Cours 3

Proposition : $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$

Il existe une suite de v.a.r.i $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$

sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, P)$ t.q.
↳ Lebesgue

$X_j$ est de loi $\mu_j$

preuve : On a construit v.a.i.

$$Y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} D_{\varphi_j(k)}$$

$\underline{\text{lemme}}$ $\boxed{\forall j \; Y_j \text{ est de loi uniforme sur } [0,1[}$

preuve : On pose

$$Y_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} D_{\varphi_j(k)} \longrightarrow D_k \; ?$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{On verra : la loi d'une somme de v.a.i} \\ \text{ne dépend que de la loi de chaque v.a.} \\ \text{donc la loi de } Y_{j,n} \text{ est la même}\end{array}}$

que la loi de

$$\underline{Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} D_k} \quad \text{développement dyadique dans } [0,1[$$

On montre alors que $Z_n \longrightarrow Z$ = identité sur $[0,1[$

Pour obtenir la loi de $Y_j$ :

$$Y_j = \lim_{n \to \infty} Y_{j,n} \quad (\text{croissante})$$

$$\Rightarrow P(Y_j \leq y) = \lim_{n\to\infty} P(Y_{j,n} \leq y) \quad \Big\} \text{ même loi}$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq y)$$
$$= P(Z \leq y) = y$$
(car $Z$ = identité)

$\boxtimes$

<u>Lemme</u> : (simulation d'une v.a)

Soit $Y$ v.a.r de loi uniforme sur $[0,1]$

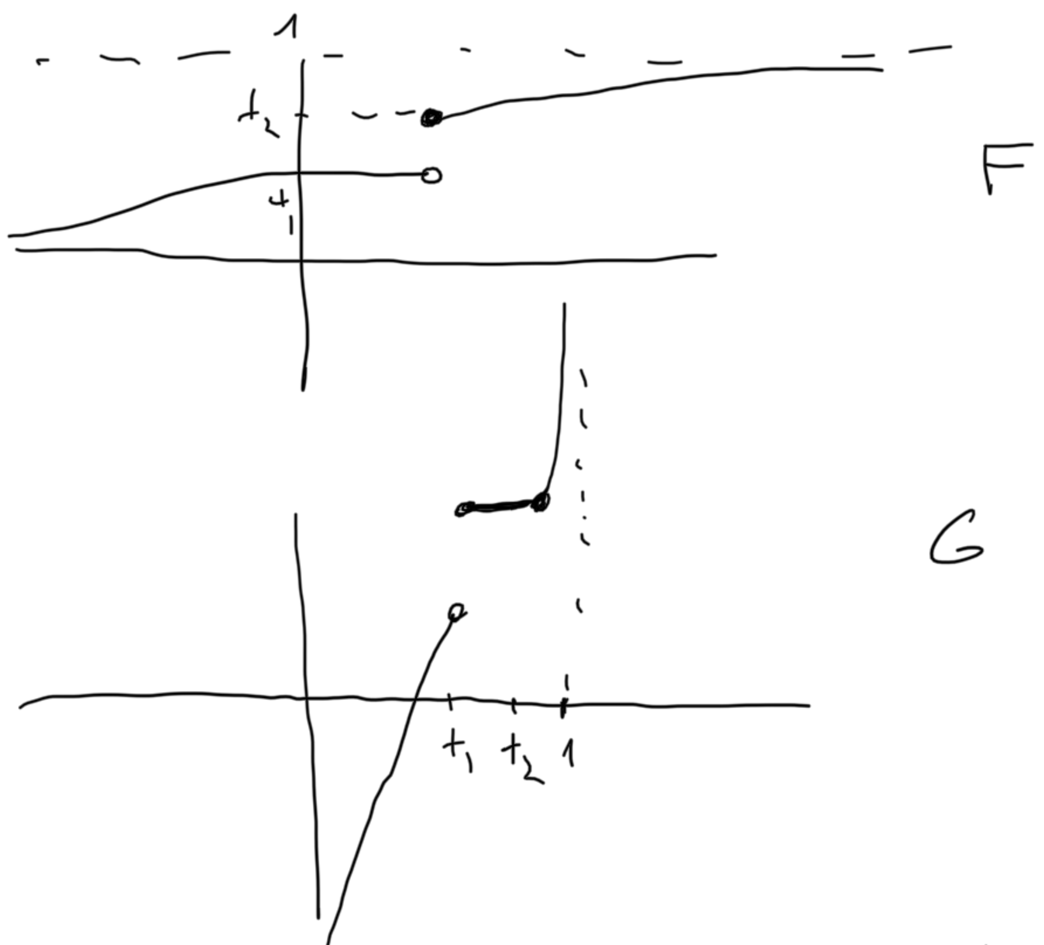
On fixe une fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to [0,1]$

On définit la pseudo-inverse

$$\forall t \quad G(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\}$$

Alors $G(Y)$ admet $F$ comme fonction de répartition.

Exemple :




<u>preuve</u> : On observe que par définition

$$F(x) \geq t \iff x \geq G(t)$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad P(G(Y) \leq x) = P(Y \leq F(x)) = F(x)$

donc $F(x)$ est la fonction de répartition de $G(Y)$.

$\blacksquare$

A partir de $Y_j$ on compose avec les fonction $G_j$ obtenue par lemme à partir des lois $\mu_j$ :

$G_j(Y_j)$ est la loi $\mu_j$ et sont indépendantes

$\blacksquare$

## 9.4 Sommes de variables aléatoires indépendantes.

Soient $\mu$ et $\nu$ mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$

**Définition** (Produit de convolution de deux mesures)

$\mu * \nu$ est la mesure image de $\mu \otimes \nu$ l'application $(x,y) \xrightarrow{S} x+y$

Remarque : $\forall \varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)\, \mu * \nu(dz) \underset{\text{définition}}{=} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, \mu \otimes \nu(dx\,dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, \mu(dx)\, \nu(dy)$$

par Fubini-Tonnelli $= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy)$.

Proposition Soient $X, Y$ v.a.i à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

i) La loi de $X+Y$ est $P_X * P_Y$

En particulier, si $X$ est de densité $p_X$ et $Y$ est de densité $p_Y$ alors $X+Y$ est de densité la <u>convolution</u> $p_X * p_Y$.

ii) La Fonction caractéristique de $X+Y$ est

$$\Phi_{X+Y}(\xi) = \Phi_X(\xi)\,\Phi_Y(\xi)$$

(de façon équivalente : si $\mu$ et $\nu$ sont deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$

$$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} * \hat{\nu}$$
)

iii) si $X$ et $Y$ sont dans $L^2$ alors

$$K_{X+Y} = K_X + K_Y$$

où $K_X = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))$

En particulier si $d=1$

$$(\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var}(X))$$

d'où $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$

preuve : i) On suppose $X, Y$ v.a.i

$$\iff P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$$

Rappel : supposons $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\mathbb{E}[f] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, P_{(X,Y)}(dx\,dy)$$

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad (x,y)$$

$X, Y$ indépendantes $= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x,y)\, P_X(dx)\, P_Y(dy)$

alors $\mathbb{E}[\varphi(x+y)] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, P_X(dx)\, P_Y(dy)$

par définition $= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)\, P_X * P_Y(dz)$

si de plus $X$ est de densité $p_X$
$\phantom{si de plus } Y$ " $p_Y$

$$\mathbb{E}[\varphi(x+y)] = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)\, p_X(x)\,dx\, p_Y(y)\,dy$$

changement de variable $x+y = z \Rightarrow x = z-y$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)\, p_X(z-y)\, dz\, p_Y(y)\, dy$$

F.-T $\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} p_X(z-y)\, p_Y(y)\, dy\right)}\, dz$

donc $p_X * p_Y$ est la densité de $X+Y$.

Observer que la convolution est bien définie car $p_X$ et $p_Y$ sont dans $L^1$.

ii) Par définition :

$$\Phi_{X+Y}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi\cdot(X+Y)}\right]$$

par F.-T. $\quad = \mathbb{E}[e^{i\xi X}]\,\mathbb{E}[e^{i\xi Y}]$

$$= \Phi_X(\xi)\,\Phi_Y(\xi)$$

iii) Matrice de covariance :

$$X = (X_1, \dots, X_d) \quad Y = (Y_1, \dots, Y_d)$$

indépendantes $\Rightarrow \underline{\mathrm{cov}(X_i, Y_j) = 0} \quad \forall i, j$

par définition : $\left(\mathrm{cov}(X_i + Y_i, X_j + Y_j)\right)$ est la matrice de covariance de $X+Y$

$$= \left(\mathrm{cov}(X_i, X_j) + \mathrm{cov}(Y_i, Y_j)\right)$$

d'où

$$K_{X+Y} = K_X + K_Y$$

$\boxtimes$

Problème : Trouver la loi d'une somme d'un grand nombre de v.a.i.

On notera souvent $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la somme de $n$ variables aléatoires

Théorème (loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r.i de même loi. Si $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ alors

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n \to \infty]{L^2} \mathbb{E}[X_1]$$

$n \to \infty$

preuve : $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n} S_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1]$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] \xrightarrow{?} 0$$

$$\frac{1}{n^2} \text{var}(S_n)$$

mais par indépendance $\text{var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \text{var}(X_k)$

$$= n\, \text{var}(X_1)$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} n \,\text{var}(X_1)$$

$$\to 0$$

∎

Remarque : ① La preuve montre que le théorème est vraie avec les hypothèses :

- $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] \quad \forall i$
- $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$
- $\text{cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \forall i, j$

② loi faible : convergence $L^p$

loi forte : convergence p.s.

Proposition $(X_n)_{n \geq 1}$ v.a.r.i. de même loi

t.q. $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$ ← hypothèse forte.

Alors

Alors
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$$

preuve : On suppose, sans perte de généralité, que $\mathbb{E}[X_1] = 0$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \overset{\text{linéarité}}{=} \boxed{\frac{1}{n^4} \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, i_4 \\ \in \\ \{1, \dots, n\}}} \mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}]}$$

Par regroupement de paquets on obtient dans la somme que les termes où $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ est de cardinalité au plus $\underline{\underline{2}}$

Exemple : On sait que $X_1, X_2, X_3$ sont indépendants.

$\Rightarrow \quad X_1, (X_2, X_3)$ indépendants

$\Rightarrow \quad X_1, X_2^2 X_3$ indépendants

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_1 \cdot (X_2^2 X_3)] = \underbrace{\mathbb{E}[X_1]}_{= 0} \mathbb{E}[X_2^2 X_3]$$
$$= 0$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] = \frac{1}{n^4}\left( n\mathbb{E}[X_1^4] + c_n \mathbb{E}[X_1^2 X_2^2] \right)$$

où $c_n = \frac{4!}{2!2!} \binom{n}{2}$ $\longrightarrow \frac{n(n-1)}{2}$

$\frac{4!}{2!2!} \longrightarrow X_1 X_1 X_2 X_2$

$X_1 X_2 X_1 X_2$

$X_1 X_2 X_2 X_1$

$\vdots$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \leq \frac{\text{constante}}{n^2}.}$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] < \infty$ !

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] < \infty$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 < \infty$ p.s

On conclut que

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{p.s.}$$

$\blacksquare$

Corollaire : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants de même probabilité. Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{P}(A_1)$$

Interprétation de $\mathbb{P}(A_1)$ : la moyenne ou fréquence d'apparition d'un événement quand on répète une expérience un grand nombre de fois.

(le résultat de l'expérience numéro $i$ est $\mathbb{1}_{A_i}$)

<u>preuve</u>: On vérifie les hypothèses du théorème précédent pour les v.a. $\mathbb{1}_{A_i}$ :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}] = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}^4] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}] < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{P}(A_1) \qquad \blacksquare$$

Application au développement dyadique :

On rapelle que

$$\forall \omega \in [0,1[ \qquad \omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \qquad \text{où}$$

$X_k$ v.a.i de même loi

Soit $p \geq 1$ fixé. On regroupe par paquets :

$$Y_1 = (X_1, \dots, X_p)$$
$$Y_2 = (X_{p+1}, \dots, X_{2p})$$
$$\vdots$$

sont v.a.i de même loi.

On considère les événements indépendants

$$A_n = \{ Y_n = (c_1, \dots, c_p) \}$$

Par le corollaire :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} P(A_i) = \frac{1}{2^p}$$

(calculé la semaine dernière)

On utilise le même argument pour les variables $Y_1 = (X_{\ell}, \dots, X_{\ell+p-1})$

$Y_2 = (X_{\ell+2p}, \dots, X_{\ell+3p-1})$

$\vdots$

et on obtient $A_n = \{ Y_n = (i_1, \dots, i_p) \}$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} P(A_i) = \frac{1}{2^p}$$

Ainsi $\forall \ell$

$$\frac{1}{n} \# \{ j \leq n \mid X_{jp+\ell}(\omega) = i_1, \dots, X_{(j+1)p+\ell-1}(\omega) = i_p \} \longrightarrow \frac{1}{2^p}$$

conclusion:

$$\frac{1}{n} \# \{ k \leq n \mid X_{k+1}(\omega) = i_1, \dots, X_{k+p}(\omega) = i_p \} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} \frac{1}{2^p}$$

i.e. la fréquence d'apparition d'un bloc de longueur $p$ de 0 et 1 est égale à $\frac{1}{2^p}$.

Semi-groupes de convolution

$I = \underline{\mathbb{N}}$ ou $\underline{\mathbb{R}^+}$

Définition : Soit $(\mu_t)_{t\in I}$ une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. On dit que $(\mu_t)_{t\in I}$ est un semi-groupe de convolution si

$$\text{i)}\ \mu_0 = \delta_0$$

$$\text{ii)}\ \mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s \quad \forall t,s \in I$$

Remarque : si $\mu_t$ est la loi de $X_t$ et $\forall t,s \in I$ $X_t$ et $X_s$ sont indépendantes alors la loi de

$$X_t + X_s \text{ est } \mu_{t+s} = \mu_t * \mu_s .$$

<u>lemme</u> : $(\mu_t)_{t\in I}$ est un semi-groupe de convolution si $\exists\, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\text{t.q. } (*)\ \hat{\mu}_t(\xi) = (\varphi(\xi))^t \quad \forall t \in I = \mathbb{N}$$

$$\text{ou } (**)\ \hat{\mu}_t(\xi) = e^{-t\varphi(\xi)} \quad \forall t \in I = \mathbb{R}_+ .$$

<u>preuve</u> : On sait que

$$\widehat{\mu_t * \mu_{t'}} = \hat{\mu}_t * \hat{\mu}_{t'}$$

par définition $(\mu_t)_{t \in I}$ est semi-groupe de convolution ssi

$$\widehat{\mu_t * \mu_{t'}} = \mu_{t+t'} \quad \forall t, t' \in I$$

ssi $\quad \hat{\mu}_t \overset{(1)}{*} \hat{\mu}_{t'} = \mu_{t+t'} \quad *$

On vérifie maintenant que $(*)$ et $(**)$ satisfont la condition $*$

$$(\varphi(\xi))^t \cdot (\varphi(\xi))^{t'} = \varphi(\xi)^{t+t'} \ldots$$

$\boxtimes$

Exemples (1) $\forall n\ \mu_n$ de loi binômiale $B(n,p)$ où $p \in [0,1]$ : $P(X_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$\hat{\mu}_n(\xi) = \int e^{i\xi x} dP_x(dx)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{i\xi k} \underbrace{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{i\xi} p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (e^{i\xi} p + (1-p))^n$$

$$\varphi(\xi) = e^{i\xi} p + 1 - p$$

(2) $\forall t > 0\ \mu_t$ loi de Poisson

② $\forall t \geq 0$ $\mu_t$ loi de Poisson de paramètre $t$ :

$$P_t(X_t = k) = \frac{t^k e^{-t}}{k!}$$

Alors
$$\hat{\mu}_t(\xi) = \int e^{i\xi x} P_t(dx)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\xi k} \frac{t^k e^{-t}}{k!}$$
$$= e^{-t} e^{te^{i\xi}}$$
$$= e^{-t(1-e^{i\xi})}$$

$$\psi(\xi) = (1 - e^{i\xi})$$

③ $\mu_t$ est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,t)$

$$\hat{\mu}_t(\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}}$$ exercice

- si $X$ e $Y$ v.a.i suivent des lois de Poisson de paramètre $\lambda$ et $\lambda'$ alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda'$

- si $X$ et $Y$ v.a.i sont de lois gaussiennes $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m',\sigma'^2)$ alors $X+Y$ suit une loi $\mathcal{N}(m+m',\sigma^2+\sigma'^2)$.

exercice.

# Chapitre 10 : Convergence de variables aléatoires.

- loi des grands nombres (Forte)
- théorème central limite.

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. $X$ v.a.

Définition (1) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$ si

$$P\left(\{\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$$

(2) $X_n \xrightarrow{L^p} X$ $p\in[1,\infty[$

(2) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ $\quad p \in [0, \infty[$

si $\displaystyle \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X|^p) = 0$

(3) convergence en probabilité

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proposition : Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$ alors

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$$

preuve : $\forall \varepsilon > 0$ on définit

$$\Omega_n^{\varepsilon} = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \sup_{k \geq n} |X_k(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \right\}$$

- On observe que $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ (i.e. la suite est décroissante)

- Aussi $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X \Rightarrow P\left(\bigcap_{n\geq 1} \Omega_n\right) = 0$

  donc $\displaystyle \lim_{n\to\infty} P(\Omega_n) = 0$

- On observe que $\{\omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \subset \Omega_n$

  donc $P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \leq P(\Omega_n)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$$

La réciproque est fausse

Exemple 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ $\underline{\text{v.a.i}}$ t.q.

- $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad P(X_n = n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $X(\omega) = 0 \quad \forall \omega$

On calcule :

$$P(|X_n - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{X}| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X \quad ? \qquad \text{non}$$

On a i) $\sum_{n\geq 1} P(X_n = 0) = \sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty$

ii) $\sum P(X_n = 1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

Borel - Cantelli :

i) p.s. $\#\{n \mid X_n(\omega) = 0\}$ est infini

ii) p.s. $\#\{n \mid X_n(\omega) \geq 1\}$ est infini

$$\Rightarrow X_n \cancel{\xrightarrow{p.s.}} X \qquad \text{contradiction.}$$

$\cancel{n \to \infty}$

**Exemple 2** $\Omega = [1, 2]$

si $2^k \leq n < 2^{k+1}$ on définit

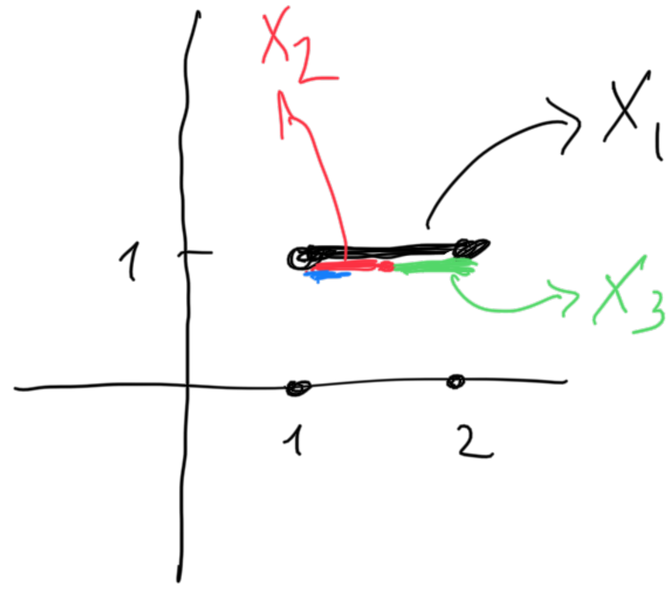
$$X_n(t) = \mathbb{1}_{\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]}$$

$$X_1(t) = \mathbb{1}_{[1, 2]}$$

$$X_2(t) = \mathbb{1}_{[1, \frac{3}{2}]}$$

$$X_3(t) = \mathbb{1}_{[\frac{3}{2}, 2]}$$

$\vdots$




$$X(\omega) = 0$$

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = \frac{1}{2^k}$$

si $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{(P)} 0$$

mais

$$\cancel{X_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} 0}$$

**Proposition:** Si $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{(P)} X$

Alors il existe une suite extraite

$$X_{n_k} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} X.$$

Remarque : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$ si et seulement si

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\bigcup_{N\geq 0} \bigcap_{k \geq N} \{|X_k - X| \leq \varepsilon\}\right) = 1$

<u>preuve</u> : Par hypothèse

$$P(|X - X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

i.e. $\forall k \quad \exists n_k$ t.q. si $n \geq n_k$

$$P(|X - X_n| > \underbrace{\tfrac{1}{k}}_{\varepsilon}) \leq \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\delta}$$

On obtient que $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X - X_{n_k}| > \frac{1}{k})$ converge

Borel-Cantelli :

$$P\left(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{k\geq N} \{|X - X_{n_k}| > \tfrac{1}{k}\}\right) = 0$$

i.e.

$$P\left(\bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{k\geq N} \{|X - X_{n_k}| < \tfrac{1}{k}\}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_{n_k} = X.$$

$\blacksquare$