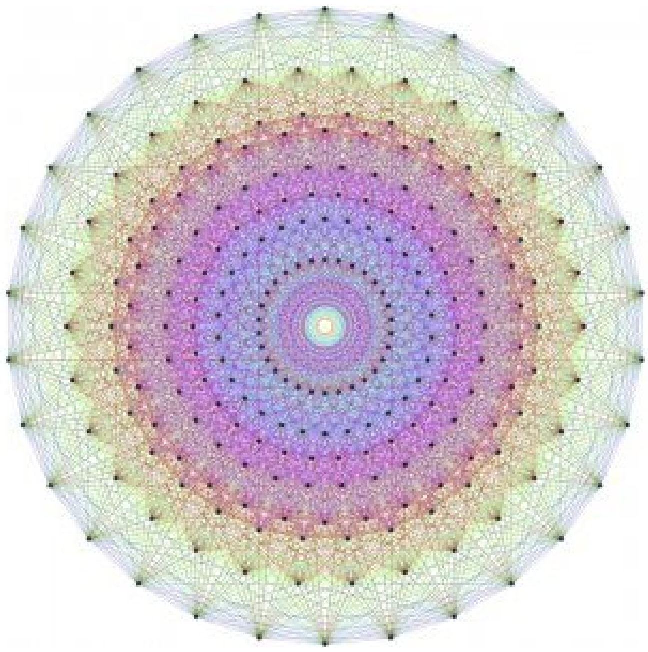
22 juillet 2014 **0 commentaire — commenter cet article**

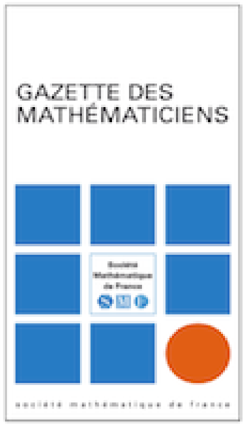
Echos de la recherche

Polynômes, représentations et systèmes quantiques

David Hernandez



Article en partenariat avec



IdM en partenariat avec la Société Mathématique de France (SMF) et son journal la Gazette des mathématiciens, donne la parole à des lauréats des grands prix de l'Académie des Sciences.

Deux textes sur le même sujet sont publiés conjointement par l'auteur, l'un à la gazette des mathématiciens, l'autre sur IdM. Aujourd'hui, « Polynômes, représentations et systèmes quantiques » par David Hernandez.

La structure du spectre d'un système quantique est essentielle à sa compréhension. Dans un article daté de 1971, Baxter l'a calculé dans le cas particulier du modèle « de la glace ». Il a montré qu'il a une forme remarquable et régulière faisant intervenir des polynômes. Dans les années 1980-1990, il a été conjecturé que de tels polynômes permettent de décrire le spectre de nombreux systèmes quantiques plus généraux. Nous allons voir comment, en adoptant le point de vue mathématique de la théorie des représentations, ces polynômes (de Baxter) apparaissent naturellement. Ce résultat nous a permis de démontrer en 2013 la conjecture générale.

A l'échelle du monde réel, les objets sont constitués d'un grand nombre de particules. Par exemple un glaçon comporte plus de molécules d'eau qu'il n'y a d'étoiles observables dans notre univers. Pour en expliquer le comportement, il faut considérer des caractéristiques microscopiques (quantiques), à l'échelle des molécules et des atomes, et comprendre l'interaction entre ces particules pour comprendre la structure de tout le système. L'interaction microscopique entre les molécules d'eau permet ainsi de décrire la structure macroscopique d'un système comme un cristal de glace. C'est l'objet de la physique statistique (quantique).

Fig. 1. De la glace.

En « additionnant » les contributions de toutes les particules, on définit la **fonction de partition**. L'étude de cette fonction donne des informations macroscopiques sur notre glaçon. Des enfants qui jouent dans une cour d'école font chacun un peu de bruit : quand on additionne tous ces bruits, on obtient le bruit total de la cour d'école, qui en est une caractéristique (et qui est très élevé !).

La fonction de partition est souvent impossible à calculer. Le but de cet article est d'expliquer que, même si on ne peut pas la calculer explicitement, les mathématiques peuvent permettre par des arguments abstraits (la théorie des représentations) de dégager des propriétés de régularité sur la structure de la fonction de partition (par exemple qu'elle fait intervenir des polynômes).

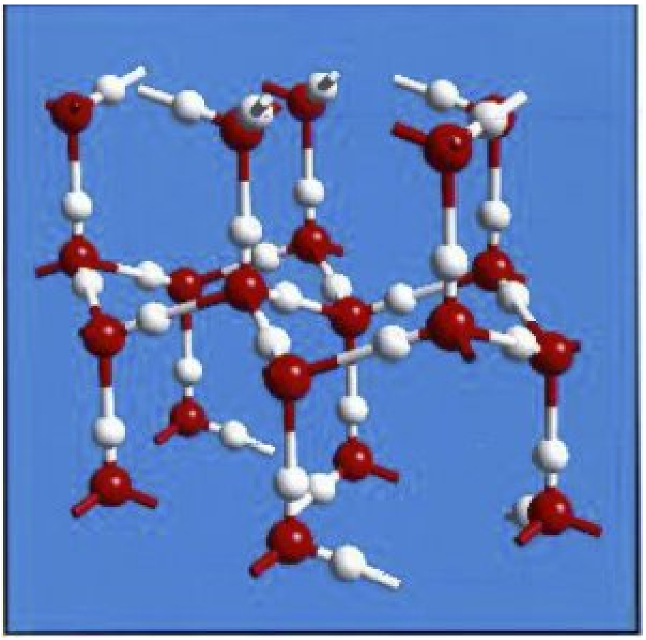


Fig. 2. Molécules d'eau.

Systèmes intégrables quantiques

La **physique statistique** vise à étudier le comportement et l'évolution de systèmes formés de constituants microscopiques, souvent en grands nombres. Le **modèle à 6 sommets** est un célèbre modèle de physique statistique introduit par Pauling en 1935, qui permet notamment de décrire le cristal de la glace (voir [B]). Il fait intervenir un réseau (ensemble de sommets reliés par des arêtes) dont chaque sommet est relié à 4 autres sommets. Un état du système étudié est une orientation des arêtes telle qu'à chaque sommet arrivent exactement 2 flèches (Figure 3). Les flèches représentent l'orientation des molécules d'eau du cristal les unes par rapport aux autres (Figure 2), notamment la position des deux atomes d'hydrogène d'une molécule relativement à l'atome d'oxygène des molécules voisines.

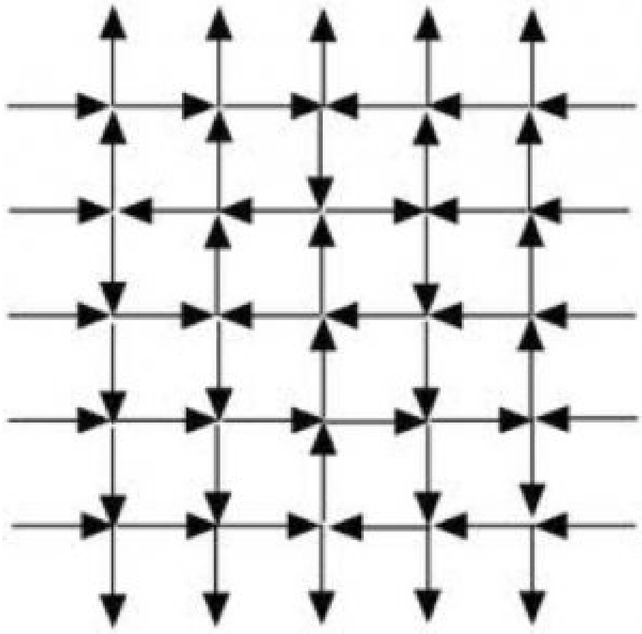


Fig. 3. Une orientation d'un réseau (modèle à 6 sommets).

Il y a 6 configurations possibles à chaque sommet (Figure 4), ce qui justifie l'appellation de ce modèle.

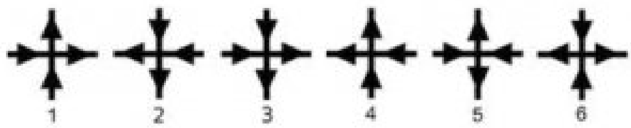


Fig. 4. 6 configurations possibles à chaque sommet.

L'étude du modèle de la glace est fortement liée à celle d'un autre modèle, cette fois-ci en **physique statistique quantique** (qui prend donc en compte le comportement quantique des constituants microscopiques), appelé **modèle** XXZ de Spin $1/2$, dit de Heisenberg quantique (1928). Il modélise des chaînes de moments (ou spins) magnétiques (quantiques) ayant deux états classiques, haut ou bas (Figure 5). Il s'agit d'une variante en physique quantique du modèle d'Ising (1925) (qui modélise des moments magnétiques permettant de mesurer l'intensité d'une source magnétique, voir [**C**] et [**JM**]).

Fig. 5. Etats d'un Spin 1/2 (haut ou bas).

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle XXZ, figurent parmi les plus étudiés en physiques statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches. En dépit de leur formulation assez élémentaire, ils sont extrêmement riches et leur analyse a une très longue histoire depuis leur introduction dans les années 1920 et 1930.

En physique statistique, le comportement du système est contrôlé par la f**onction de partition** $\mathcal{Z}$. Elle s'exprime comme une somme

$$\mathcal{Z} = \sum_j \exp(-E_j/(k_B T))$$

sur tous les états j du système, où E_j est l'énergie de l'état j, T est la température du système et k_B est la constante de la physique définie par Boltzmann.

Fig 6. Ludwig Boltzmann (1844 - 1906).

La fonction de partition permet d'obtenir les grandeurs mesurables du système. Une grandeur mesurable Q est obtenue comme moyenne pondérée sur les états $\frac{\sum_j \exp(-E_j/(k_B T)) Q_j}{\mathcal{Z}}$ des valeurs Q_j sur chaque état j.

La fonction $\mathcal{Z}$ est très difficile à calculer en général. La méthode de la **matrice de transfert** est un procédé pour tenter de la déterminer explicitement : elle produit un ensemble de nombres complexes $\{\lambda_j\}_j$ appelé **spectre du système quantique** (voir [V]) et vérifiant

$$\mathcal{Z} = \sum_j \lambda_j^M .$$

Ici M est un entier associé à la taille du réseau du modèle.

Inspiré notamment par les travaux de Bethe (1931), Baxter [B1] a résolu en 1971 ce problème [1].

Fig. 7. Rodney Baxter (1940 -).

Grâce à une étude très précise il a notamment montré que les éléments du spectre λ_j ont une structure tout à fait remarquable : elles s'expriment sous la forme (relation 1)

$$\lambda_j = A(z)\,\frac{Q_j(zq^2)}{Q_j(z)} + D(z)\,\frac{Q_j(zq^{-2})}{Q_j(z)}$$

où $z, q \in \mathbb{C}^*$ sont des paramètres du modèle (respectivement spectral et quantique), $A(z)$ et $D(z)$ sont des fonctions « universelles » (au sens où elles ne dépendent pas de λ_j). La fonction $Q_j(z)$ dépend de λ_j, mais c'est un polynôme.

La dépendance de la fonction de partition en les paramètres z et q est importante d'un point de vue physique car elle rend compte du comportement du système quantique relativement à certaines grandeurs, notamment la température.

Par exemple, dans le cas le plus simple issu du modèle XXZ on obtient le polynôme

$$Q_1(z) = 1 - z(1+q+q^2)$$

et la valeur propre

$$\lambda_1 = A(z)\,\frac{(1-z(q^2+q^3+q^4))}{(1-z(1+q+q^2))} + D(z)\,\frac{1-z(1+q^{-1}+q^{-2})}{1-z(1+q+q^2)}\,.$$

La relation 1 est la **relation de Baxter** (ou « relation TQ de Baxter »). Les polynômes Q_j sont appelés **polynômes de Baxter**.

En résultent alors naturellement les questions suivantes :

- Y a-t-il une explication pour l'existence de la relation de Baxter ?
- Une expression analogue avec des polynômes permet-elle de décrire le spectre d'autres systèmes quantiques ?

Une conjecture formulée en 1998 par Frenkel et Reshetikhin [FR] affirme que la deuxième question doit avoir une réponse positive. Comme on ne peut espérer effectuer en général le calcul détaillé de Baxter qui est connu pour le modèle XXZ, c'est en répondant à la première question que nous pouvons démontrer cette conjecture. Pour ce faire, étudions les structures mathématiques algébriques sous-jacentes à la théorie.

Les groupes quantiques et leurs représentations

Les **groupes quantiques** sont graduellement apparus au cours des années 1970, en particulier dans les travaux de l'école de Leningrad de physique-mathématique, comme le cadre mathématique naturel pour étudier les matrices de transfert. Drinfeld et Jimbo ont indépendamment découvert une formulation algébrique uniforme [2]. En particulier les groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo sont des **algèbres**, munies donc d'une addition et d'un produit. Ils dépendent du paramètre quantique

$$q = \exp(h) \in \mathbb{C}^*,$$

où h est un analogue de la grandeur physique appelée constante de Planck (q sera bien identifié au paramètre quantique de la relation 1. On retrouve les structures classiques pour $h \to 0$, donc $q \to 1$. Par exemple, contrairement aux corps des réels ou des complexes, un groupe quantique est une algèbre non-commutative, c'est-à-dire que pour des éléments a, b de cette algèbre, le produit $a \times b$ est différent de $b \times a$ en général. Il y a par exemple des produits de la forme

$$K \times E = q^2 E \times K$$

qui à la limite $q = 1$ deviennent le produit classique commutatif $K \times E = E \times K$.

Une famille de groupes quantiques, appelés **algèbres affines quantiques** $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, est particulièrement remarquable. En effet $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ possède de plus une R**-matrice universelle**, c'est-à-dire une solution de l'**équation de Yang-Baxter quantique** :

$$\mathcal{R}_{12}(z)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{23}(w) = \mathcal{R}_{23}(w)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{12}(z).$$

Les paramètres formels z et w sont appelés **paramètres spectraux**. Il s'agit d'une équation hautement non triviale, liée aux mouvements de tresses qui constituent en fait l'origine de sa formulation. Sans détailler la définition des termes de l'équation, une manière de la comprendre est décrite dans la figure 8 : on retrouve l'équation en lisant de bas en haut et en multipliant par un facteur $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ d'indice (α, β) lorsque le brin α croise le brin β.

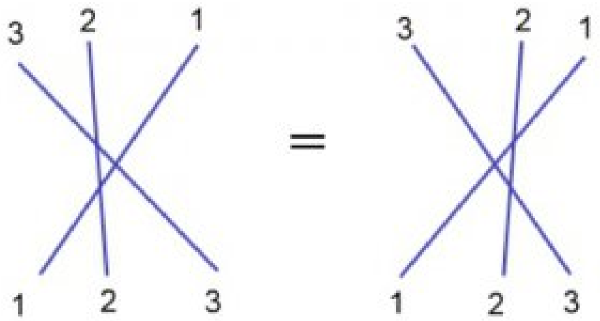


Fig. 8. Equation de Yang-Baxter

Pour décrire des solutions de l'équation de Yang-Baxter quantique, on peut spécialiser sur des **représentations** de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Il s'agit d'espaces de diverses dimensions ayant des propriétés de symétrie encodées par $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

L'étude des représentations est un vaste domaine, central en mathématiques, appelé **théorie des représentations**. Par exemple, le cercle possède de multiples symétries, notamment toutes les rotations qui le préserve : le plan est une représentation (du groupe) des rotations qui permet d'étudier la géométrie du cercle. En arithmétique, les représentations de groupes de Galois jouent un rôle crucial. Elles sont également essentielles dans la formulation même des principes de la physique quantique car ils font intervenir des représentations de l'algèbre des observables.

Pour une représentation V donnée, on obtient une solution de l'équation de Yang-Baxter quantique, dite R-**matrice**, construite à partir de la R-matrice universelle et notée $\mathcal{R}_{V,V}(z)$. Par exemple, dans le cas du modèle XXZ, l'algèbre affine quantique possède une représentation appelée **représentation fondamentale**. C'est un espace de dimension 2 (comme le plan) qu'on notera V_1. Elle produit la R-matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & \dfrac{q^{-2}-1}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{z(1-q^{-2})}{z-q^{-2}} & \dfrac{q^{-1}(1-z)}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est la R-matrice associée au modèle XXZ. Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre affine quantique ou la représentation V. Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

La **matrice de transfert** $\mathcal{T}_V(z)$ peut être produite à partir de la R-matrice universelle et d'une représentation V. Dans le cas particulier du modèle XXZ, $\mathcal{T}_{V_1}(z)$ est bien la matrice de transfert de Baxter. Les résultats de Baxter donnent donc la structure du spectre de $\mathcal{T}_{V_1}(z)$.

Que dire en général ?

La conjecture du spectre quantique

En 1998 [**FR**], E. Frenkel et N. Reshetikhin ont proposé une nouvelle approche dans le but de généraliser les formules de Baxter (relation 1). À cette fin, ils ont introduit le **q-caractère** $\chi_q(V)$ d'une représentation V de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Il s'agit d'un polynôme à coefficients entiers en des indéterminées $Y_{i,a}, Y_{i,a}^{-1}$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $1 \leq i \leq n$, avec n un entier. Les coefficients de $\chi_q(V)$ sont en fait positifs et leur somme est la dimension V. Par exemple, pour $\mathfrak{g} = sl_2$ et $V = V_1$ la représentation fondamentale de dimension 2, le q-caractère est (relation 2)

$$\chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1}$$

La **conjecture du spectre quantique** de Frenkel et Reshetikhin [**FR**] prédit que *pour une représentation de dimension finie donnée V, les éléments du spectre λ_j de $\mathcal{T}_V(z)$ sont obtenues de la manière suivante [3] : dans le q-caractère $\chi_q(V)$ de V, on remplace chaque variable formelle $Y_{i,a}$ par*

$$F_i(az)q^{\deg(Q_{i,j})} \, \frac{Q_{i,j}(zaq^{-1})}{Q_{i,j}(zaq)},$$

où $F_i(z)$ est une fonction universelle, au sens où elle ne dépend pas de la valeur propre λ_j, et $Q_{i,j}(z)$ dépend de la valeur propre λ_j mais est un polynôme.

Dans le cas particulier du modèle XXZ, on obtient à partir de la relation 2 la formule

$$\lambda_j = F_1(zq^{-1})q^{\deg(Q_{1,j})} \, \frac{Q_{1,j}(zq^{-2})}{Q_{1,j}(z)} + (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})} \, \frac{Q_{1,j}(zq^2)}{Q_{1,j}(z)}.$$

Ainsi, la conjecture est bien compatible avec la formule de Baxter (relation 1) en identifiant

$$A(z) = (D(zq^2))^{-1} = (F_1(zq))^{-1}q^{-\deg(Q_{1,j})}.$$

En général la formule peut avoir plus de deux termes. En effet les représentations V de dimension finie peuvent avoir une dimension « très grande ». Par exemple, H. Nakajima a obtenu (à l'aide d'un super-calculateur) que dans le cas de l'algèbre de Lie exceptionnelle de type E_8, une des représentations fondamentales a un q-caractère avec 6899079264 monômes qui nécessite un fichier de taille mémoire 180 Go pour être écrit.

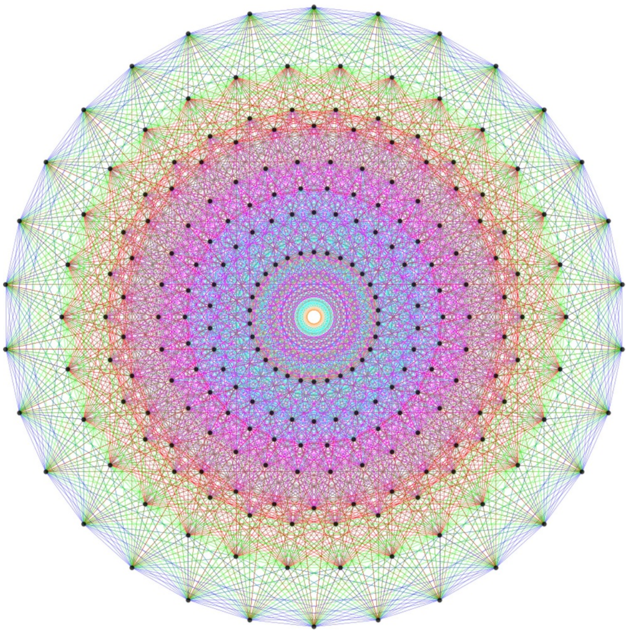


Fig. 9. L'algèbre de Lie E_8 (en fait une image de son « système de racines »).

Il y a donc autant de termes dans la formule de Baxter correspondante. Et les représentations fondamentales sont les représentations de dimensions les plus basses.

Il est donc hors de question d'aborder cette conjecture par un calcul explicite en général. D'ailleurs, même si les représentations simples de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ ont été intensivement étudiées ces vingt-cinq dernières années, on ne connaît pas en général de formule pour leur q-caractère, ni même en fait pour leur dimension. Il faut donc de nouvelles structures pour aborder la conjecture du spectre quantique.

Notre démonstration avec E. Frenkel [**FH**] de la conjecture du spectre quantique repose ainsi sur de nouveaux ingrédients. L'idée générale de la preuve est d'interpréter les polynômes Q_i eux-mêmes comme des éléments d'un spectre de nouvelles matrices de transfert, construites non pas à partir de représentations de dimension finie V, mais de représentations de dimension infinie dite **représentations préfondamentales** que nous avions construites préalablement avec M. Jimbo [**HJ**].

Références

[B] **R.J. Baxter**, *Exactly solved models in statistical mechanics,* Academic Press Inc., London (1982).

[C] **R. Cerf** ***Le modèle d'Ising et la coexistence des phases***,

[FH] **E. Frenkel et D. Hernandez**, *Baxter's Relations and Spectra of Quantum Integrable Models*, Prépublication arXiv:1308.3444

[FR] **E. Frenkel et N. Reshetikhin**, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-Algebras, in Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics*, Contemp. Math. **248** (1999), 163—205.

[H] **D. Hernandez**, *Spectre des systèmes intégrables quantiques et représentations linéaires*, Gazette des Mathématiciens (2014).

[HJ] **D. Hernandez et M. Jimbo**, *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions*, Compos. Math. **148** (2012), no. 5, 1593—1623.

[JM] **M. Jimbo et T. Miwa**, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **85**, American Mathematical Society (1995).

[VN] **S. Vu Ngoc**, *Spectre*, Images des Mathématiques, CNRS, 2013.

P.S. :

Je souhaite adresser mes remerciements à E. Ghys pour m'avoir encouragé à écrire cet article, à E. Frenkel et M. Jimbo pour notre collaboration et enfin à J. Dumont, A. Mézard, P. Zinn-Justin et l'équipe d'Images de Mathématiques pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce texte. Merci également aux relecteurs Thomas Sauvaget et Bruno Duchesne.

Notes

[**1**] Baxter a introduit la méthode puissante des « Q-opérateurs » qui lui a également permis de résoudre le modèle « à 8 sommets », plus complexe. Le modèle à 6 sommets avait aussi été résolu par d'autres méthodes, notamment dans les travaux de Lieb et Sutherland (1967).

[**2**] Il s'agit d'un des résultats cités pour la médaille Fields de Drinfeld en 1990.

[**3**] On étudie les valeurs propres sur un certain espace des états de dimension finie.

Affiliation de l'auteur

David Hernandez : Université Paris-Diderot Paris 7, Sorbonne Paris Cité, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, CNRS UMR 7586

Pour citer cet article : **David Hernandez**, « **Polynômes, représentations et systèmes quantiques** » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2014.

En ligne, URL : **`http://images.math.cnrs.fr/Polynomes-representations-et.html`**