Cours 11

Remarque (sur la dernière proposition)

Soient $\boxed{f, g : J \times \Omega \to \mathbb{R}}$ t.q.

$\boxed{\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon}$

On suppose $\exists\, I \subset J$ t.q. les solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = g(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

sont définies sur I. Alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \varepsilon \underline{|t_+ - t_0|}\, e^{L(t-t_0)} \qquad t \geq t_0,\ t \in I$$

$t_+ = \sup I$

Continuité par rapport aux paramètres

Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert (espace de paramètres)

$$f : J \times \Omega \times \underline{\underline{\Lambda}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(loc. Lipschitz par rapport à la deuxième et troisième variable)

Soit $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$

Alors il existe un voisinage $W \ni \lambda_0$

$I \subset J$, $K \subset U = J \times \Omega$

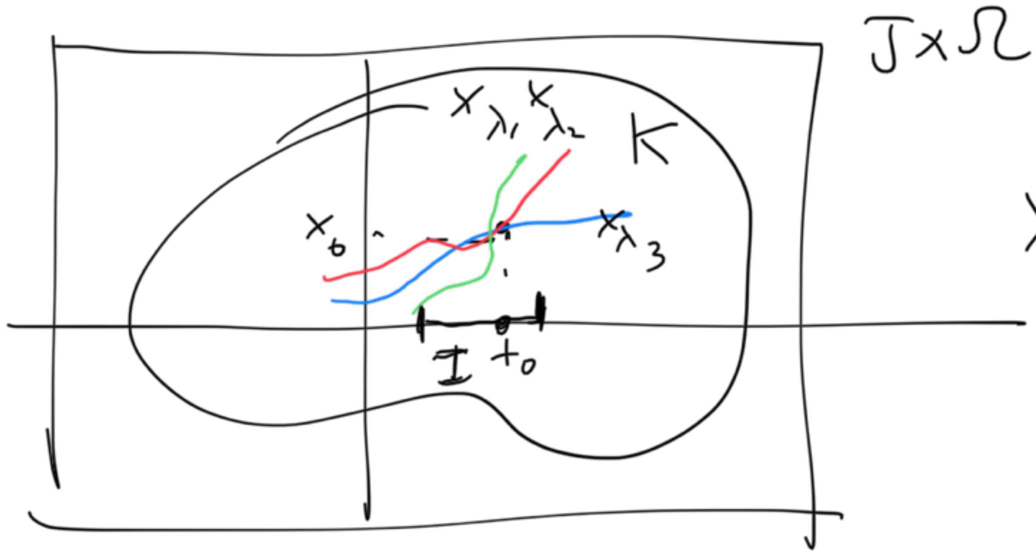
t.q. $\forall \lambda \in W$

$u_\varepsilon(t)$ est solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$$

$$x(t_0) = x_0$$

est définie sur I et telle que le graphe de la solution est contenu dans K.



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in W$

Théorème : $\exists L > 0$ t.q. $\forall t \in I$

$\|u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t)\| \leq L \|\lambda - \lambda_0\| |t_+ - t_0| e^{L|t-t_0|}$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|u_\lambda - u_{\lambda_0}\|_\infty = 0 \quad \text{sur } I.}$$

preuve : f est Lipschitz en la troisième variable

$$\forall x \in K \quad \boxed{\|f(t,x,\lambda) - f(t,x,\lambda')\| \leq L_3 \|\lambda - \lambda'\| = \varepsilon}$$

$L_3 \to$ constante de Lipschitz en 3ème variable

Par la proposition

$$\boxed{\begin{aligned} \|u_\lambda(t) - u_{\lambda_0}(t)\| &\leq \varepsilon |t_+ - t_0| e^{L_2|t-t_0|} \\ &\leq L_3 \|\lambda - \lambda_0\| |t_+ - t_0| e^{L_2|t-t_0|} \end{aligned}}$$

$L = \max\{L_1, L_2\}$ constante de Lipschitz en la deuxième variable

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \lambda_0} \| v_\lambda - v_{\lambda_0} \|_\infty = 0 \quad \text{sur } I.$$

$\boxtimes$

Chapitre II Équations différentielles linéaires non autonomes.

2.1 Équations linéaires

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t)$$

- $J \subset \mathbb{R}$
- $A : J \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe C^k $k \geq 0$
- $b : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ''

Solutions : $x : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$

2.1.1. Existence et unicité globales

Exemple :

$$x'(t) = A(t)\,x(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$x(t_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) & x_1(t_0) = x_0^1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\left| \; x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \qquad x_n(t_0) = x_0^n \right.$$

solution du problème de Cauchy :

$$\boxed{x_i(t) = x_0^i e^{\lambda_i t}}$$

Rappel : norme matricielle : $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Théorème : Soit $t_0 \in J$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Il existe une unique solution globale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

preuve : $\begin{cases} x'(t) = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

où $F(t,x) = A(t)x(t) + b(t)$

vérifier : loc. Lip. par rapport à x.

$$\| \underbrace{A(t)x + \cancel{b(t)}}_{F(t,x)} - (\underbrace{A(t)y + \cancel{b(t)}}_{F(t,y)}) \|$$

$$= \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\| \, \|x-y\|$$

si $K \subset J \times \mathbb{R}^n$ compact $\qquad K = I \times C$

$\max \|A(t)\| = L$ $\qquad$ compact

$t \in I$

$\Leftrightarrow \quad \| F(t,x) - f(t,y) \| \leq L \| x - y \|$ sur K

T. C-L. $\Rightarrow$ il existe une solution maximale sur $]t_-, t_+[$

Montrer que la solution est globale :

(rappel : si $\| F(t,x) \| \leq C_1 + C_2 \| x \|$ pour $\forall K$
la solution est globale)

$$\| F(t,x) \| = \| A(t)x + b(t) \| \leq \| A(t)x \| + \| b(t) \|$$

sur $K = I \times C$ $\qquad \| A(t)x \| \leq C_2 \| x \|$

et $\qquad \| b(t) \| \leq C_1$

(On utilise que
$A : J \to M_n(\mathbb{R})$ continue $\Rightarrow \| A(t) \|$ est continue)

2.2 La résolvante

$x'(t) = A(t)x(t)$ équation homogène

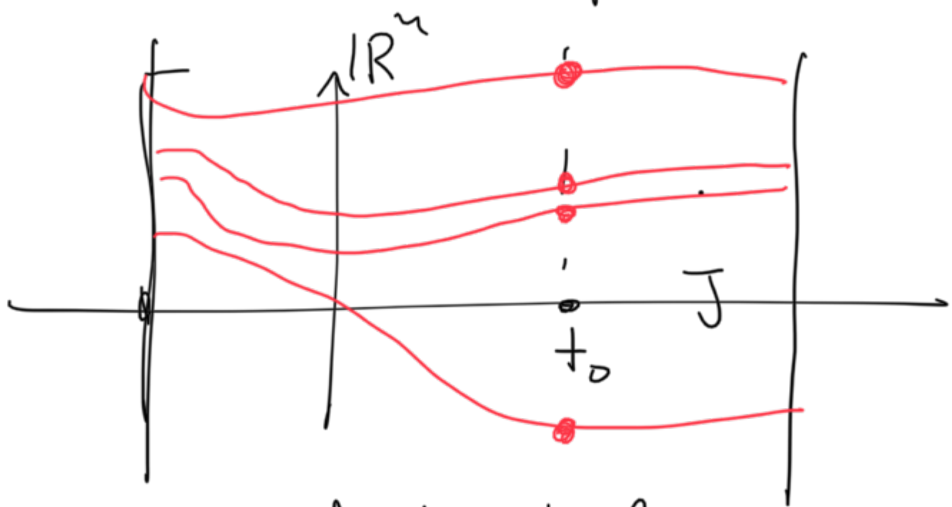
$$\mathcal{E} = \{ x : J \to \mathbb{R}^n \mid x(t) \text{ est solution} \}$$

Proposition : $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension n.

preuve : Soit $t_0 \in J$ et

$$T_{t_0} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longrightarrow x(t_0)$$

évaluation au temps t_0.



est une application linéaire de noyau $\{0\}$ par l'unicité du problème de Cauchy. Surjective par l'existence des solutions du problème de Cauchy. $\Longrightarrow$ T_{t_0} est un isomorphisme ∎

Remarque : $\mathcal{E}$ sous-espace vectoriel de $C^1(J,\mathbb{R}^n)$ application de classe C^1.

Proposition : Soit $u_1, \dots, u_n : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des solutions de l'équation $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Sont équivalents :

i) $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$

ii) $\forall t_0 \in J$ $\{u_1(t_0), \dots, u_n(t_0)\}$ est une base

iii) $\exists\, t_0 \in J$ t.q. $\{v_1(t_0), \dots, v_n(t_0)\}$ est une base

<u>preuve</u> : i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii)

iii) $\Rightarrow$ i) par la proposition précédente

On observe : $T_{t_0}^{-1}(v_i(t_0)) = v_i$. Comme $(v_i(t_0))_{1\le i\le n}$ est une base alors $(v_i)_{1\le i\le n}$ est aussi une base ∎

<u>Définition</u> : Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de E. La matrice Wronskienne associée à la base est

$$W(t) = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonne}}}{v_1(t)} & v_2(t) & \dots & v_n(t) \end{pmatrix}$$

Remarque : $W'(t) = A(t)W(t)$

$$\left(W'_{ik}(t) = A_{ij}(t) W_{jk}(t) \right)$$

Définition : La résolvante de $x'(t) = A(t)x(t)$ est

$$R_A(t,t_0) = \left(\xi_1(t,t_0), \dots, \xi_n(t,t_0) \right)$$

où $\xi_i(t,t_0)$ est la solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) \\ x(t_0) = e_i \end{cases}$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Remarque : • Par la proposition précédente $(\xi_i(t,t_0))_{1\le i\le n}$ est une base de $\mathcal{E}$.

• Si $A(t)$ est de classe C^k alors $R_A(t,t_0)$ est de classe C^{k+1}

Proposition $\forall t_0 \in J \quad \forall t \in J$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} R_A(t,t_0) = A(t)\, R_A(t,t_0) \\ R_A(\underbrace{t_0}_{t=t_0},t_0) = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}}$$

En particulier $R(t,t_0)x_0 \cdot$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$x'(t) = A(t)\,x$$
$$x(t_0) = x_0$$

$$\left(\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(R_A(t,t_0)x_0) = A(t)(R_A(t,t_0)\,x_0) \\ R_A(t_0,t_0)x_0 = x_0 \end{cases} \right).$$

preuve : · Par définition $R(t_0,t_0) = Id$

· Par définition

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,t_0) = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t}(t,t_0), \dots, \frac{\partial \xi_n}{\partial t}(t,t_0)\right)$$
$$\qquad\qquad \parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$
$$\left(A(t)\xi_1(t,t_0), \dots A(t)\xi_n(t,t_0)\right)$$

Ainsi $x(t) = R(t,t_0)x_0$ satisfait le problème de Cauchy. ∎

Proposition $\forall t_0, t_1, t_2 \in J$

$$R_A(t_2,t_0) = R_A(t_2,t_1)R_A(t_1,t_0)$$

preuve : Il suffit de montrer que

$$\forall t, t_0, t_1 \in J, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{R_A(t,t_0)x_0}_{u(t)} = \underbrace{R_A(t,t_1)R(t_1,t_0)x_0}_{v(t)}$$

On montre que $u(t)$ et $v(t)$ sont solutions du même problème de Cauchy :

i) $u(t_1) = v(t_1)$

$$R_A(t_1,t_0)x_0 \qquad \underbrace{R_A(t_1,t_1)}_{Id}R(t_1,t_0)x_0$$

$$\Rightarrow R_A(t_1,t_0)x_0 = R(t_1,t_0)x_0$$

ii) • $u'(t) = \frac{d}{dt}R_A(t,t_0)x_0$

$$= A(t)\underbrace{R_A(t,t_0)x_0}_{u(t)} = A(t)u(t)$$

$$\left(\text{eq. } x'(t) = A(t)x(t) \right)$$

$$\bullet \quad v'(t) = \underbrace{\frac{d}{dt} R_A(t,t_1)}\, R(t_1,t_0)\, x_0$$

$$= A(t) \underbrace{R_A(t,t_1) R(t_1,t_0) x_0}_{v(t)}$$

$$= A(t)\, v(t) \,.$$

$$\left(\text{eq. } x'(t) = A\, x(t) \right)$$

$$\text{T.C.L.} \Rightarrow \quad v(t) = v(t) \quad \forall t$$

$\blacksquare$

Remarque : $n = 1$

$$x'(t) = a(t)\, x(t)$$

equation de la résolvante :

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, x(t) \\ x(t_0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} R(t,t_0) = a(t)\, R(t,t_0) \\ R(t_0,t_0) = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}$$

solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\int^{t} a(s) ds$$

et $R(t,t_0)x_0 = x_0 e^{\int_{t_0}^t \dots}$

2.3 Propriétés de la résolvante

Proposition Soit $t_0 \in I$

et $D(t) = \det R_A(t,t_0)$

Alors $\begin{cases} D'(t) = \mathrm{tr}(A(t))D(t) \\ D(t_0) = 1 \end{cases}$

en particulier $\det R_A(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}$

Remarque : si on définit, plus généralement,

$D(t) = \det(W(t))$ → Wronskien par rapport à une base

alors $\det W(t) = \det W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}(A(s))ds}$

Rappel : La formule de Jacobi

1. $\underbrace{\det'(Id)H}_{d\det Id(H)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(I+\varepsilon H) - \det I}{\varepsilon}$

$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \mathrm{Tr} H}{\varepsilon} = \mathrm{Tr}\, H$

2. $\det'(A)H = \det A \,\mathrm{Tr}(A^{-1}H)$ ↳ inversible

i) $\det X = \det A \det(A^{-1}X)$

ii) $\det' A\, H = \det A \det'(Id).A^{-1}H$

$= \det A\, \mathrm{Tr}(Id.A^{-1}H)$

③ $\frac{d}{dt} \det A = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Adj}\, A \frac{dA}{dt}\right)$ A inversible

$$\mathrm{Adj}\, A \cdot A = \det A \; \mathrm{Id}$$

$$\frac{d}{dt} \det A = \det A \; \mathrm{Tr}\left(A^{-1} \frac{dA}{dt}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\det A \; A^{-1} \frac{dA}{dt}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Adj}\, A \cdot \frac{dA}{dt}\right)$$

Proposition: $\det e^{tB} = e^{\mathrm{tr}(tB)}$

preuve : $\left(\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \, \mathrm{tr}\left(A^{-1}(t) \frac{dA}{dt}\right) \right)$

si $A(t) = e^{tB} \Longrightarrow \frac{dA(t)}{dt} = B e^{tB}$

$$\frac{d}{dt} \det e^{tB} = \det e^{tB} \, \mathrm{Tr}\left(e^{-tB} B e^{tB}\right)$$

$$= \det e^{tB} \, \mathrm{Tr}\, B$$

problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \mathrm{Tr}\, B \; x(t) \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow x(t) = e^{t \mathrm{Tr} B}$

$$\Rightarrow \boxed{\det e^{tB} = e^{t \mathrm{Tr}\, B}}$$

☒

On revient à la proposition :

$$D(t) = \det R_A(t,t_0)$$

alors $\begin{cases} D'(t) = \mathrm{Tr}\, A(t)\, D(t) \\ D(t_0) = 1 \end{cases}$

preuve : On utilise la formule

$$d(\det A)\, H = \det A \; \mathrm{Tr}(A^{-1} H)$$

$$D'(t) = \underbrace{\det R_A(t,t_0)}_{D(t)} \mathrm{Tr}\left(R_A^{-1}(t,t_0)\, R_A'(t,t_0) \right)$$

$$R_A'(t,t_0) = A(t) R_A(t,t_0)$$

$$= D(t)\; \mathrm{Tr}(A(t))$$

■

Corollaire (Liouville) Supposons $\mathrm{Tr}(A(t)) = 0$ $\forall t \in J$. Alors $\det R_A(t,s) = 1$ $\forall t,s \in J$

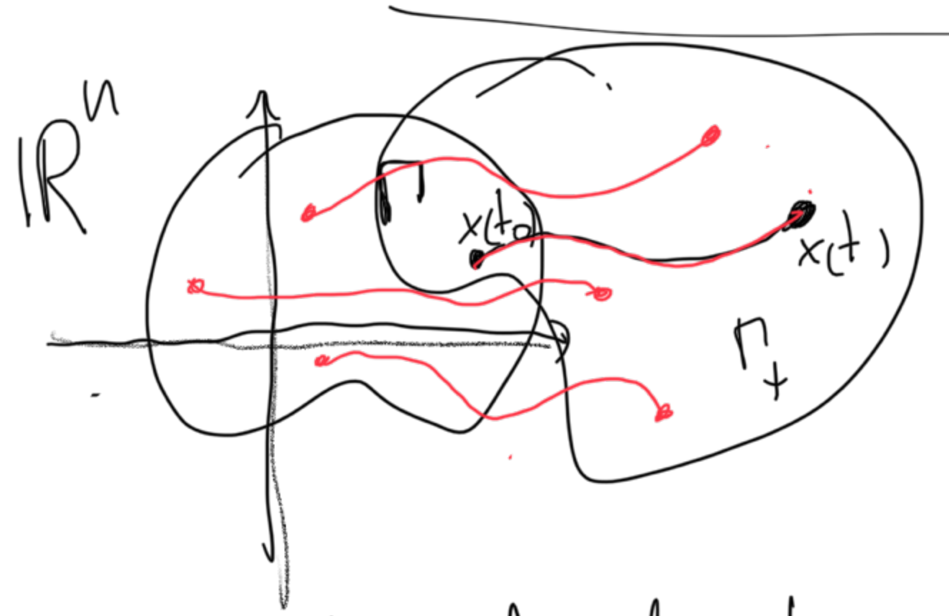
preuve : $D'(t) = 0$

■

Corollaire : Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un domaine avec $\mathrm{vol}(\Gamma)$ bien défini. Alors le volume de $\Gamma_t = \left\{ x(t) \;\middle|\; \begin{array}{l} x(t) \text{ solution de } x'(t) = A(t) x(t) \\ x(t_0) \in \Gamma \end{array} \right\}$

satisfait l'équation

$$\boxed{\mathrm{vol}(\Gamma_t) = |\det R_A(t,t_0)|\, \mathrm{vol}(\Gamma)}$$



<u>preuve</u> : Formule de changement de variable :

$$\Gamma_t = \{ R(t,t_0)x \mid x \in \Gamma \}$$

$$\int_{\Gamma_t} 1 \cdot dx = \int_{\Gamma} 1 \cdot \underbrace{|\det R_A(t,t_0)|}_{\text{constante}} dy$$

$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = |\det R_A(t,t_0)| \cdot \operatorname{vol}(\Gamma)$$

Rappel : $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$

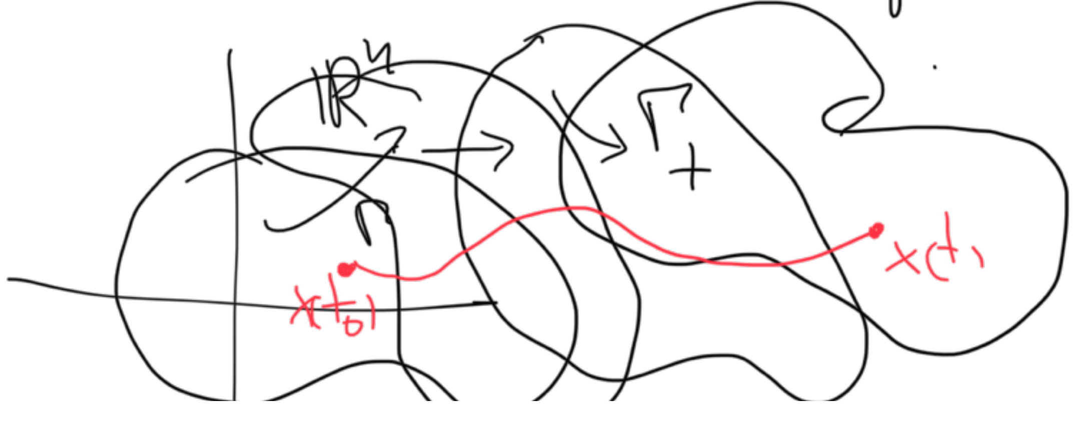
$$\int_{\phi(U)} F(x)\,dx = \int_U F(\phi(y))\,|\det J_\phi(y)|\,dy$$

$\blacksquare$

Remarque : ① si $\operatorname{Tr}(A(t)) = 0$

alors $\det R_A(t,s) = 1$ (Liouville)

alors le volume est preservé



$\mathrm{vol}(\Gamma_t)$ est constant

(2) si $A(t)$ est une matrice antisymétrique

Alors $R_A(t,s) \in SO(n,\mathbb{R})$ $\forall t,s \in I$

$$SO(n,\mathbb{R}) = \{ R \in M_n(\mathbb{R}) \mid R R^T = Id \}$$

(en particulier $\mathrm{Tr}\, A(t) = 0$ $R_A(t,s)$ preserve volume)

On montre que $R_A(t,s) R_A^T(t,s) = Id$

(on montrera que la dérivé de $R_A R_A^T$ est 0):

On calcule:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R_A^T(t,s) R_A(t,s) \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} R_A(t,s) \right)^T R_A(t,s) + R_A^T(t,s) \frac{\partial}{\partial t} R_A(t,s)$$

$$= \left(A(t) R_A(t,s) \right)^T R_A(t,s) + R_A^T(t,s) A(t) R_A(t,s)$$

$$= R_A^T(t,s) A^T(t) R_A(t,s) + R_A^T(t,s) A(t) R_A(t,s)$$

$$= R_A^T(t,s) \underbrace{\left(A^T(t) + A(t) \right)}_{\text{antisymétrie}} R_A(t,s) = 0$$

$\Longrightarrow$ $R_A^T(t,s) R_A(t,s)$ est constant

mais $t=s \Rightarrow R_A(s,s) = Id$

$\Rightarrow \quad R_A'(t,s)\, R_A(t,s) = Id$ ☒

2.4 Cas non-homogène

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \qquad x(t_0) = x_0$$

eq. homogène : $x'(t) = A(t)\,x(t)$

$$\Rightarrow \text{résolvante } \boxed{x_h(t) = R_A(t,t_0)\,x_0}$$

<u>Théorème</u>: (Formule de Duhamel) Soient $t_0 \in J$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. L'unique solution de l'équation $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

est

$$v(t) = \underbrace{R_A(t,t_0)\,x_0}_{x_h(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \underline{R_A(t,s)\,b(s)}\,ds}_{x_p(t)}$$

<u>preuve</u>: i) condition initiale :

$$v(t_0) = \underbrace{R_A(t_0,t_0)}_{Id}\,x_0 + 0$$
$$= x_0$$

ii) $v'(t) = R_A'(t,t_0)\,x_0$

$$+ \underbrace{R_A(t,t)}_{\hookrightarrow Id}\,b(t)$$

$$+ \int^{t} \partial R(t,s)\, b(s)\, ds$$

$$+\int_{t_0}^{t} \frac{\partial R_A}{\partial t}(t,s)\, b(s)\, ds$$

$$= A(t) R_A(t,t_0) x_0 + b(t) + \int_{t_0}^{t} A(t) R_A(t,s)\, b(s)\, ds$$

$$= A(t)\big(\underbrace{R_A(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,s)\, b(s)\, ds}_{v(t)}\big) + b(t)$$

$$= A(t)\, v(t) + b(t)$$

$\blacksquare$

<u>Remarque</u>, On peut trouver la formule de Duhamel en utilisant la méthode de variation de constantes

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

$$v_h(t) \hookrightarrow R_A(t,t_0)\, x_0$$

et on cherche

$$v_p(t) = R_A(t,t_0)\, c(t)$$

en substituant dans l'équation différentielle on obtient $b(t) = R(t,t_0)\, c'(t)$

$$\int^{t}$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)\, b(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad u_p(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, s)\, b(s)\, ds$$