Cours 12

Exemple

$$\begin{cases} x' = -\underline{x \tan t} + y \\ y' = x + y \tan t . \end{cases} \qquad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[= J$$

$$X'(t) = A(t) X(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\tan t & 1 \\ 1 & \tan t \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ l'espace des solutions de l'équation est de dimension 2

- une solution <u>"évidente"</u> : $v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan t \end{pmatrix}$

  est une solution : $x(t) = 1 \quad x'(t) = 0$
  $y(t) = \tan t \quad y'(t) = 1 + \tan^2 t$

- autre solution l.i. ?

Remarque : $\mathrm{Tr}\, A(t) = 0$

Rappel : $W(t) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ $\quad v_1, v_2$ solutions l.i.

$$W'(t) = A(t) W(t)$$

$$\Rightarrow (\det W(t))' = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mathrm{Tr}\, A(t)} . \det W(t)$$

$$\Rightarrow \det W(t) = c \quad \text{constante}$$

On écrit $W(t) = \begin{pmatrix} 1 & v(t) \\ \tan t & w(t) \end{pmatrix}$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$
$$u_1 \qquad u_2$$

$$\det W(t) = v(t) - u(t)\tan t = c$$

- $u'(t) = -u(t)\tan t + v(t) = c$

$$\Rightarrow \quad u(t) = ct + b \quad (\text{on fait } b=0)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = c + ct.\tan t$$
$$= c(1 + t.\tan t)$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 + t.\tan t \end{pmatrix}$$

Exemple : $\begin{cases} x' = -x + 2y + e^{3t}\arctan t \\ y' = 2x + 2y + 2e^{3t}\arctan t \end{cases}$

$$X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}\arctan t$$

- equation homogène :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow x'' = -x' + 2\underbrace{y'}_{(2x+2y)}$$

$$\Downarrow$$

$$x'' = -x' + 4x + \underbrace{4y}_{(2x'+2x)}$$

$$x - x - 6x = 0$$

polynôme characteristique : $r^2 - r - 6 = 0$

$$r = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{-2t} \\ y(t) = \dfrac{x' + x}{2} = 2\lambda e^{3t} - \dfrac{\mu}{2} e^{-2t} \end{cases}$$

solution de l'équation homogène :

$$X_h(t) = \lambda e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Solution particulière de l'équation non-homogène
  méthode de variation des constantes :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^{-2t} \\ 2e^{3t} & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \arctan t \\ 2e^{3t} \arctan t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{3t}\lambda' + 2e^{-2t}\mu' = e^{3t}\arctan t \\ 2\times \; 2e^{3t}\lambda' - e^{-2t}\mu' = 2e^{3t}\arctan t \end{cases}$$

$$5e^{3t}\lambda' = 5e^{3t}\arctan t \Rightarrow \underline{\lambda' = \arctan t}$$

$$\Rightarrow \quad \mu' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(t) = t\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \lambda_0$$

$$\mu(t) = \mu_0$$

constante

choisir une solution particulière :

$$e^{\cdots}\left(t\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \lambda_0\right)\begin{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$+\ e^{-2t}\mu_0\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exemple : $\begin{cases} x' = \dfrac{-tx+y}{1+t^2} \\ y' = \dfrac{x+ty}{1+t^2} \end{cases}$

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad \text{éq. homogène}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{-t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Tr}\,A(t) = 0$$

- solution "évidente" : $v_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

- solution l.i : $v_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) \\ t & y(t) \end{pmatrix} \underset{\mathrm{Tr}\,A(t)=0}{\Longrightarrow} (\det W(t))' = 0$$

$$\det W(t) = \underline{y(t) - t\,x(t)} = c \quad \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) = \frac{-tx+y}{1+t^2} = \frac{c}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = c.\arctan t + x_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = t\,(c\arctan t + x_0) + c$$

en particulier si $x_0 = 0$ et $t = 1$

$$\begin{pmatrix} \arctan t \\ \\ t \arctan t + 1 \end{pmatrix}$$

Autre méthode, en utilisant les nombres complexes :

On définit

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$$ calcul

$$= -\frac{1+it}{1+t^2}\left(x(t) + i\,y(t)\right)$$

$$= -\frac{1+it}{1+t^2}\, z(t)$$

$$z'(t) = -\frac{1+it}{1+t^2}\, z(t)$$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} \frac{z'(t)}{z(t)} = -\int_{t_0}^{t} \frac{1+is}{1+s^2}\, ds$$

$$z(t) = \underbrace{(a+ib)}_{= z_0}\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{1+is}{1+s^2}\, ds}$$

$$= (a+ib)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+s^2}\, ds - i\int_{t_0}^{t} \frac{s}{1+s^2}\, ds}$$

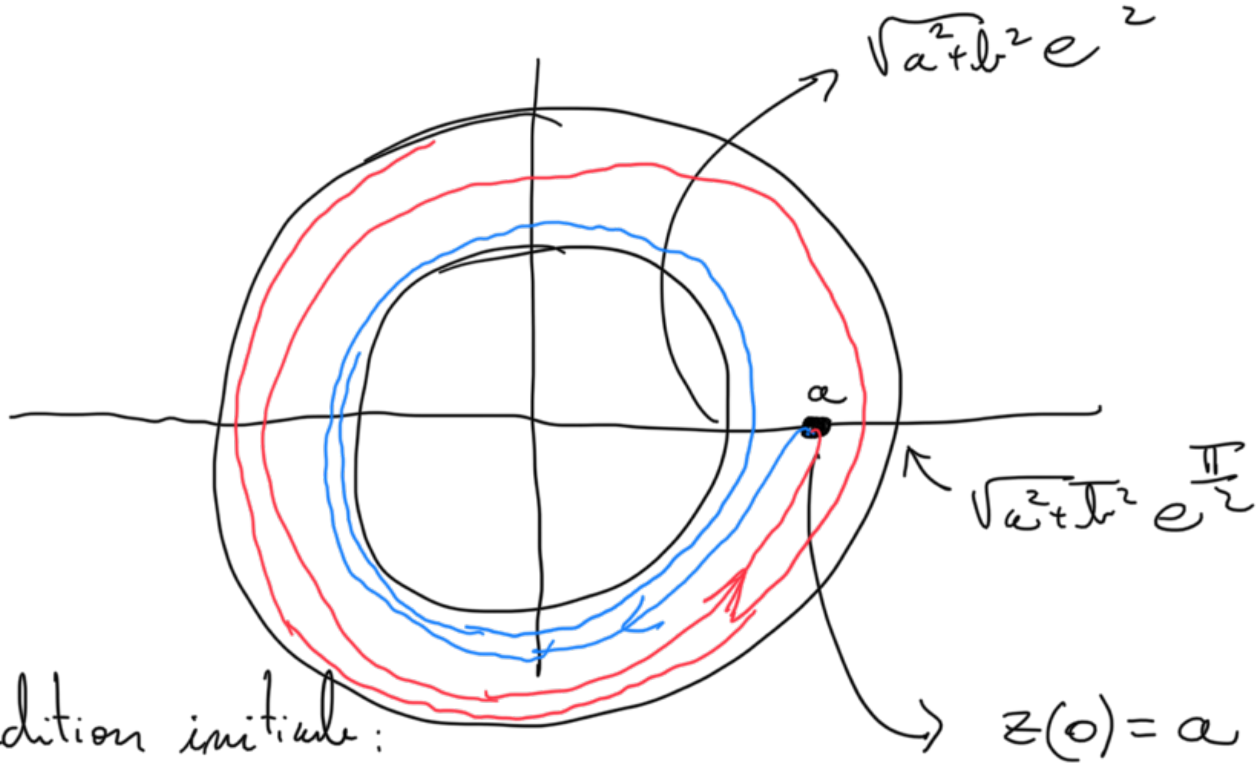
On admet que $t_0 = 0$

$$= (a+ib)\, e^{-\arctan t}\, e^{-\frac{i}{2}\ln(1+s^2)\Big|_0^t}$$

$$\boxed{z(t) = (a+ib)\, e^{-\arctan t}\, e^{-\frac{i}{2}\ln(1+t^2)}}$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\,e^{-\frac{\pi}{2}} < |z(t)| < \sqrt{a^2+b^2}\,e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\text{car} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2}\right)$$



condition initiale :

$b=0 \quad a=1$

$t>0 \qquad e^{-\arctan t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} e^{-\frac{\pi}{2}}$

$-\ln(1+t^2) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$

$t<0 \qquad e^{-\arctan t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} e^{\frac{\pi}{2}}$

$-\ln(1+t^2) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$

Chapitre 3 : Equations différentielles linéaires autonomes.

3.1 $\qquad x'(t) = A\,x(t)$

$\longrightarrow$ matrice constante

$A \in M_n(\mathbb{R})$ ou $A \in M_n(\mathbb{C})$

$X \in \mathbb{R}^n$ $\qquad X \in \mathbb{C}^n$

Exemple : $x'(t) = \alpha\, x(t)$ $\quad \alpha$ constante

solution $\boxed{x(t) = x_0 e^{\alpha t}}$

comportement asymptotique :

$\alpha < 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to -\infty} |x(t)| = \infty$

$\alpha > 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = +\infty$ $\quad \to x_0 \neq 0$

$\lim\limits_{t \to -\infty} x(t) = 0$

$\alpha = 0$ $\quad x(t)$ est constant

Remarque. méthode des approximations successives pour résoudre $\begin{cases} x'(t) = \alpha\, x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$:

On fait $\alpha = 1$: $\quad u_0(t) = 1$ $\qquad T(u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(s)\,ds$

$$u_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u_0(s)\,ds$$

$$= x_0 + (t - t_0)$$

$$u_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u_1(s)\,ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} (x_0 + s - t_0)\,ds$$

$$= x_0 + x_0(t - t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$u_n(t) = x_0 + x_0(t-t_0) + \cdots + x_0 \frac{(t-t_0)^n}{n!}$$

$$\to \quad x(t) = x_0 e^{t-t_0}$$

Exemple : $X(t) = D \quad X(t)$

avec $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

condition initiale : $x(t_0) = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$

solution :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_0^1 e^{\alpha_1 (t-t_0)} \\ \vdots \\ x_0^n e^{\alpha_n (t-t_0)} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{(t-t_0)D} \, x(t_0)}$$

exponentielle des matrices.

Remarque : $\boxed{X(t) = A\, x(t)}$ $\quad (\times P^{-1} \quad)$

Supposons $A = P D P^{-1}$, D diagonale

On définit $y(t) = P^{-1} x(t)$

$$(P^{-1} x(t))' = P^{-1} A \, x(t)$$

$$= \underbrace{P^{-1} A P}\, P^{-1} x(t)$$

$$\boxed{y'(t) = D\, y(t)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{(t-t_0)D}\, y_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = P\, y(t) = P e^{(t-t_0)D} P^{-1} \underbrace{P y_0}_{x_0}$$

3.2 Exponentielle de matrices

Définition : $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$

$(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R})$ $\qquad A \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Remarque : la série converge normalement :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty$$

- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

$$\|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \|A\| \, \|B\|$$

Proposition 1 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La fonction $t \longrightarrow e^{tA}$ est dérivable

et $\frac{d e^{tA}}{dt} = e^{tA} A = A e^{tA}$

2 $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad e^A$ est inversible

et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

③ si $[A,B]=0$ alors
$$e^{A+B} = e^A . e^B$$

④ si $P \in GL(\mathbb{K})$ alors
$$P e^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$$

⑤ si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonale alors
$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

<u>admis</u>.

Remarque : si $[A,B] \neq 0$ il existe la formule de Campbell-Hausdorff :
$$e^A . e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$$

Théorème : Le problème de Cauchy
$$x'(t) = A\,x(t)$$
$$x(t_0) = x_0$$
a pour solution $u(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$

<u>preuve</u> : On vérifie

1) $v'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par la proposition}}}{=} A e^{(t-t_0)A} x_0 = A \cdot v(t)$

2) $v(t_0) = e^{(t_0-t_0)A} x_0 = Id \, x_0 = x_0$

T.C.L. $\Rightarrow$ $v(t)$ est l'unique solution. $\square$

3.3. Calcul de l'exponentielle de matrices.

3.3.1. Matrices à coefficients complexes.

A matrice

si $Av = \lambda v$ $\quad v \neq 0$ on dit que

λ est valeur propre et v vecteur propre.

polynôme caractéristique : $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$$

$(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ multiplicités algébriques

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_r = n$$

Théorème (Cayley-Hamilton)

$$P_A(A) = (A - \lambda_1 Id)^{p_1} \cdots (A - \lambda_r Id)^{p_r} = 0$$

Définition : • $\Pi_i = \ker(A - \lambda_i Id)$

sous-espace propre associé à λ_i

$e_i = \dim \Pi_i$ (multiplicité géométrique)

- $\Gamma_i = \ker (A - \lambda_i \, Id)^{p_i}$

espace caractéristique associé à λ_i

Théorème (décomposition des noyaux)

Il existe une décomposition

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$$

t.q. 1) $\dim \Gamma_i = p_i$

2) $A\Gamma_i = \Gamma_i$ (espaces invariants)

3) $A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i$

où I_{Γ_i} est l'identité sur Γ_i

$N_i \in End(\Gamma_i)$ nilpotent d'ordre plus petite que p_i.

$N_i^{p_i} = 0$

Remarque : ① $N_i = (A - \lambda_i Id)|_{\Gamma_i}$

② $\ker (A - \lambda_i Id)^{p_i} = \ker (A - \lambda_i Id)^{m_i}$

où $m_i \le p_i$

m_i est l'indice de nilpotence

si $\ker (A - \lambda_i Id)^{m_i - 1} \subsetneq \ker (A - \lambda_i Id)^{m_i}$

③ A est diagonalisable si et

seulement si pour toute valeur propre λ_i les multiplicités algébriques et géométriques coïncident (i.e. $\dim \Pi_i = p_i \quad \forall i$)

Réduction de Jordan (sur $\mathbb{C}$)

Théorème de Jordan : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in GL(n, \mathbb{C})$ t.q.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} = J$$

où $J_i \in M_{p_i}(\mathbb{C}) \qquad 1 \leq i \leq r$

est de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}$$

associé à la valeur propre λ_i

($e_i = \dim \Gamma_i$)

avec

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

(bloc de Jordan)

Remarques • $e_i = \dim \ker (A - \lambda_i Id)$

J est dite la forme réduite

J est dite la forme réduite de Jordan de A

$$\overset{\|}{P^{-1}AP}$$

- $J_{i,k} \in \mathcal{M}_{\leq p_i}(\mathbb{C})$

- si $e_i = p_i$ alors $J_{i,k} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$

  i.e. $J_{i,k} = \lambda_i$

Calcul de l'exponentielle :

$$e^{tA} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{forme de Jordan}}}{=} e^{tPJP^{-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proposition}}}{=} P\left(e^{tJ}\right)P^{-1}$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

$$J_{i,k} = \lambda_i \, Id + \underbrace{N_{i,k}}_{\hookrightarrow \text{ nilpotente}} \qquad \in \mathcal{M}_{n_{i,k}}$$

$$e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i Id} \cdot e^{tN_{i,k}}$$

$$e^{tN_{i,k}} = \sum_{l=0}^{n_{i,k}-1} \frac{(N_{i,k})^l}{l!}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_n^{\uparrow} \Longrightarrow N^n = 0$$

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{1,1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{tJ_{r,e_r}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $$e^{tJ_{ik}} = e^{t\lambda_i} \mathrm{Id} \begin{pmatrix} 0 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_{ik}-1}}{(n_{ik}-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.2 Matrices à coefficients réels :

si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)^{p_i} \prod_{i=s+1}^{q} ((\lambda-\lambda_i)(\lambda-\bar{\lambda}_i))^{p_i}$$

racines réelles

Définition : sous-espaces caractéristiques réels de A

$$\begin{cases} E_i = \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n & 1 \leq i \leq s \\ E_i = (\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}) \cap \mathbb{R}^n & s+1 \leq i \leq q \end{cases}$$

Remarque : E_i est stable par conjugaison

$(A - \lambda_i)^{p_i} v = 0$ $\quad$ A réelle :

$\quad \parallel$

$(\bar{A} - \bar{\lambda}_i)^{p_i} \bar{v} = 0$

$\Rightarrow$ • Γ_i $\quad 1 \leq i \leq s$ $\quad$ est stable par conj.

• $\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}$ $\quad s+1 \leq i \leq q$ $\quad$ "

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$

Réduction de Jordan dans $\mathbb{R}^n$

(1) λ_k réelle $(1 \leq i \leq s)$

$$E_k = \ker_{\mathbb{R}} (A - \lambda_k Id)^{p_k}$$

$$A\big|_{E_k} = \lambda_k Id\big|_{E_k} + N_k$$

nilpotente

(2) $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (s+1 \leq k \leq q)$

- On choisit une base $(v_1, \dots, v_{p_k})$ de Γ_k où $A|_{\Gamma_k}$ satisfait

$\Longrightarrow A v_j = \lambda_k v_j + \delta_j v_{j-1} \quad \delta_j = (J_k)_{j-1,j} = 0$ ou 1

- $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{p_k})$ ~~est~~ une base $\bar{\Gamma}_k$

On écrit $v_j = a_j + b_j i$ avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}^n$ selon une base de E_k est

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k).$$

On observe que

$$A\,(a_j + i b_j) = (\alpha_k + \beta_k)(a_j + i b_j) + \delta_j (a_{j-1} + i b_{j-1})$$

qui peut s'écrire comme

$$A \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = C_k \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \delta_j \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{pmatrix}$$

où $C_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$

On conduit que $A|_{E_k}$

dans la base $(a_1, \dots, a_k, b_k)$

est $J'_k = \begin{pmatrix} C_k & \delta_2 I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{p_k} I_2 \\ 0 & & & C_k \end{pmatrix}$.

Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ t.q.

$$Q^{-1} A Q = J' = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_s & & \\ & & & J'_{s+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J'_q \end{pmatrix}$$

où pour $s+1 \leq i \leq q$

$$J'_i = \begin{pmatrix} J'_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{i,2e_i} \end{pmatrix}$$

avec $$J'_{i,k} = \begin{pmatrix} C_i & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C_i \end{pmatrix}$$

Calcul de e^{tC_i}

On écrit $C_i = \alpha_i I_2 + \beta_i B$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tC_i} = \underset{\substack{\shortparallel \\ e^{t\alpha_i} I_2}}{e^{t\alpha_i I_2}} \cdot \underbrace{e^{t\beta_i B}}_{?}$$

$$e^{t\beta_i B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t\beta_i)^k B^k$$

On a $B^2 = -I_2 \Longrightarrow B^{2p} = (-1)^p I_2$

B^{2p+1} ... p

$$B^{1} = (-1)^{'} B$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (t\beta_i)^{2p} I_2 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} (t\beta_i)^{2p+1} B$$

$$= \cos(t\beta_i)\, I_2 + \sin(t\beta_i)\, B$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i t \left(\cos t\beta_i \quad - \sin t\beta_i \quad \right)$$