TD 5 : Variétés homogènes à courbure constante

Raphaël Alexandre et Elisha Falbel

Vendredi 17 février 2022

Exercice 0

Vérifier que si ω est une 1-forme à valeurs dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ alors

$$[\omega \wedge [\omega \wedge \omega]] = 0. \tag{1}$$

En déduire l'identité de Bianchi $\mathrm{d}\Omega = [\Omega \wedge \omega]$.

Exercice 1

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un modèle géométrique avec H groupe de $\mathfrak{h}$. Soit $P \to M$ une géométrie de Cartan de connexion ω.

(1) Que signifie la condition suivante : la courbure Ω est constante ?

(2) Que signifie la condition suivante : la courbure Ω est sans torsion ?

(3) Montrer que si Ω est constante et sans torsion alors

$$[x, y] - \Omega(\omega^{-1}(x), \omega^{-1}(y)) \tag{2}$$

définit un nouveau crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$.

On posera

$$K(x, y) = \Omega(\omega^{-1}(x), \omega^{-1}(y)) \tag{3}$$

appelée fonction de courbure. Il faudra montrer

$$\Omega([X, Y], Z) = K([x, y], z) \tag{4}$$

lorsque X, Y, Z sont trois champs vérifiant $\omega(X) = x$, $\omega(Y) = y$ et $\omega(Z) = z$. On pourra aussi utiliser l'identité de Bianchi et la formule de Cartan :

$$\mathrm{d}\Omega(X, Y, Z) = X(\Omega(Y, Z)) - Y(\Omega(X, Z)) + Z(\Omega(X, Y)) \tag{5}$$

$$- \Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X). \tag{6}$$

(4) Vérifier que le nouveau crochet est $\mathrm{Ad}(H)$-équivariant.

(5) Pour ce nouveau crochet, montrer que ω est encore une connexion. Montrer qu'elle est plate.

Exercice 2

Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ un modèle géométrique de groupes (G, H). Soit X un espace homogène $X = F/Q$. Soit $P \to X$ une géométrie de Cartan de connexion ω.

(1) Que signifie la condition suivante : F préserve ω ?

(2) Si ω est une connexion de Cartan déterminée de façon unique à partir d'une information géométrique sur X, traduire cette condition par rapport à l'information géométrique.

(3) Si F préserve ω, montrer que la courbure Ω est elle aussi préservée par F. Par conséquent, montrer qu'il suffit de la déterminer en un point $eQ \in X$.

(4) Appliquer l'exercice à $\mathrm{SU}(2)$ pour la géométrie de chemins stricte.