant une condition de trace nulle sur le générateur Y de $\mathbb{C}^2$.

Comment vois-tu l'avenir des mathématiques ?

Je crois qu'il y a un véritable problème qui vient en partie d'une contamination du système français par celui qui sévit aux États-Unis. En observant ce que subissent les jeunes talents, je n'ai pas l'impression que les conditions soient optimales. Il faut d'abord noter que lorsque l'on développe un sujet qui est hors des sentiers battus, on est condamné à souffrir d'un certain mépris. Personne n'en a mieux parlé que Grothendieck. Il écrit explicitement que parmi tout ce qu'il a découvert, pour lui la merveille des merveilles, c'est la notion de topos (avec celle de motif)... et pourtant, c'est une notion qui est souvent méprisée, et cela, simplement par ignorance et c'est pareil pour la géométrie non commutative, c'est pareil pour tous les autres sujets un peu nouveaux. Souvent, les gens ne veulent pas faire l'effort de comprendre, ou ne peuvent pas, parce qu'ils ne sont pas au contact des bonnes personnes. Du fait qu'ils ne comprennent pas, ils décrètent que ce n'est pas intéressant et trouvent toujours une raison pour dénigrer la théorie. Or, maintenant, on est tombé dans le travers des Américains. On doit remplir des formulaires de caractère administratif en prédisant ce que l'on va trouver, et en combien de temps, bien que ce soit d'un ridicule absolu. Parce que si l'on ne trouve que ce que l'on a prévu de trouver, c'est strictement sans intérêt ! Ainsi, on arrive à un système qui induit un certain nombre de féodalités, d'entre soi, qui sont gérées par un petit groupe, ce qui fait que seuls les gens qui veulent bien rentrer sous le joug de telle ou telle féodalité pourront avoir des postes, des crédits... et ça ralentit le développement des mathématiques. Il y a des gens qui reçoivent des fortunes, or un mathématicien n'a pas besoin d'avoir un demi-million d'euros pour travailler sauf à le transformer en administrateur, ce qui compte c'est d'offrir un salaire décent aux débutants talentueux. Il y a ainsi la calamité de l'encombrement au CNRS, qui dans le temps était surtout un moyen de permettre aux débutants de faire leur preuves avant de devenir profs. On voit des situations absurdes : demander pour entrer au CNRS d'avoir déjà 10 ou 15 articles publiés, c'est ridicule. Il me semble qu'il faudrait plus de porosité entre le CNRS et l'université. Je n'ai pas la solution, mais il y a un vrai problème : combien de jeunes extrêmement talentueux sont confrontés au problème de passer leur thèse, puis d'enchaîner des post-docs... Ils perdent ainsi beaucoup de temps, ne serait-ce qu'en faisant des dossiers, en demandant des lettres de recommandation... Or, tous ces obstacles sont là quand même pendant leur meilleure période de créativité potentielle ! Donc, ce problème est crucial, à mon avis. Enfin, je ne trouve vraiment pas rassurant tout ce que j'entends dire sur l'utilité des maths. On n'a pas à prouver l'utilité des mathématiques. La recherche fondamentale, se situe sur le long terme, son but n'est pas d'être utile, mais de comprendre.

Tu as aussi travaillé avec un neurobiologiste, un psychanalyste, tu écris des romans, tu fais aussi du piano – Est-ce que ces activités interagissent avec ton travail de mathématicien ? Et comment ?

Cela agit principalement vis-à-vis du doute. Je ne peux pas vivre le doute de manière permanente. Donc je suis obligé de faire des choses qui sont, je ne dirai pas faciles, mais qui sont autres que la tension mathématique. Cette tension qui existe dans tout acte de recherche, c'est un peu ce dont parle Grothendieck quand il dit que la peur de se tromper, c'est la même chose que la peur de la vérité. Il faut arriver à la maîtriser, mais c'est très difficile. Il faut trouver des moyens de respiration, des moyens de s'apaiser. Le piano, j'aurais adoré en faire beaucoup plus, mais je ne peux pas, je sais très bien que pour faire du piano, il faudrait travailler au moins deux heures par jour. Par contre, j'adore improviser. J'improvise et j'enregistre. C'est surtout une manière de décompresser. Écrire des romans, comme on a écrit avec Dixmier et Danye, c'est très différent. À cette occasion, j'ai pu communiquer avec ma femme comme jamais. Elle n'est pas du tout mathématicienne, elle était professeur de lettres et le fait d'écrire, ça nous a permis vraiment d'atteindre une communication qu'on ne connaissait absolument pas et de découvrir une composante inédite chez l'autre. Quant à Dixmier, ce que j'ai découvert en écrivant des romans avec lui, c'est que, autant, il était un peu effrayant au début quand il était mon professeur... autant, il n'y avait pas plus gamin et plus espiègle que lui dans l'écriture des romans. C'était un véritable régal. La dernière rencontre, c'est effectivement le livre que j'ai écrit tout à fait récemment, qui vient de sortir avec le psychanalyste Patrick Gauthier-Lafaye. Je me suis rendu à un séminaire sur Le Temps à Cerisy, suite à mes idées sur le temps et la thermodynamique, et j'ai rencontré ce psychanalyste qui est aussi psychiatre. On a commencé à discuter, parce qu'il y avait des questions sur les maths qui l'intéressaient. Un jour, il m'a demandé mon avis sur un diagramme de Lacan, que je ne comprenais pas, jusqu'à ce que je réalise qu'il suffisait d'utiliser la logique intuitionniste – la logique où la double négation n'équivaut pas à l'affirmation – pour qu'il prenne du sens. Cela m'a amené à lui expliquer des exemples de logique intuitionniste et je me suis engagé à lui expliquer les topos. Je lui ai expliqué qu'il y avait quelque chose de merveilleux dans l'idée de Grothendieck des topos, qui était au niveau philosophique. C'est rare que les concepts mathématiques atteignent le niveau philosophique. L'idée des topos, c'est qu'il ne faut pas regarder l'espace qu'on veut étudier. Il faut le mettre dans les coulisses, et il faut faire la théorie des ensembles à paramètres dans cet espace. En faisant cela, on comprend l'espace beaucoup mieux que si on le regarde. Au cours d'une discussion, on a réalisé que c'est exactement ce qui se produit dans la psychanalyse. C'est comme cela que se structure l'inconscient. On a réalisé qu'en remplaçant dans la phrase de Lacan, « l'inconscient est structuré comme un langage », le mot « langage » par « topos », on avait tout un domaine d'exploration qui s'ouvrait devant nous. Et c'est ça qui a occasionné le livre.

Avant de conclure, y a-t-il un autre sujet que tu souhaites aborder ?

Ce qui me semble absolument fondamental, c'est qu'il faut croire dans ses idées, il ne faut pas se laisser décourager par ce qu'en disent les gens et vraiment, il faut persévérer quoi qu'il arrive. Il y aura des spécialistes qui diront « Non, c'est pas possible... », il ne faut pas les écouter. Il faut écouter ce qu'on a en soi et surtout, il faut se souvenir que le seul juge, c'est soi-même et personne d'autre. C'est d'ailleurs souvent le juge le plus sévère. Il ne faut pas que notre trajectoire soit dépendante de la sociologie du milieu.

Il y a un message important sur lequel je voudrais terminer. On va sans doute écrire un article ensemble avec Dixmier. Il s'agit d'un problème qu'il m'a posé lorsque je suis allé le voir pour son anniversaire des 98 ans. C'est un problème qui le taquine depuis 60 ans ! J'ai trouvé le démarrage dans le cas le plus simple et après avoir envoyé à Dixmier une lettre lui expliquant comment j'arrivais à commencer, il s'est mis à travailler 8 heures par jour, à 98 ans. . . Il m'a dit, « J'ai eu du mal à me remettre au boulot parce que ça faisait 20 ans que je n'avais pas fait de maths ». Sa santé l'a obligé à s'arrêter au bout d'un moment, mais je trouve ça fabuleux... Il a exactement l'esprit qu'il avait quand je l'ai connu, la même rigueur. Il a trouvé une idée importante après que j'ai commencé, une idée que je n'aurais jamais trouvée moi-même. J'ai pu ensuite aller plus loin avec l'aide d'un ordinateur, et je ne sais pas si j'arriverai à terminer, il faudrait discuter avec des géomètres algébristes et ça prendra un certain temps... Mais je veux absolument en parler parce que je trouve ce courage de Jacques absolument merveilleux. Ce n'est pas seulement qu'il a l'esprit alerte, non, il a retravaillé en trouvant des idées. Et son esprit est inchangé. Je ne vois aucune ride dans sa manière de faire... on a échangé des lettres comme on le faisait dans le temps.

Photo : Jean-François Dars

Alain Connes est né à Draguignan le 1er avril 1947. Après des classes préparatoires au Lycée Thiers de Marseille, il intègre l'École normale en 1966 et soutient sa thèse en 1973 sous la direction de Jacques Dixmier. Il a été stagiaire au CNRS (1970-1974), puis chercheur associé durant un an à Kingston (Canada), maître de conférences puis professeur à l'université Paris VI (1976-1980) et directeur de recherche au CNRS (1981-1984).
Il a été invité à l'IHÉS à partir de 1979 et professeur titulaire de la chaire « Analyse et Géométrie » au Collège de France à partir de 1984.
Animé d'une curiosité, d'un enthousiasme et d'une persévérance exceptionnels, il explore de nombreux aspects des mathématiques et de la physique théorique. Il a révolutionné les algèbres de von Neumann et a reçu la médaille Fields en 1982 pour ses travaux sur les algèbres d'opérateurs. Il est le père de la géométrie non commutative. Il a également offert des contributions significatives en physique théorique avec notamment ses travaux sur la renormalisation ou sur le modèle standard. Son attention s'est aussi portée sur la conjecture de Riemann en théorie des nombres ou la théorie des topos de Grothendieck en géométrie algébrique.
Alain Connes a reçu le prix Aimé Berthé (1975), le prix Peccot (1976), la médaille d'argent du CNRS (1977), le prix Ampère (1980), la Médaille Fields (1982), le prix Clay (2000), les prix Crafoord et Peano (2001), et la médaille d'or du CNRS (2004).