Cours 16

Exemple $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x+y-y(x^2+y^2) \end{cases}$

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles de la forme $]\alpha, +\infty[$
$\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $x(t), y(t)$ une solution
$v(t) = x^2(t) + y^2(t)$

$v'(t) \leq 2v(t)$

Lemme de Gronwall $v(t) \leq v(t_0) e^{2(t-t_0)}$

si $t_+ = \beta < +\infty$ alors $v(t)$ est

borné $\Rightarrow$ la solution est bornée

Par le théorème de sortie de compact
$\beta = +\infty$.

Remarque : $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ est solution.
$\Rightarrow$ $(0,0)$ est point d'équilibre

Supposons $(x(t), y(t))$ ne passe pas par $(0,0)$. On introduit des coordonnées polaires :

$$(x(t), y(t)) = (r(t)\cos\theta(t), r(t)\sin\theta(t))$$

$$r :]\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$\theta :]\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

On trouve les eq. différentielles satisfaites par r et θ

par r et θ.

$$x(t)+iy(t) = re^{i\theta(t)}$$

$$x'(t)+iy'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + rie^{i\theta(t)}\cdot\theta'(t)$$

$$\parallel$$

$$-y + i\left(x+y-y(x^2+y^2)\right) = r'(\cos\theta + i\sin\theta) + ri\theta'(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\parallel$$

$$-r\sin\theta + i\left(r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -r\sin\theta = r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' \\ r(\cos\theta+\sin\theta) - r^3\sin\theta = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{cases}$$

On obtient :

$$\Rightarrow \begin{cases} r' = r(1-r^2)\sin^2\theta \\ \boxed{\theta' = 1 + \dfrac{1-r^2}{2}\sin 2\theta} \end{cases} \qquad *$$

Soit $X :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ une solution maximale

i) s'il existe t_0 t.q. $\|X(t_0)\| = 1$ alors la trajectoire maximale est le cercle unité et $\alpha = -\infty$

$\to X(t_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a^2+b^2=1$

alors $\begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \\ \sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

est une solution du problème de

Cauchy

Cauchy.

* a comme solution $r(t) = 1$
$\theta(t) = t + C$
$\hookrightarrow$ constante

ii) S'il existe t_0 t.q. $\|X(t_0)\| < 1$

alors $\forall t \in \mathbb{R}$ on a $\|X(t)\| < 1$

et $\boxed{\lim_{t \to -\infty} X(t) = 0}$ ($\alpha = -\infty$).

preuve :

Il est impossible que $\|X(t)\| = 1$ car par i) la solution serait contenue dans le cercle unité.

$\Rightarrow \|X(t)\| < 1 \quad \forall t \in]\alpha, +\infty[$,

par le théorème de sortie de compacts

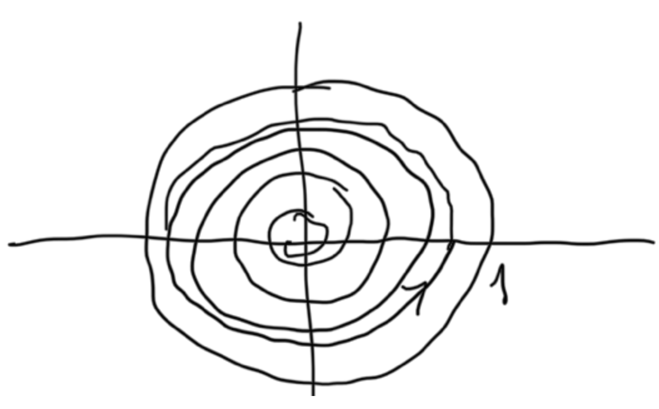
$\boxed{\alpha = -\infty}$

On observe que $\dot{r}(t) = r(1-r^2)\sin^2\theta(t) > 0$

$\Rightarrow r(t)$ est croissant.

Soit $\lambda = \lim_{t \to -\infty} r(t)$

$\mu = \lim_{t \to +\infty} r(t)$



$$\theta' = 1 + \frac{1-r^2}{2}\sin 2\theta$$

$$r<1 \Rightarrow \theta' \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty}\theta = +\infty \ , \ \lim_{t\to-\infty}\theta = -\infty .$$

a) On montre que $\lambda = 0$ si $r(t_1) = \frac{1}{2} < 1$

$$\int_{t=\alpha=\infty}^{t_1} r'(t) = \int_{-\infty}^{t_1} r(1-r^2)\sin^2\theta$$

$$r(t_1) - \lim_{t\to-\infty} r(t) \geq \left(\int_{-\infty}^{t_1}\sin^2\theta\right)\cdot\lambda\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

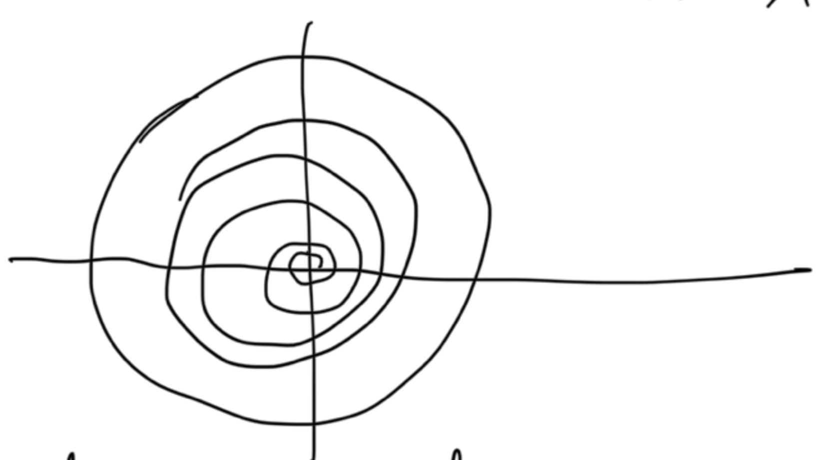
$$r(t_1) - \lambda \geq \lambda\left(1-\frac{1}{4}\right)\int_{-\infty}^{t_1}\sin^2\theta$$

mais $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_1}\sin^2\theta(t)\,dt \longrightarrow +\infty$

$$= \int_{-\infty}^{t_1}\sin^2\theta\left(\frac{dt}{d\theta}\right)d\theta$$

car $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \frac{d\theta}{dt} \leq \frac{3}{2}$

$r(t_1) - \lambda$ n'est pas borné
contradiction.
si $\lambda \neq 0$

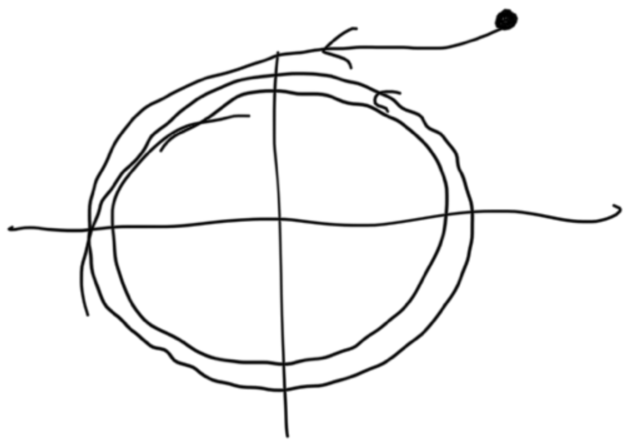


Maintenant on montre que $\mu = 1$.

(exercice) même argument.

iii) S'il existe t_0 t.q. $\|x(t_0)\| > 1$

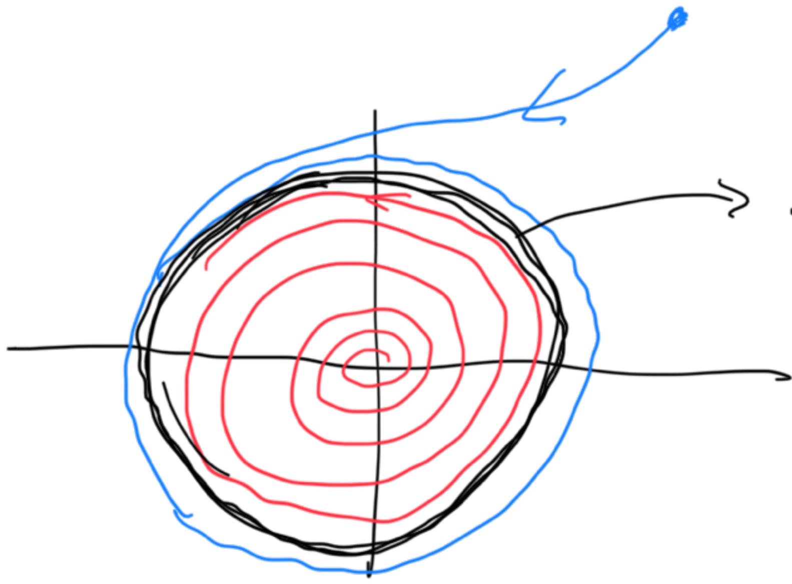
alors par la partie i $\|X(t)\| \geq 1$



r est décroissant

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = \mu$$

on montre que $\mu = 1$ (exercice même argument)



S^1 orbite fermé
orbite périodique

On appelle le cercle $S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2\}$ un cycle limite de l'équation différentielle.

Définition : Soit $X(t)$ une orbite d'une equation différentielle.

$\{ q \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, t_n \quad t_n \longrightarrow +\infty \quad X(t_n) \to q \}$

est l'ensemble ω-limite de $X(t)$.

Théorème de Poincaré-Bendixson :

Si $X(t)$ reste dans un compacte de $\mathbb{R}^2$

si $X(t)$ reste dans un compact ...
sans points d'équilibre alors l'ensemble ω-limite de $X(t)$ est une __orbite fermée__.

Exemple : $\left\{ \begin{array}{l} x' = -y \\ y' = x\underline{(1+y)} \end{array} \right.$

1) points d'équilibre ?

$$-y = 0$$
$$x(1+y) = 0$$

$\Rightarrow \quad (0,0)$

2) linéarisé en $(0,0)$:

$$x' = -y$$
$$y' = x$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ eq. linéaire

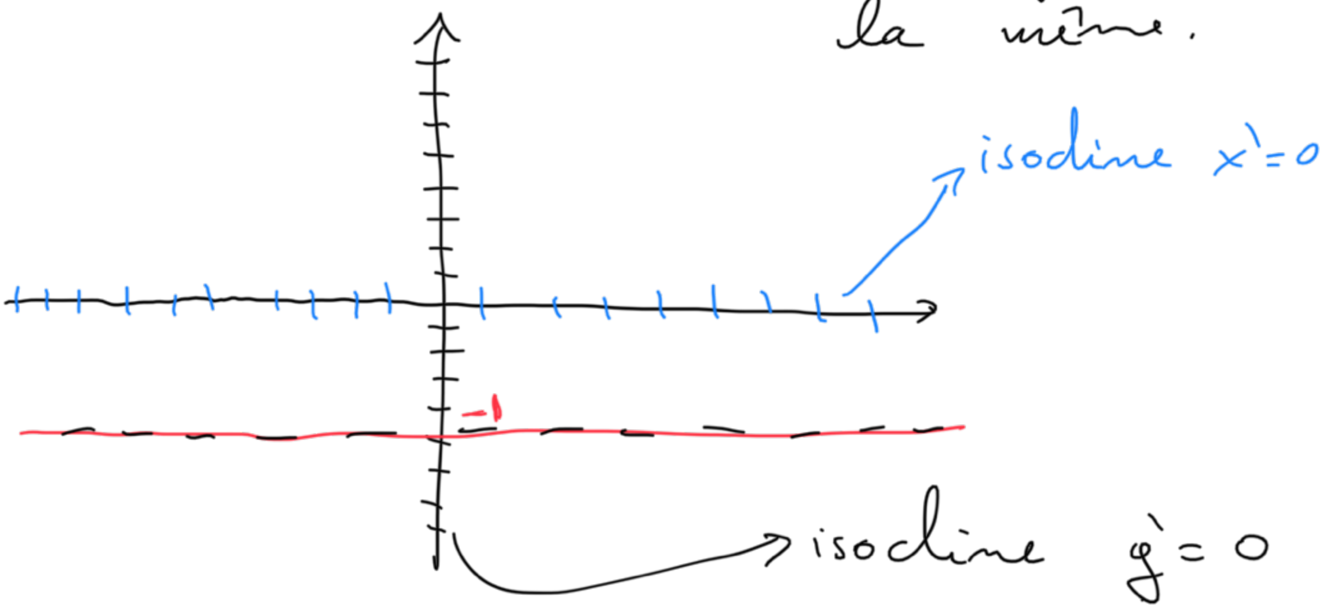
valeurs propres de A : $\det(A - \lambda Id) = 0$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda = \pm i$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

3) Tracer des isoclines : points tels que la direction du champs est la même.



4) symétries

$$x' = -y = F_1(x,y)$$
$$y' = x(1+y) = F_2(x,y)$$

$$F_1(-x,y) = F_1(x,y)$$

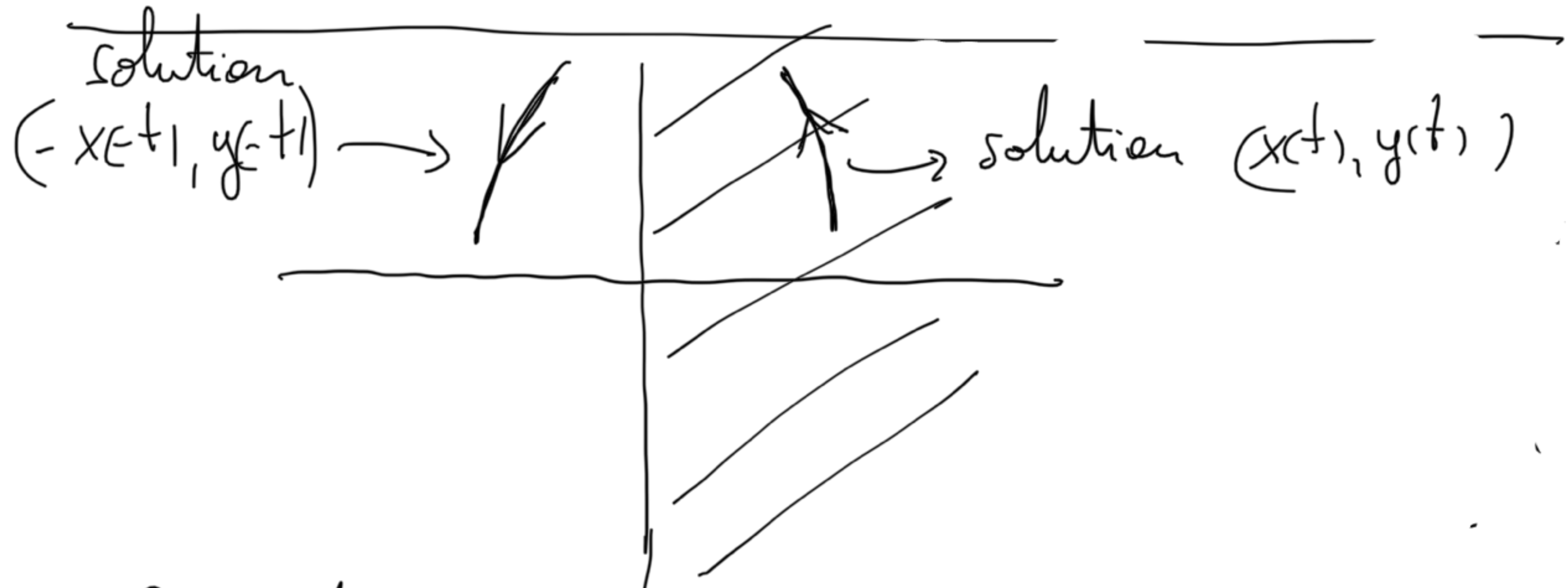
$$F_2(-x,y) = -F_2(x,y)$$

on observe alors que si $(x(t), y(t))$ est solution alors $(-x(-t), y(-t))$ est solution :

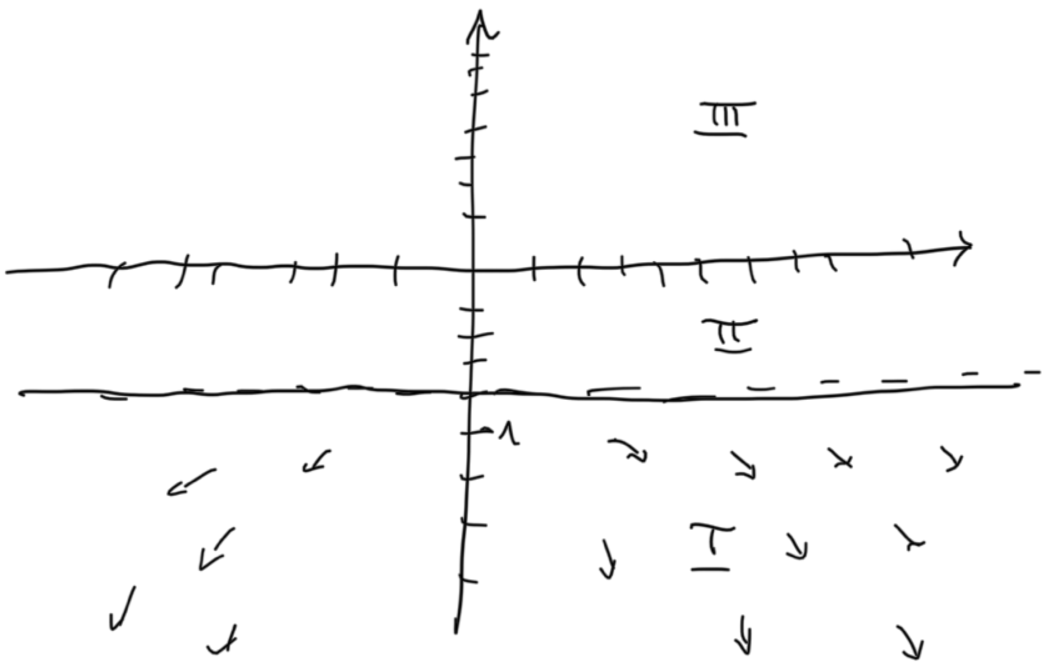
$$\frac{d}{dt}\left(-x(-t)\right) = -x'(-t)(-1)$$
$$= \boxed{-(-y(-t))(-1)}$$
$$= -y(-t) \quad \text{OK}.$$

$$\frac{d}{dt}\, y(-t) = y'(-t)(-1)$$
$$= x(-t)(1+y(-t))(-1)$$

$$= (-x(-t))(1+y(-t))$$



On définit trois régions



$$\mathrm{I} = \{(x,y) \mid x > 0,\ y < -1\}$$

$$x' = -y > 0$$

$$y' < 0$$

deux possibilités pour $x(t)$: $\lim_{t \to t_+} x(t) = x_0 < \infty$

$\lim_{t \to t_+} x(t) = \infty$

" $y(t)$: $\lim y(t) = y_0 < \infty$

$\lim_{t \to t_+} y(t) = -\infty$

observer que si $\boxed{\begin{array}{l}\lim x(t) = x_0 \\ \lim y(t) = y_0\end{array}}$

par sortie de compact $t_+ = +\infty$

on obtient une contradiction

car

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = y_0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \dot{y}(t) = x_0(1+y_0)$$

<u>lemme</u> : si $x(t)$ est de classe C^1

et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$ et $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}(t) = l}$

alors $l = 0$.

<u>preuve</u> : si $l > 0$ ($l < 0$ est analogue)

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\,ds > (l-\varepsilon)(t-t_0)$$

pour un choix de t suffisament grand

contradiction. ∎

3 possibilités : $\quad x(t) \xrightarrow{t\to t_+} x_0$, $y(t) \longrightarrow -\infty$

$x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow y_0$

$x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow -\infty$.

On exclut les deux premières possibilités :

<u>lemme</u> : supposons $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \underline{l}$ $\left(\begin{array}{c}\text{ou}\\ \infty\end{array}\right)$

alors $\dfrac{y(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$

preuve : on ... $\varepsilon > 0$ $\exists x_0$ t.q.

preuve. on fixe $\varepsilon > 0$ $\exists x_1$ t.q.

$$\forall x > x_1 \quad |y'(x) - l| < \varepsilon$$

$$y(x) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x} y'(s)\,ds$$

$$\frac{y(x)}{x} - l = \underbrace{\frac{y(x_1)}{x}}_{\to 0} + \frac{1}{x}\int_{x_1}^{x} y'(s)\,ds - l$$

$$\frac{1}{x}\int_{x_1}^{x} y'(s)\,ds - l = \underbrace{\frac{1}{x}\int_{x_1}^{x} (y'(s) - l)\,ds}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_{x_1}^{x} l\,ds - l}_{\to 0}$$

$$\left|\frac{y(x)}{x} - l\right| \longrightarrow 0$$

si x est grand

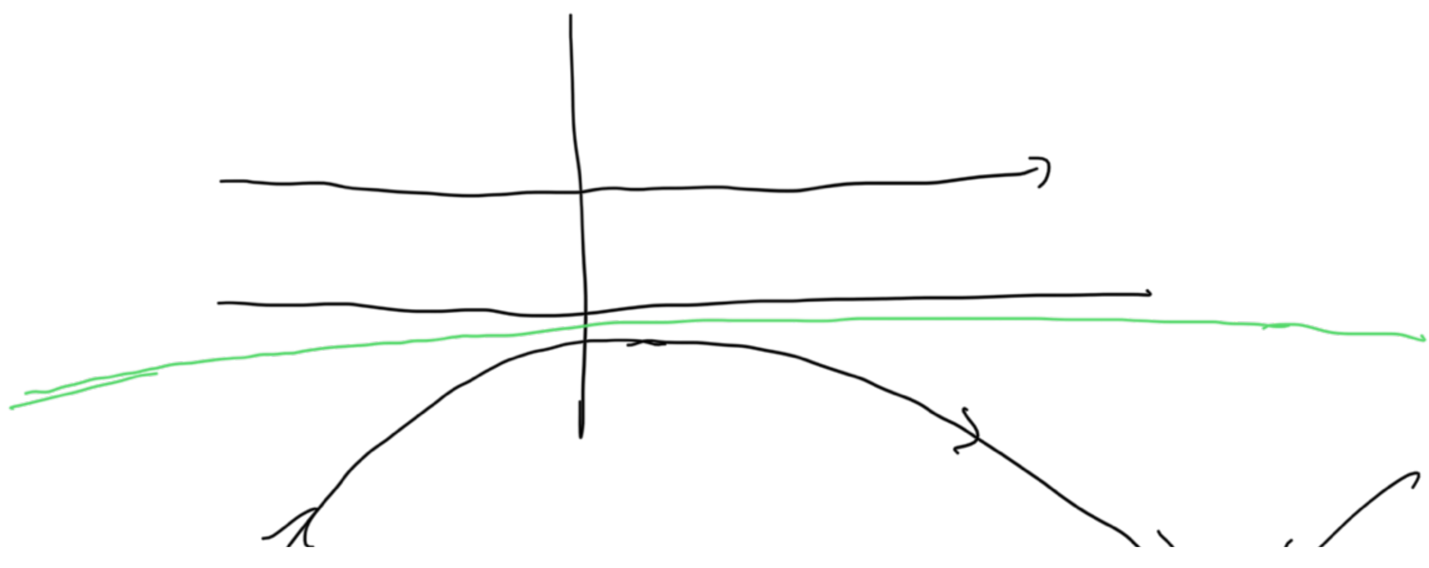
si $\boxed{\begin{cases} x(t) \longrightarrow +\infty \\ y(t) \longrightarrow y_0 < 0 \end{cases}} \Longrightarrow y'(t) = x(1+y) \to -\infty$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x(t)(1+y(t))}{-y(t)} \longrightarrow -\infty$$

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow 0$$

contradiction avec le lemme.

Analoguement $\begin{cases} x(t) \longrightarrow x_0 \\ y(t) \longrightarrow -\infty \end{cases}$ est impossible



On étudie la fonction $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

On montre que $\lim_{x \to t_+} \dfrac{v(x)}{x} = -\infty$

On étudie $v'(x)$:

$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{x(1+y)}{-y}$$

$$v' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x(1+y)}{-y} - y\right)$$

On obtient

$$v' + \frac{1}{x}v = \quad + \frac{y}{x^2}$$

$$= -\frac{(1+y)}{y} = -1 - \frac{1}{y}$$

come $y \longrightarrow -\infty$ $\exists x_0$ t.q. $y(x) \leq -2$

$$\Rightarrow -1 - \frac{1}{y} \leq -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v' + \frac{1}{x}v \leq -\frac{1}{2}$$

$$\int_{x_0}^{x} \cdots (xv)' \leq -\frac{1}{2}x$$

On intègre :

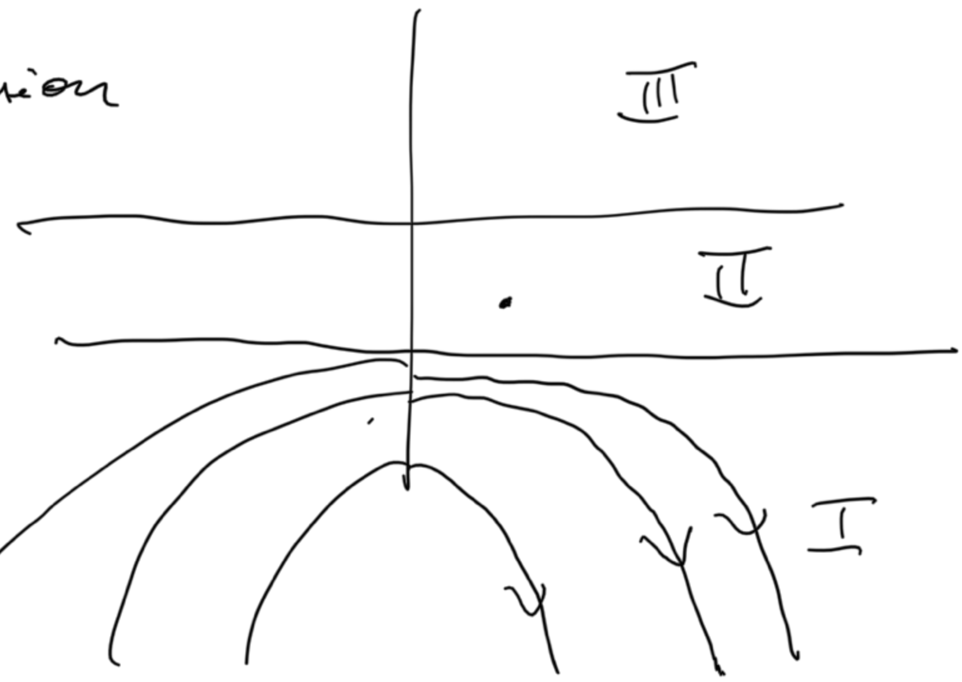
$$x\,v(x) - x_0\,v(x_0) \leq -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right)$$

$$x\,v(x) \leq x_0 v(x_0) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x_0^2}{4}$$

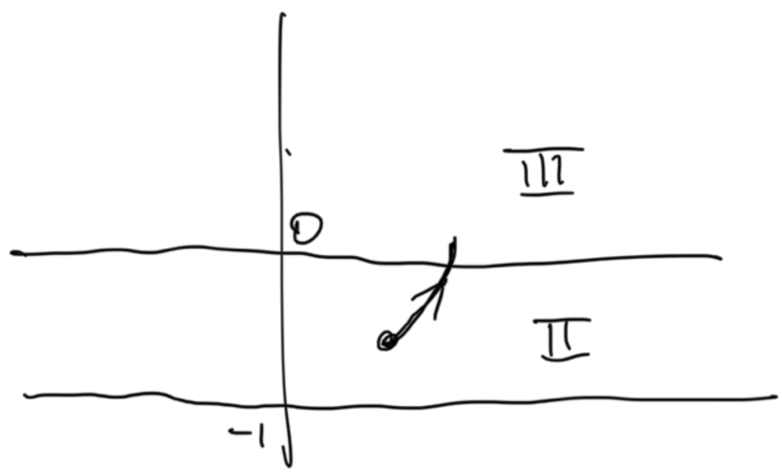
$$\Rightarrow \quad v(x) \leq \frac{x_0 v(x_0)}{x} - \frac{1}{4}x + \frac{x_0^2}{4} \to -\infty$$

conclusion

$v(x) = \frac{y(x)}{x}$



Analyse de la région II :
toute orbite commençant dans la région II va dans la région III



Dans II $\quad \dot{x}(t), \dot{y}(t) > 0$

Si la trajectoire reste dans II

on a que $\quad y(t) \leq 0 \quad \forall t \in]t_0, t_+[$

donc $\quad y(t) \xrightarrow[t \to t_+]{} \beta \leq 0$

si $x(t)$ reste borné $x(t) \xrightarrow[t \to t_+]{} \alpha > 0$

Par sortie de compact $t_+ = +\infty$

contradiction : $x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds$

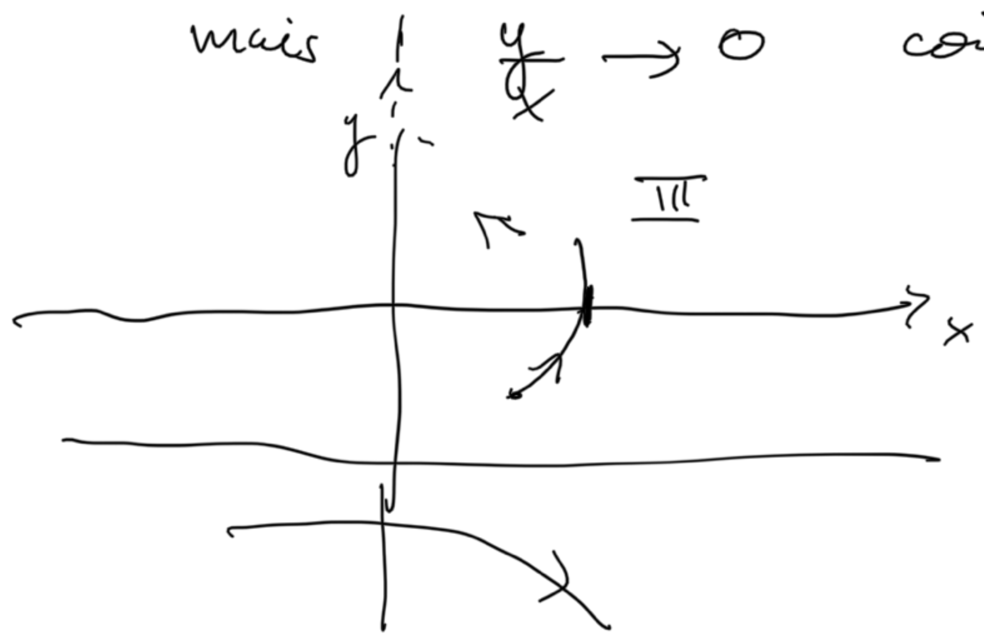
$$= \int_{t_0}^{t} -y(s)\, ds \to +\infty$$

On obtient finalement que

$x(t) \longrightarrow +\infty$

et alors $\frac{d}{dx} y(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x(1+y)}{y} \to +\infty$

mais $\frac{y}{x} \to 0$ contradiction



On montre qu'une trajectoire partant de $\underline{\mathrm{III}}$ touche l'axe $y > 0$ en un temps fini.

preuve : deux possibilités :

i) elle touche l'axe en un temps infini

ii) $\forall t \in [t_0, t_+[\quad x(t) > 0$

pour exclure i) on utilise le

lemme : Si $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to +\infty]{} (x_0, y_0)$

(equations autonomes) alors (x_0, y_0) est un point d'équilibre.

$$\dot{X}(t) = F(X(t))$$

On obtient par le lemme que des points dans l'axe y sont d'équilibre
contradiction.

pour exclure ii)

si $x(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_+[$

comme $x(t)$ est décroissante $\left(\begin{array}{c}\text{dans III} \\ \dot{x} < 0 \\ \dot{y} > 0\end{array}\right)$

$$x(t) \xrightarrow[t\to t_+]{} \alpha$$

Mais $y(t)$ est croissante $\Rightarrow y(t) \xrightarrow[t\to t_+]{} \beta$

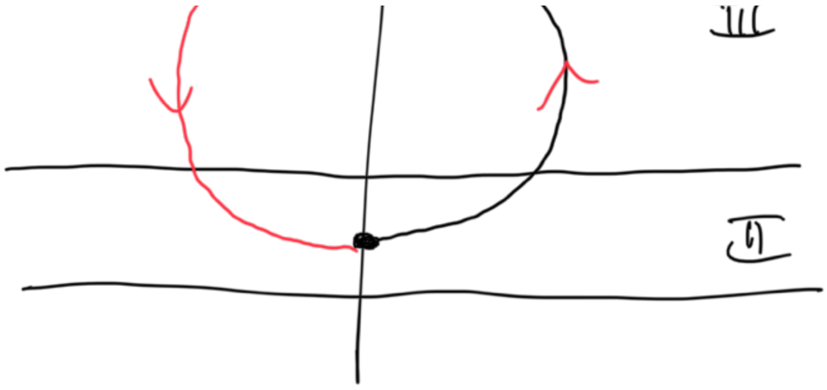
Par le théorème de sortie de compact

on a $y(t) \longrightarrow +\infty$

On a $\frac{y}{x} \xrightarrow[t\to t_+]{} +\infty$

et $\frac{dy}{dx}(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x(1+y)}{y} \longrightarrow -\alpha$

$-\alpha \neq +\infty$ impossible.



On en déduit que les orbites partant de la région II sont fermées (périodiques)

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = y - F(x) \\ y'(t) = -x \end{cases}$

Equation de Lienard

cas spécial : $F(x) = x^3 - x$ équation de Van der Pol

1) point d'équilibre,

$-x = 0 \quad , \quad y - F(x) = 0$

$y = F(0)$

$(0, F(0))$ point d'équilibre

2) linéarisation en $(0, F(0))$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dF}{dx}(0) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

valeurs propres $\lambda = \dfrac{-F'(0) \pm \sqrt{F'(0)^2 - 4}}{2}$

3)