TD 3 : Variétés localement homogènes

Raphaël ALEXANDRE et Elisha FALBEL

Vendredi 10 février 2022

EXERCICE 1

Soit $P \to M$ une géométrie de Cartan de connexion ω.

(1) Par intégration de l'équation de structure, définir D_ω qui à un chemin de P associe un chemin de G.

(2) Identifier $\widetilde{M}$ le revêtement universel de M à l'espace des chemins pointés à homotopie près de M.

(3) Soit $\delta\colon [0,1] \to M$ un chemin. Construire un relevé $\widetilde{\delta}$ de δ à P ?

(4) Si $\widetilde{\delta}_1$ et $\widetilde{\delta}_2$ sont deux relevés, déterminer une relation entre les deux.

(5) Montrer que $D_\omega(\widetilde{\delta}\psi) = D_\omega(\widetilde{\delta})\psi$ avec $\psi\colon [0,1] \to H$.

EXERCICE 2

(1) Supposons qu'il existe $D\colon P \to G$ qui soit un difféomorphisme local. On définit $\omega_P = D^*\omega_G$. Est-ce une connexion de Cartan ? Quelle est sa courbure ?

(2) Avec $\widetilde{M} \to M$ le revêtement universel, définir un tiré-en-arrière $\widetilde{P} \to \widetilde{M}$ muni d'une connexion de Cartan tirée-en-arrière.

(3) Si ω_P est une connexion de Cartan de courbure nulle, montrer que la développante de Cartan D_ω construite à l'exercice 1 s'étend en un difféomorphisme local.

(4) Montrer qu'il existe un difféomorphisme local $D\colon \widetilde{M} \to G/H$ compatible.

EXERCICE 3

Supposons $(P \to M, \omega)$ plat. On a montré qu'il existe une développante $D\colon \widetilde{M} \to G/H$. On cherche un *morphisme d'holonomie* $\rho\colon \pi_1(M) \to G$ vérifiant $D(g \cdot x) = \rho(g) \cdot D(x)$.

(1) Relever l'action du $\pi_1(M)$ sur les chemins de $\widetilde{M}$ à $\widetilde{P}$.

(2) Quelle conséquence cette action a-t-elle sur la connexion de Cartan ? Calculer une intégrale dans G.

(3) Montrer l'existence du morphisme d'holonomie.

(4) Interpréter géométriquement le couple (D, ρ) par rapport à M.

EXERCICE 4

On cherche maintenant à montrer que sous la condition de complétude de la connexion de Cartan, on a

$$M \cong \Gamma \backslash G/H \qquad (1)$$

avec $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$.

(1) Montrer qu'un difféomorphisme local $f\colon N_1 \to N_2$ est un revêtement si, et seulement si, tous les chemins de N_2 se relèvent à N_1.

(2) Montrer que la développante $D\colon \widetilde{M} \to G/H$ est un revêtement si la connexion de Cartan est complète.

(3) À quelle condition est-ce un difféomorphisme ? Montrer la formule énoncée dans ce cas-ci.

(4) Chercher un contre-exemple lorsque G/H n'est pas simplement connexe.