1M0025 : Homéomorphismes de $\mathbb{R}$ et du cercle

E. Falbel

1 Homéomorphismes de $\mathbb{R}$

On commence avec une définition :

Définition 1.1 *Un homéomorhisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et continue avec réciproque $F^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.*

On montrera dans la suite qu'il suffit de demander que la fonction bijective soit continue. La réciproque sera automatiquement continue. Donc, pour les exemples suivants, il suffit de vérifier l'injectivité, la surjectivité et la continuité de la fonction.

Exemple 1.2 *Les fonctions affines : $F(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des homéomorphismes.*

Exemple 1.3 *$F(x) = x$ si $x < 0$ et $F(x) = 2x$ si $x \geq 0$ est un homéomorphisme.*

Proposition 1.4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est injective et continue si et seulement si F est strictement monotone et continue.*

Démonstration :

1. Supposons que la fonction F est strictement monotone. Alors elle est clairement injective.

2. Supposons que F est injective et continue et qu'elle n'est pas monotone : Il existe trois points x, y, z avec $x < y < z$ et tels que $F(x) < F(y)$ et $F(y) > F(z)$ (si $F(x) > F(y)$ et $F(y) < F(z)$ l'argument est analogue). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe des points w_1, w_2 tels que $x < w_1 < y$, $y < w_2 < z$ et qui ont la même image. Contradiction.

$\square$

Exercice 1.5 *Construire des exemples : Des fonctions strictement monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non surjectives. Des fonctions injectives ou bijectives mais pas strictement monotones. Des fonctions continues injectives définies sur l'union de deux intervalles qui ne sont pas strictement monotones.*

La proposition suivante ne dépend pas de la continuité.

Proposition 1.6 *Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux sous-ensembles. La réciproque d'une fonction $F : I \to J$ bijective strictement croissante (décroissante) est strictement croissante (décroissante).*

Démonstration : On suppose que F est croissante : $F(x_1) < F(x_2)$ si $x_1 < x_2$ (le cas décroissant est analogue). Par définition $F^{-1}(z) = w$ ssi $F(w) = z$. Donc si $z_1 < z_2$ alors $F^{-1}(z_1) = w_1$ et $F^{-1}(z_1) = w_2$ satisfont $F(w_1) = z_1$ et $F(w_2) = z_2$. Comme F est croissante, on en déduit que $w_1 < w_2$.

□

Proposition 1.7 *La fonction réciproque d'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et continue est continue.*

Démonstration : On sait que la fonction F est strictement monotone. On la supposera croissante dans la suite et, dans ce cas, F^{-1} est aussi croissante. Soit $F(x) = y$ et montrons la continuité de F^{-1} en y. Soit $\epsilon > 0$, alors $F(]x - \epsilon, x + \epsilon[) =]F(x - \epsilon), F(x + \epsilon)[$. On choisit alors $\delta > 0$ tel que $]y - \delta, y + \delta[\subset]F(x - \epsilon), F(x + \epsilon)[$. Alors $F^{-1}(]y - \delta, y + \delta[) \subset]x - \epsilon, x + \epsilon[$. Le cas où F est décroissante est traité de forme similaire.

□

Remarque 1.8 *La proposition est vraie aussi pour des fonctions bijectives continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, mais la démonstration est plus difficile.*

Si deux fonctions F_1 et F_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont bijectives, leur composée $F_2 \circ F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi une fonction bijective. La fonction $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a le rôle de l'élément neutre pour la composition : $F \circ Id = F = Id \circ F$ pour toute bijection. L'ensemble de toutes les bijections forme un groupe :

Définition 1.9 *Un ensemble G munit d'une opération $(g, h) \to g \circ h$ est un groupe si*

1. *Il existe un élément neutre, noté e, tel que, pour tout $x \in G$, $g \circ e = e \circ g = g$.*
2. *Pour tout $g \in G$ il existe un élément, noté g^{-1}, tel que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.*
3. *Pour tout $x, y, z \in G$, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.*

Exemple 1.10 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^*$.

Exemple 1.11 *L'ensemble de racines n-ièmes de l'unité est un groupe.*

Exemple 1.12 *Toutes les transformations affines (non-constantes) de* $\mathbb{R}$.

Définition 1.13 *On notera le groupe des homéomorphismes de* $\mathbb{R}$ *par* $Homeo(\mathbb{R})$. *L'ensemble des homéomorphismes croissants forme un groupe, noté* $Homeo^+(\mathbb{R})$.

Définition 1.14 *Un point fixe d'une application* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est un point* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) = x$.

Exercice 1.15 *Quels sont les points fixes d'une application affine?*

2 Homéomorphismes du cercle

Le cercle, S^1, peut être vu comme l'intervalle $[0, 1]$ dans lequel les deux extremités sont identifiées. Autrement dit : la fonction qui associe à chaque point $x \in [0, 1]$ le point sur le cercle d'angle $2\pi x$ est une bijection de l'intervalle $[0, 1[$ sur le cercle. Observer que l'image des deux points 0 et 1 coincide.

On peut voir le cercle aussi comme $\mathbb{R}$ où on identifie tous les points dont la difference est dans $\mathbb{Z}$. En d'autre termes, on identifie tous les points $x+n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On écrit alors

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

et on dit que S^1 est le quotient de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$.

Une autre description du cercle S^1 utilise le plan $\mathbb{R}^2$: C'est l'ensemble

$$S^1 = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \ \}.$$

Si on identifie $\mathbb{R}^2$ avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$ correspond au nombre complexe $x + iy$), on peut écrire explicitement une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont l'image est S^1 :

$$p(x) = e^{2i\pi x}.$$

Un homéomorphisme du cercle est une transformation bijective et continue du cercle. Plus explicitement, on définit les homéomorphismes positifs (ou qui préserve l'orientation) :

Définition 2.1 *On considère* S^1 *comme l'intervalle* $[0, 1]$ *avec l'identification des deux extrémités. Une application* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *(on supposera que* $f(0) \in [0, 1[$*) est un homéomorphisme positif du cercle si :*

1. *Dans le cas* $f(0) = 0$ *alors* $f(1) = 1$ *et la fonction est continue et strictement croissante.*

2. *Si* $f(0) \neq 0$ *alors, il existe* $x_0 \in]0, 1[$ *tel que* $f(x_0) = 1$ *et* f *est continue et strictement croissante dans l'intervalle* $[0, x_0]$ *et dans l'intervalle* $]x_0, 1]$. *De plus,* $f(0) = f(1)$ *et* $\lim_{x \to x_0^+} = 0$.

On pensera une fonction du cercle dans le cercle comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui "passe au quotient" : Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit une transformation du cercle si $F(x+n) - F(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on vérifie que $p \circ F(x+n) = p \circ F(x)$.

Définition 2.2 *Un homéomorphisme $F \in Homeo^+(\mathbb{R})$ tel que $F(x+1) = F(x)+1$ est dit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui relève un homéomorphisme du cercle. On dira aussi que F est un homéomorphisme du cercle.*

Observer que, de la définition, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $F(x+n) = F(x)+n$. Par contre, $F^n(x+1) = F^n(x)+1$. Observer aussi que, si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme du cercle, pour chaque $l \in \mathbb{Z}$ fixé, la fonction $x \to F(x)+l$ est aussi un homéomorphisme du cercle. Les deux fonctions représentent la même fonction sur le cercle dans le sens où la fonction $e^{2i\pi x} \to e^{2i\pi F(x)}$ coincide avec la fonction $e^{2i\pi x} \to e^{2i\pi(F(x)+l)}$.

Exemple 2.3 *La fonction $x \to x+\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, est un homéomorphisme du cercle. Il correspond à une rotation du cercle d'angle $2\pi\theta$. Si $\theta \in \mathbb{Z}$ l'action sur le cercle coincide avec l'action de l'identité.*

Exemple 2.4 *La fonction $x \to 2x$ n'est pas un homéomorphisme du cercle : L'image de S^1 parcourt le cercle deux fois.*

Un résultat important mais qui ne sera pas démontré dans ce cours est le théorème du relèvement. Il justifie la définition d'homéomorphisme du cercle ci-dessus. Nous n'avons pas défini une fonction continue de S^1 dans S^1 mais, vu le théorème ci-dessous, il suffira de manipuler des fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $F(x+n) = F(x)+k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 2.5 *Si $f : S^1 \to S^1$ est une fonction continue, il existe une fonction (dite le relèvement de f) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ p(x) = p \circ F(x)$. Si G est un autre relèvement, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $G(x) = F(x)+k$.*

Définition 2.6 *Un point $z \in S^1$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ entier tel que $f^k(z) = z$ pour une fonction du cercle $f : S^1 \to S^1$ est dit un point périodique pour f. Le plus petit k est appelé la période de z. Un point fixe de f est un point périodique de période 1. Un point $z \in S^1$ est pré-périodique pour f s'il existe $k, l \in \mathbb{N}*$ tels que $f^k(z) = f^l(z)$.*

Définition 2.7 *Soit $f : S^1 \to S^1$ un homéomorphisme et $z \in S^1$. On appele orbite de z l'ensemble*

$$\{\ f^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\ \}.$$

Remarquer qu'un point est périodique pour un homéomorphisme $f : S^1 \to S^1$ si son orbite contient un nombre fini de points.

Exercice 2.8 *Si F est un relévé de f et $z \in S^1$ est un point périodique de période k, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = z$ on a $F^k(x) = x+n$ avec $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 2.9 *L'homéomorphisme* $x \to x+\theta$ *avec* $\theta = p/q$, $pgcd(p,q) = 1$, *correspond à un homéomorphisme* $f : S^1 \to S^1$ *dont tout point du cercle est périodique de période* q.

Exercice 2.10 *Soit* $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. *Montrer qu'il existe un nombre infini de points dans l'orbite d'un point* $z \in S^1$ *par l'application* $e^{2\pi i x} \to e^{2\pi i(x+\theta)}$. *Autrement dit, en indentifiant* S^1 *avec l'intervalle* $[0,1[$, *il existe un nombre infini des points de l'orbite dans cet intervalle.*

Exercice 2.11 *(Le groupe de Thompson) On considère les homéomorphismes positifs du cercle (vu comme* $[0,1]$ *avec extrémités identifiées) qui sont affines par morceaux avec points de coupure (les points de recollements) de la forme* $N/2^n$, $N, n \in \mathbb{N}$ *avec images de la forme* $M/2^m$, $M, m \in \mathbb{N}$ *et dont les pentes sont des puissances de* 2. *Montrer que cet ensemble, muni de l'opération composition, est un sous groupe de* $Homeo(S^1)$.

Exercice 2.12 *Montrer qu'un point pré-périodique pour un homéomorphisme du cercle est périodique.*

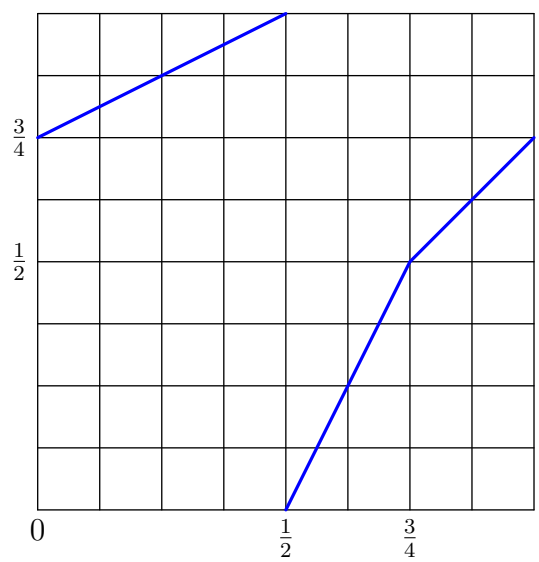

Figure 1: Le graphe d'un homéomorphisme du cercle.

2.1 Le groupe $SU(1,1)$

Exercice 2.13 *L'ensemble des matrices*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

de déterminant 1, i.e., $|a|^2 - |b|^2 = 1$ *est un groupe.*

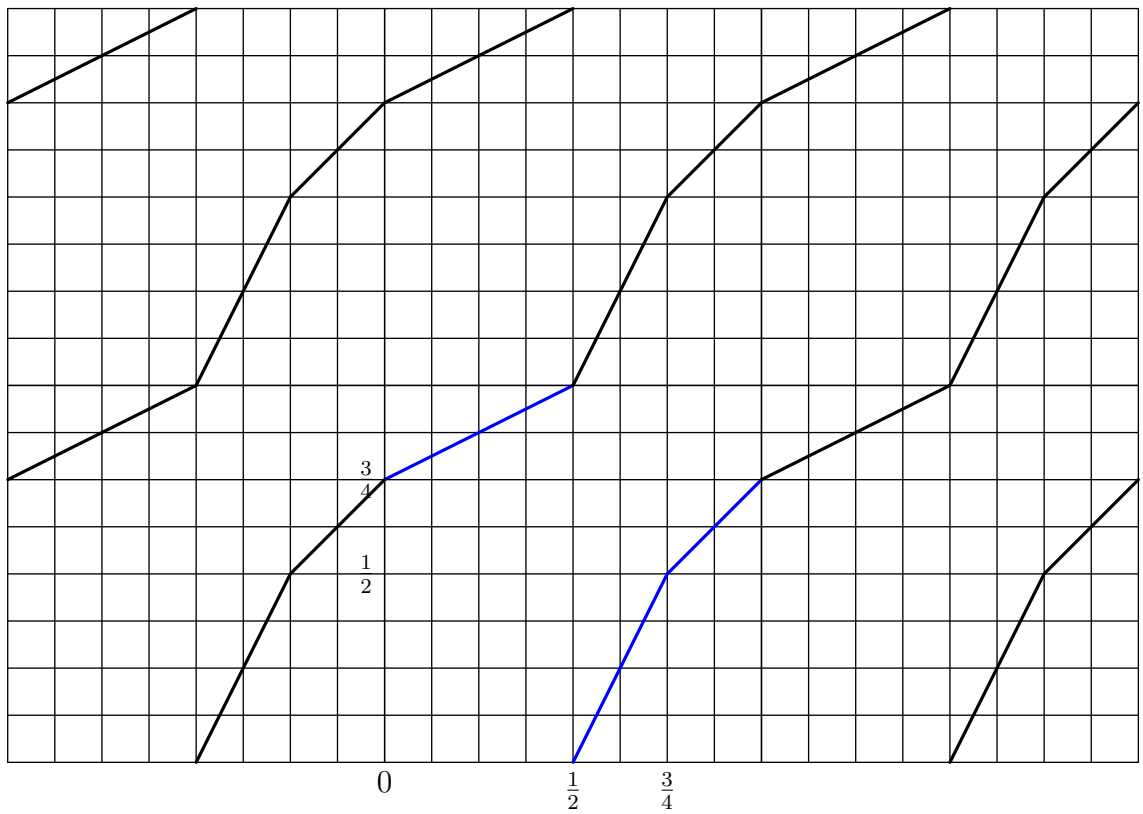

Figure 2: Graphes des relèvements de l'homéomorphisme.

Définition 2.14 *L'ensemble ci-dessus est nommé $SU(1,1)$.*

On considère le disque $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$ et on observe d'abord :
Un élément $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ correspond à une fonction $F_A : \Delta \to \Delta$:

$$F_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Exercice 2.15 *1. Si $z \in \Delta$ alors $F_A(z) \in \Delta$.*

2. $F_A : \Delta \to \Delta$ est une bijection.

3. L'application F_A préserve le cercle qui est le bord du disque Δ.

Exercice 2.16 *Si $A = \begin{pmatrix} e^{\pi i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\theta} \end{pmatrix}$ alors $F_A(z) = e^{2i\pi\theta}z$ est une rotation d'angle $2\pi\theta$.*

Exercice 2.17 *Si $A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\lambda^2 - \mu^2 = 1)$ alors $F_A(z) = \frac{\lambda z+\mu}{\mu z+\lambda}$ a deux points fixes au bord du disque. Comment les points du disque sont-ils déplacés par cette application?*

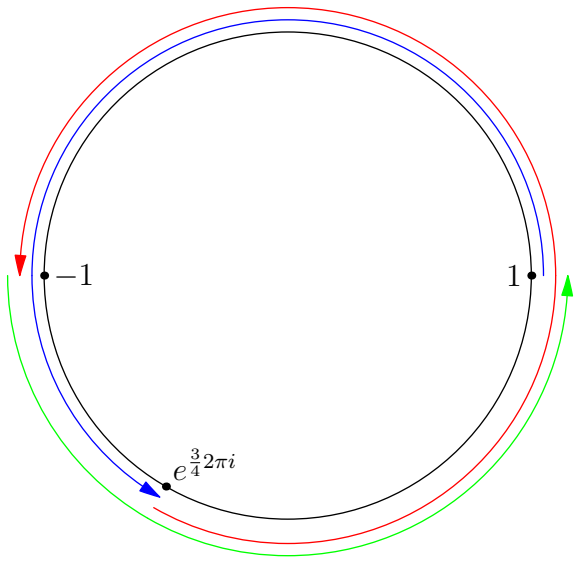

Figure 3: Le point 1 du cercle est un point périodique de période 3.

2.2 Le nombre de rotation

L'homéomorphisme $F(x) = x + \theta$ correspond à une rotation. En effet, $F(x) - x = \theta$ est le nombre de rotation (en fait $2\pi\theta$). Un homéomorphisme F du cercle qui n'est pas forcément une rotation peut, quitte à l'itérer beaucoup de fois, se comporter comme une rotation. On définit un nombre de rotation à chaque homéomorphisme en suivant Poincaré. La définition exploite la suite d'itérés $a_n = F^n(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ fixé. Cette suite de nombres réels a des propriétés particulières.

Définition 2.18 *1. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est additive si $a_{n+m} = a_n + a_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.*

2. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive si $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

3. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quasi sous-additive s'il existe une constante telle que $|a_{n+m} - a_n - a_m| \leq C$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.19 *Montrer que si $F(x) = x + \theta$ la suite $a_n = F^n(x)$ est additive pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 2.20 *Montrer que la suite $\sqrt{n}$ est sous-additive.*

Exercice 2.21 *Montrer que la suite $-n^2$ est sous-additive.*

Exercice 2.22 *Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est additive alors la suite a_n/n est constante.*

Exercice 2.23 *Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-additive alors $a_{kl} \leq ka_l$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}$.*

Pour préparer la définition du nombre de rotation, on montre d'abord :

Proposition 2.24 (lemme de Fekete) *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite sous-additive. Alors, la suite* a_n/n *tend vers* $\inf\{a_n/n\}$.

Démonstration : Soit $n \geq q > 0$ des nombres entiers. On a, par le théorème de la division euclidienne,

$$n = kq + r$$

avec $q > r \geq 0$ et $k \geq 1$. Par la propriété de sous-additivitée, on a

$$a_n \leq a_{kq} + a_r \leq ka_q + a_r.$$

On calcule alors

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k}{n}a_q + \frac{1}{n}a_r \leq \frac{a_q}{q} + \frac{a_r}{n} \leq \frac{a_q}{q} + \frac{1}{n}\max_{0\leq i\leq q-1}\{a_i\}.$$

Soit $L = \inf \frac{a_n}{n}$ et supposons $L \in \mathbb{R}$. Alors pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe q tel que $L \leq \frac{a_q}{q} < L + \epsilon$. Si $n > \max_{0\leq i\leq q-1}\{a_i\}/\epsilon$, on obtient

$$L \leq \frac{a_n}{n} \leq L + 2\epsilon.$$

Ceci montre que la suite a_n/n tend vers L. Si $L = -\infty$, on procède de forme analogue (exercice).

□

Noter que la limite peut être $-\infty$. Une variante du lemme de Fekete est ce dont nous avons besoin :

Proposition 2.25 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite quasi sous-additive. Alors, la suite* a_n/n *tend vers un nombre réel.*

Démonstration : On suppose que la suite satisfait

$$-C + a_n + a_m \leq a_{n+m} \leq C + a_n + a_m.$$

On observe que les suites $C + a_n$ et $C - a_n$ sont sous-additives (exercice). On applique le lemme de Fekete :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C + a_n}{n} = L < \infty$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C - a_n}{n} = -L < \infty.$$

Ceci implique que $L \in \mathbb{R}$. Aussi, remarquer que de $L \leq \frac{C+a_n}{n}$ et $-L \leq \frac{C-a_n}{n}$, on obtient que $nL - C \leq a_n \leq nL + C$. □

Proposition 2.26 *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme du cercle. Alors la limite*

$$\tau(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe et est indépendante de $x \in \mathbb{R}$. On dit que $\tau(F)$ est le nombre de rotation de F.

Démonstration : D'abord on observe que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$. Donc la limite, si elle existe, est la même pour $x + n$ où $n \in \mathbb{Z}$. Si $x < y < x + 1$ on a, en supposant F croissante,

$$\frac{F^n(x)}{n} < \frac{F^n(y)}{n} < \frac{F^n(x)+1}{n}.$$

Donc si la limite existe pour x, elle existe pour y et est la même. Ceci montre que si la limite existe pour un point $x \in \mathbb{R}$, elle existe et est égale pour tout autre point.

L'objectif maintenant est de montrer que $F^n(x) - x$ est quasi sous-additive. Pour le faire, on montre que $-2 \leq |F^n(x) - x| - |F^n(y) - y| \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x, y \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $x, y \in [0, 1[$ (car $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$) et que F est strictement crosissante. On observe alors que pour $x < y$, $F^n(y) - F^n(x) \leq F^n(x+1) - F^n(x) = F^n(x) + 1 - F^n(x) = 1$. En tout cas ($F$ monotone et $x, y \in [0, 1[$), $|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1$. On a

$$|F^n(x) - x| - |F^n(y) - y| \leq |F^n(x) - x - (F^n(y) - y)| \leq |F^n(x) - F^n(y)| + |y - x| \leq 2.$$

La borne inférieure par -2 est obtenue de forme similaire.

On peut alors conclure que la suite $F^n(x) - x$ est quasi sous-additive. En effet,

$$|(F^{n+m}(x) - x) - (F^n(x) - x) - (F^m(x) - x)| = |F^m(F^n(x)) - (F^n(x)) - (F^m(x) - x)| \leq 2.$$

La fin de la démonstration utilise le lemme de Fekete : on obtient que la suite $\frac{F^n(x)-x}{n}$ converge. □

Comme $F + k$ définit le même homéomorphisme du cercle et $\tau(F + k) = \tau(F) + k$, on peut considerer $\tau(F)$ défini dans $[0, 1[$.

Exercice 2.27 *Montrer que si F est un homéomorphisme du cercle, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\tau(F^m) = m\tau(F)$.*

Exercice 2.28 *Si F est un homéomorphisme du cercle avec un point fixe, montrer que $\tau(F) = 0$.*

Proposition 2.29 *F est un homéomorphisme positif du cercle avec $\tau(F) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si F a un point périodique.*

Démonstration : Supposons d'abord qu'il existe un point périodique, i.e., qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $F^m(x) = x + p$ pour un $p \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in N$:

$$F^{mk}(x) = x + kp$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F^{mk}(x)}{km} = \lim_{k\to\infty} \frac{x+kp}{km} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{km} + \lim_{k\to\infty} \frac{p}{m} = \frac{p}{m}.$$

Ceci montre que $\tau(F) = p/m \in \mathbb{Q}$.

Dans l'autre direction, supposons que le nombre de rotation appartienne aux rationnels : $\tau(F) = l/m \in \mathbb{Q}$. Comme $\tau(F^m) = m\tau(F)$, pour montrer que F est périodique, il suffit de montrer que si G est un homéomorphisme du cercle avec $\tau(G) \in \mathbb{N}$ alors il existe un point fixe de G. Quitte à choisir un autre translaté de G on peut supposer que $\tau(G) = 0$. Supposons, par absurde, qu'il n'y ait pas de points fixes de G. Alors soit $G(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou bien $G(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En modifiant G par une translation, on peut supposer que $G(x) > x$. Observer maintenant que l'ensemble $(G^k(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est borné par 1. En effet, si pour un n on a $G^n(0) > 1$ alors

$$G^{2n}(0) = G^n(G^n(0)) > G^n(1) = G^n(0+1) = G^n(0) + 1 > 2,$$

et plus généralement $G^{kn}(0) > k$. Mais alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{G^{kn}(0)}{kn} > \frac{1}{n}$$

une contradiction avec $\tau(G) = 0$. Maintenant, comme la suite $G^k(0)$ est croissante et bornée supérieurement par 1, elle converge : $\lim G^k(0) = x_0$. Mais alors $G(x_0) = x_0$, une contradiction.

□

Exercice 2.30 *Soit $f : S^1 \to S^1$ l'homéomorphisme de la Figure 2. Calculer son nombre de rotation en observant que le point $0 \in [0, 1[$ est périodique de période 3. Pour le relèvement de f tel que $F(0) = 3/4$, on obtient $F^3(0) = 2$, d'où $\tau(F) = 2/3$.*

2.3 Quand deux homéomorphismes du cercle sont-ils conjugués?

La conjugation entre homéomorphismes du cercle implique que leur comportement est essentiellement le même. La question centrale de l'étude des homéomorphisme est de savoir quand deux homéomorphismes sont conjugués et elle s'avère être très difficile. D'abord la définition :

Définition 2.31 *Deux homéomorphismes du cercle F_1 et F_2 sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme H tel que $F_2 = H \circ F_1 \circ H^{-1}$.*

Proposition 2.32 *Si F_1 et F_2 sont deux homéomorphisme positifs du cercle topologiquement conjugués par un homéomorphisme positif alors $\tau(F_1) = \tau(F_2)$.*

Démonstration : On veut montrer que F_1 et $H \circ F_1 \circ H^{-1}$ (pour H un homéomorphisme du cercle) ont le même nombre de rotation.

Observer que $H(x) - x$ est périodique de période 1. Donc le maximum de la fonction $|H(x) - x|$ est atteint sur l'intervalle $[0, 1[$. On supposera donc que $|H(x) - x| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Observer d'abord que $(H \circ F_1 \circ H^{-1})^n = H \circ F_1^n \circ H^{-1}$. Alors :

$$|(H \circ F_1 \circ H^{-1})^n(0) - F_1^n \circ H^{-1}(0)| = |H \circ F_1^n \circ H^{-1}(0) - F_1^n \circ H^{-1}(0)| \leq M.$$

Ceci implique que les nombres de rotation sont égaux.

□

La réciproque de cette proposition est fausse! En effet, pour une rotation d'angle $2\pi\alpha$ avec α rationnel, tout point est périodique. Mais il existe des homéomorphismes du cercle avec des points périodiques et d'autres qui ne le sont pas.

Exercice 2.33 *Construire des homéomorphismes avec nombre de rotation rationnel mais qui ne sont pas conjugués à une rotation.*

Exercice 2.34 *Montrer que si $f : S^1 \to S^1$ a un point périodique de période m, tout autre point périodique a la même période.*

Quand le nombre de rotation est irrationnel on peut montrer que l'homéomorphisme est conjugué à une rotation dans certains cas. La propriété la plus importante qu'une rotation irrationnelle possède est que toute orbite est dense :

Définition 2.35 *Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}$ est dense si, pour tout intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$, $\Lambda \cap]a, b[\neq \emptyset$.*

Exercice 2.36 *Montrer que si $\omega \notin \mathbb{Q}$ alors l'ensemble $\Lambda = \{ n\omega + m \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$ est dense. Indication : montrer d'abord que si Λ n'est pas dense il existe un voisinage de $0 \in \Lambda$ avec aucun autre point de Λ. Ensuite, définir le minimum de $\Lambda \cap]0, +\infty[$ et montrer que cet élément engendre Λ. Ceci impliquera que ω est rationnel.*

On suppose maintenant que le nombre de rotation ω d'un (relévé d'un) homéomorphisme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du cercle est irrationnel. On définit un ensemble, le relévé d'une orbite dans le cercle :

$$\Lambda_F(x_0) = \{ F^n(x_0) + m \mid n, m \in \mathbb{Z} \}.$$

On voudra le comparer avec l'ensemble correspondant dans le cas où F était une rotation (il est dense par l'exercice précédent) :

$$\Lambda = \{ n\omega + m \mid n, m \in \mathbb{Z} \}.$$

Le lemme suivant fourni cette comparaison :

Lemma 2.37 *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un relevé d'un homéomorphisme positif du cercle de nombre de rotation $\omega \notin \mathbb{Q}$. Alors, l'application $T : \Lambda_F(x_0) \to \Lambda$ définie par*

$$T(F^n(x_0) + m) = n\omega + m$$

est une bijection strictement croissante.

Démonstration : D'abord, puisque F n'a pas des points périodiques, T est une bijection (exercice). Le point important est que T préserve l'ordre : Supposons, par contradiction, que ce n'est pas le cas. Alors il existe $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$F^{n_1}(x_0) + m_1 < F^{n_2}(x_0) + m_2$$

mais

$$n_1\omega + m_1 \geq n_2\omega + m_2.$$

Observer qu'on doit avoir $n_1 \neq n_2$ sinon cela n'est pas possible. Supposons que $n_1 > n_2$ (le cas $n_1 < n_2$ est analogue : exercice) On obtient alors que

$$\omega \geq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Mais, d'autre part, de $F^{n_1}(x_0) + m_1 < F^{n_2}(x_0) + m_2$, on obtient (en appliquant F^{-n_2} à l'inégalité) $F^{n_1-n_2}(x_0) - x_0 < m_2 - m_1$. Alors,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(x_0) - x_0}{k(n_1 - n_2)} = \omega \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

On conclut que ω est rationnel, une contradiction. □

Maintenant il y a deux cas possibles pour un homéomorphisme avec un nombre de rotation irrationnel. Si jamais $\Lambda_F(x_0)$ n'est pas dense alors F n'est pas conjugué à la rotation par ω (exercice). L'autre cas est bon :

Théorème 2.38 (Théorème de Poincaré) *Un homéomorphisme du cercle $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec nombre de rotation irrationnel et avec une orbite dense est conjugué à une rotation.*

Démonstration : On construit $T : \Lambda_F(x_0) \to \Lambda$ comme dans le lemme précédent. Il existe un homéomorphisme $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $H_{|\Lambda_F(x_0)} = T$. En effet, on définit H par $H(x) = sup\{\ T(y) \mid y \in \Lambda_F(x_0), y < x\ \}$ (exercice : montrer que H est continue).

Comme T satisfait $T(F^n(x_0) + m + 1) = n\omega + m + 1$, par continuité $H(x + 1) = H(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussi, par continuité, $H(F(x)) = \omega + H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci peut être écrit comme $H \circ F = R_\omega \circ H$.

□

Poincaré ne connaissait pas un critère simple garantissant que les orbites soient denses. Une avancée dans ce problème a été faite par Denjoy (1932). On énonce son résultat :

Théorème 2.39 *Un homéomorphisme $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du cercle de classe C^2 avec nombre de rotation irrationnel est conjugué à une rotation.*

2.4 Une famille d'homéomorphismes

Dans cette section on considère la famille d'homéomorphismes du cercle, dépendante de ω et ϵ, $F_{\omega,\epsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F_{\omega,\epsilon}(x) = x + \omega + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin 2\pi x.$$

Pour chaque ω fixé, la famille représente une déformation (paramétrée par ϵ avec $0 \leq \epsilon \leq 1$) de la rotation d'angle $2\pi\omega$. Observer que si $\epsilon > 1$ la fonction est continue mais elle n'est plus un homéomorphisme.

La variation du nombre de rotation dans la famille $F_{\omega,\epsilon}$ pour un ϵ fixé a des propriétés importantes. En général, on demontre que le nombre de rotation varie continuement si on change continuement l'homéomorphisme. L'exercice suivant est donc un cas très particulier de ce résultat qu'on ne démontrera pas.

Exercice 2.40 *Montrer que le nombre de rotation de $F_{\omega,\epsilon}$ varie continuement avec le paramètre ω.*

Si $\omega_1 > \omega_2$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{\omega_1,\epsilon}(x) > F_{\omega_2,\epsilon}(x)$. D'où, $F^n_{\omega_1,\epsilon}(x) > F^n_{\omega_2,\epsilon}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on conclut que $\tau(F_{\omega_1,\epsilon}) \geq \tau(F_{\omega_2,\epsilon})$. La fonction $\tau(F_{\omega,\epsilon})$ est donc continue et croissante dans la variable ω. Mais elle n'est pas strictement croissante! En effet, le nombre de rotation est constant sur un nombre infini d'intervalles.

Exercice 2.41 *Montrer que $\tau(F_{0,\epsilon}) = 0$.*

Exercice 2.42 *Montrer que $\tau(F_{\omega,\epsilon}) = 0$ si $0 \leq \omega < \frac{\epsilon}{2\pi}$.*

Proposition 2.43 *Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tau(F_{\omega_0,\epsilon}) = p/q \in \mathbb{Q}$. Alors il existe un intervalle contenant ω_0 tel que, pour tout ω dans cet intervalle, $\tau(F_{\omega,\epsilon}) = p/q$.*

Démonstration : Comme $\tau(F_{\omega_0,\epsilon}) = p/q \in \mathbb{Q}$, il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ périodique :

$$F^q_{\omega_0,\epsilon}(x_0) = x_0 + p.$$

On montre ensuite que, pour ω dans un intervalle contenant ω_0, il existe aussi un point p/q-périodique pour $F_{\omega,\epsilon}$. On fait la démonstration seulement dans un cas particulier : on suppose que $\frac{d}{dx}F^q_{\omega_0,\epsilon}(x_0) \neq 1$. La fonction $F^q_{\omega_0,\epsilon}(x) - x - p$ admet alors une dérivée non-nulle en x_0. On invoque alors le théorème des fonctions implicites (énoncé ci-dessous) pour conclure que pour chaque ω proche de ω_0 il existe un x proche de x_0 tels que $F^q_{\omega_0,\epsilon}(x) - x - p = 0$, c'est-à-dire que x est un point p/q-périodique.

□

Théorème 2.44 *Soit $G(x, y)$ une fonction de deux variables avec toutes les dérivées partielles continues au voisinage du point (x_0, y_0). On suppose que $\frac{\partial}{\partial y}G(x_0, y_0) \neq 0$. Alors, il existe un intervalle I contenant x_0 et une fonction dérivable $\varphi : I \to \mathbb{R}$, avec $\varphi(x_0) = y_0$, telle que pour tout $x \in I$, $G(x, \varphi(x)) = G(x_0, y_0)$.*