Cours 4 28/04/2022

Dernier cours : $X_n \xrightarrow{p.s} X$

$X_n \xrightarrow{L^p} X$

$X_n \xrightarrow{(P)} X$

$$X_n \xrightarrow{p.s} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{(P)} X$$
$$\cancel{\Longleftarrow}$$

Proposition $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$ alors il existe suite extraite $X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$

Proposition $\forall p \in [1, \infty[$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$$

preuve : inégalité de Markov

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{\varepsilon}$$

par hypothèse $X_n \xrightarrow{L^p} X$

on veut montrer $P(|X - X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Updownarrow$$

$$= P(|X - X_n|^p > \varepsilon^p)$$

inég. Markov $\leq \dfrac{\mathbb{E}[|X - X_n|^p]}{\varepsilon^p}$

$$\Rightarrow \varepsilon^p \underbrace{P(|X - X_n|^p > \varepsilon^p)} \leq \mathbb{E}[|X - X_n|^p]$$

par hypothèse $\to 0$

$$\Rightarrow P(|X - X_n|^p > \varepsilon^p) \longrightarrow 0$$

$\Longleftrightarrow \quad P(|X - X_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0$ ∎

Proposition : On suppose $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{(P)} X$ et $|X_n| \leq Y \in L^p$. Alors il y a convergence

$$X_{n_k} \xrightarrow{L^p} X \quad \text{pour une suite extraite.}$$

__preuve__ : $X_n \xrightarrow{(P)} X \Longrightarrow X_{n_k} \xrightarrow{p.s.} X$

On applique le théorème de convergence dominée $\Longrightarrow X_{n_k} \xrightarrow{L^p} X$ ∎

Résumé : $L^p \Longrightarrow L^1 \Longrightarrow$ probabilité

$\Uparrow$

p.s.

suites extraites

Attention : $X_n \xrightarrow{(P)} 0 \qquad \mathbb{E}[X_n] \not\longrightarrow 0$

$$P(X_n = n^2) = \frac{1}{n} \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

- $X_n \xrightarrow{(P)} 0 \quad \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \right)$

- $\mathbb{E}[X_n] = n^2 . P(X_n = n^2) + \cancel{0 . P(X_n = 0)}$

$$= n^2 \frac{1}{n} = n \longrightarrow +\infty$$

Proposition : Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ suite de v.a.r. et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue. Alors

1) $X_n \xrightarrow{p.s.} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{p.s.} g(X)$

2) $X_n \xrightarrow{(P)} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{(P)} g(X)$

exercice. 1) est claire

2) ...

10.2 La loi forte de grands nombres

$$\boxed{(X_n)_{n\geq 1} \text{ v.a.i de même loi} \quad \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1]}$$

Théorème : (loi du tout ou rien) Kolmogoroff.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.i

$$\mathcal{B}_n = \sigma(X_k, k \geq n)$$

Alor la tribu asymtotique (tribu de queue) :

$$\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$$

est grossière : $\forall B \in \mathcal{B}_\infty \quad \mathbb{P}(B) \in \{0, 1\}$.

preuve : $\mathcal{D}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$

$$\underbrace{\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots \sigma(X_n)}_{\mathcal{D}_n}, \underbrace{\sigma(X_{n+1}), \dots}_{\mathcal{B}_{n+1}}$$

On obtient que $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{B}_{n+1}$ sont indépendante

On définit les classes stables par intersection finis :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\infty$$

comme les classes sont <u>indépendantes</u>

$$A \in \mathcal{C} \quad , B \in \mathcal{B}_\infty \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

on conclut que $\sigma(\mathcal{C})$ et $\sigma(\mathcal{B}_\infty)$

sont indépendantes.

mais $\boxed{\sigma(\mathcal{C}) \supseteq \mathcal{B}_\infty}$, $\sigma(\mathcal{B}_\infty) = \mathcal{B}_\infty$

i.e. $\mathcal{B}_\infty$ est independant de soit même

$$A \in \mathcal{B}_\infty \Rightarrow P(A \cap A) = P(A).P(A)$$

i.e. $P(A) = P(A).P(A)$

$$\Rightarrow \quad P(A) \in \{0,1\}$$

Proposition Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ suite v.a.i. de même loi $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$

Alors p.s $\sup_{n \geq 1} S_n = +\infty$ et

p.s $\inf_{n \geq 1} S_n = -\infty$

$(S_n = X_1 + \cdots + X_n)$

Remarque: Pour $n \to \infty$ S_n prend de valeurs positives ou négatives arbitrairement grandes.

On veut montrer

<u>preuve</u>: $\forall p \quad P(-p \leq \inf_{n \geq 1} S_n \leq \sup_{n \geq 1} S_n \leq p) = 0$

Soit $(k > 2p)$ fixé. On observe que

$$\boxed{\bigcup_{j=0}^{\infty} \underbrace{\{X_{jk+1} = X_{jk+2} = \dots = X_{jk+k} = 1\}}_{A_j} \subset \{-p \le \inf_{n\geq 1} S_n \le \sup_{n\geq 1} S_n \le p\}^c = A}$$

complémentaire

i) $j = 0 \qquad X_{0k+1} = X_2 = \dots = X_k = 1$

$$S_k = k > 2p$$

$$\Rightarrow \{X_1 = X_2 = \dots = X_k = 1\} \subset A$$

ii) supposons, par contradiction

$$\sup_{n \le (j+1)k} S_n \le p$$

Alors $\sup_{n \le jk} S_n \le \underline{p - k}$

$\left(\text{car } X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k} = 1\right)$

mais $p - k < p - 2p = -p$

$$\Rightarrow \sup_{n \le jk} S_n < -p$$

$$\inf_{n \le jk} S_n < -p$$

par indépendance

$$P(A_j) = P(\underbrace{X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k}}_{k} = 1) = \frac{1}{2^k}$$

d'où $\sum_j P(A_j) \neq \infty = \sum_j \frac{1}{2^k}$

Borel-Cantelli : $P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j\geq n} A_j\right) = 1$

En particulier

$$P\left(\bigcup_{j\geq 0}^{\infty} A_j\right) = 1$$

mais $\left(\bigcup_{j\geq 0}^{\infty} A_j\right)^c \supset \{-p \leq \inf S_n \leq \sup S_n \leq p\}$

$$\Rightarrow P\left(\{-p \leq \inf S_n \leq \sup S_n \leq p\}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow P\left(\{\inf S_n > -\infty\} \cap \{\sup S < \infty\}\right) = 0$$

(on fait l'union dénombrable des ensembles $\{-p \leq \inf S_n \leq \sup S_n \leq p\}$)

par complémentarité :

$$P\left(\{\inf S_n = -\infty\} \cup \{\sup S_n = +\infty\}\right) = 1$$

On montre maintenant que

$$P\left(\{\inf_n S_n = -\infty\}\right) > 0$$

En effet $P\left(\{\inf S_n = -\infty\}\right) = P\left(\{\sup S_n = +\infty\}\right)$

et $\underset{1}{\underset{\shortparallel}{P\left(\{\inf S_n = -\infty\} \cup \{\sup S_n = +\infty\}\right)}} \leq P\left(\{\inf S_n = -\infty\}\right) + P\left(\{\sup S_n = +\infty\}\right)$

$$\Rightarrow P\left(\{\inf S_n = -\infty\}\right) > 0$$

- Maintenant on vérifie que

[illegible]

$(*)\ \{\sup_n S_n = +\infty\} \in \mathcal{B}_\infty$ (dans la tribu asymptotique)

i.e. $P(\{\sup_n S_n = +\infty\}) \in \{0,1\}$

(comme >0 on obtient

$$P(\{\sup_n S_n = +\infty\}) = 1$$

$\forall k$ $\{\sup_n S_n = \infty\} = \{\sup_n (X_k + X_{k+1} + \dots + X_n) = \infty\}$
car les premiers k termes sont de somme finie.

$$\in \mathcal{B}_k = \sigma(X_k, X_{k+1}, \dots)$$

On conclut que $\{\sup_n S_n = \infty\} \in \mathcal{B}_\infty$

(loi du tout ou rien $\Rightarrow P(\{\sup_n S_n = \infty\}) = 1$)
car on a vu que
$P(\{\sup_n S_n = \infty\}) > 0$

□

<u>Théorème</u> : (loi forte des grands nombres)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.i de même loi dans L^1. Alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \mathbb{E}[X_1]$$

preuve : J. Neveu 1932-2016

On utilise la loi du tout ou rien.

Stratégie : Soit $a > \mathbb{E}[X_1]$. On montrera

que $\boxed{M = \sup_{n \geq 0} \left(S_n(\omega) - na \right) < \infty \text{ p.s}}$

(on définit $S_0 = 0$ pour que $M \geq 0$)

Alors $\forall n$ $S_n(\omega) \leq na + M$ p.s.

$$\Rightarrow \frac{S_n(\omega)}{n} \leq a + \frac{M}{n} \text{ p.s}$$

$$\Rightarrow \limsup \frac{S_n(\omega)}{n} \leq a \text{ p.s}$$

$$\Rightarrow \limsup_n \frac{S_n(\omega)}{n} \leq \mathbb{E}[X_1]$$

Analoguement on obtient

$$\liminf_n \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \mathbb{E}[X_1]$$

et la preuve est terminée.

On veut montrer que $M < \infty$ p.s.

i) $\{M < \infty\} \in \mathcal{B}_\infty$ (tribu asymptotique)

En effet $\forall k \geq 0$ fixé

$$\left\{ \sup_{n \geq 0} (S_n - na) < \infty \right\} = \left\{ \sup_{n \geq k} \left((S_n - na) - (S_k - ka) \right) < \infty \right\} \in \sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots)$$

$|X_i| < \infty$ p.s. $|S_k| < \infty$ p.s. ?

$X_i \in L^1$

$S_n - na - (S_k - ka)$ ne contient pas des premières k v.a.

ii) On montre que $P(M = \infty) < 1$ par absurde.

On définit $M_k = \sup_{0 \leq n \leq k} (S_n - na)$

$$M'_k = \sup_{0 \le n \le k} \big(\underbrace{S_{n+1} - (n+1)a - (S_1 - a)}_{S_{n+1} - S_1 - na} \big)$$

Observation : M_k et M'_k ont la même loi car elles sont définies avec la même fonction $F(Y_1, \dots, Y_n) = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - na$

$$M_k, M'_k \geq 0$$

On conclut que $M = \lim_{k \to \infty} M_k$ et $M' = \lim_{k \to \infty} M'_k$ ont la même loi aussi car M_k et M'_k sont des suites croissantes.

- $\forall k \geq 1$

$$M_{k+1} = \sup\Big(0, \sup_{1 \le n \le k+1} (S_n - na)\Big) = \sup(0, M'_k + X_1 - a)$$

$$\boxed{M_{k+1} = M'_k - \inf(a - X_1, M'_k)}$$

(on remarque que si $M'_k + X_1 - a \leq 0$
$M'_k \leq a - X_1$)

- M'_k et M_k ont la même loi dans L^1
(car chaque X_i est dans L^1 et alors $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \in L^1$)

D'où

$$\mathbb{E}[\inf(a - X_1, M'_k)] = \mathbb{E}[M'_k] - \mathbb{E}[M_{k+1}]$$

$$\mathbb{E}[\inf(a-X_1, M'_k)] = \mathbb{E}[M'_k] - \mathbb{E}[M_{k+1}]$$
$$= \mathbb{E}[M_k] - \mathbb{E}[M_{k+1}]$$
$$\leq 0 \quad \text{car } (M_k \leq M_{k+1})$$

suite croissante

comme $M'_k \geq 0$

$$|\inf(a-X_1, M'_k)| \leq |a - X_1|$$

par le théorème de convergence dominé

$$\mathbb{E}[\inf(a-X_1, M')] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[\inf(a-X_1, M'_k)]$$
$$\leq 0$$

Maintenant par absurde : si $P(M=\infty) = 1$

alors $P(M'=\infty) = 1$ (M et M' ont la même loi)

$$\Rightarrow \inf(a-X_1, M') = a - X_1 \quad \text{p.s.}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[a-X_1] \leq 0$$

absurde car $a > \mathbb{E}[X_1]$!

$\blacksquare$

Remarque : les espaces L^p sont des espaces de Banach.

$$L^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P) /_\sim$$

$$X \sim Y \Leftrightarrow X = Y \text{ p.s.}$$

Qu'en est-il de la convergence en probabilité ?

Définition : $\mathcal{L}^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace de toutes les v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$L^0 = \mathcal{L}^0_{\mathbb{R}^d}(\Omega, \mathcal{A}, P) /_{\sim}$$

$$X \sim Y \iff X = Y \quad \text{p.s.}$$

Définition ; Pour $X, Y \in L^0$

$$d(X,Y) = \mathbb{E}[\min(|X-Y|, 1)]$$

notation $= \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$

<u>Proposition</u> : d est une distance complète sur L^0 compatible avec la convergence en probabilité.

<u>preuve</u> : ① d est une métrique :

exemple : $d(X,Y) = 0 \iff \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1] = 0$

$$\iff |X-Y| = 0 \quad \text{p.s.}$$

② $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X \implies d(X_n, X) \to 0$

On fixe $0 < \varepsilon < 1$

$$d(X_n, X) = \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1]$$

$$= \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge (\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon} + \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon})$$

$$= \mathbb{E}\left[|X_n - X| \wedge 1\!\!1_{|X_n-X|>\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n - X| \wedge 1\!\!1_{|X_n-X|\leq\varepsilon}\right]$$

$$\leq \underline{P(|X_n - X| > \varepsilon)} + \underline{\varepsilon}$$

Par définition de convergence en probabilité

$$\forall \varepsilon' \; \exists N \text{ t.q. } n > N \Rightarrow P(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon'$$

$$\Rightarrow d(X_n, X) < \varepsilon' + \varepsilon \quad \forall n > N$$

$$\Rightarrow d(X_n, X) \longrightarrow 0$$

(3) $d(X_n, X) \longrightarrow 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$

On utilise le même calcul :

$$d(X_n, X) = \mathbb{E}\left[|X_n - X| \wedge 1\!\!1\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[|X_n - X| \wedge 1\!\!1_{|X_n-X|>\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n - X| \wedge 1\!\!1_{|X_n-X|\leq\varepsilon}\right]$$

$$\geq \varepsilon P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

d'où $\quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$

(4) L^0 est complète pour la métrique d.

idée : On fixe une suite de Cauchy X_n pour d. Il existe une suite extraite $Y_n = X_n$ t.q.

$$d(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$$

Alors
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} |Y_{k+1} - Y_k| \wedge 1\Big]$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} d\big(Y_k, Y_{k+1}\big) < \infty$$

d'où $\displaystyle\sum_1^{\infty} |Y_{k+1} - Y_k| \wedge 1 < \infty$ p.s

* $\Rightarrow \displaystyle\sum_1^{\infty} |Y_{k+1} - Y_k| < \infty$ p.s.

(car si $|Y_{k+1} - Y_k| > 1$ alors $|Y_{k+1} - Y_k| \wedge 1 = 1$)

$\Rightarrow$ il existe p.s. un nombre fini de k t.q. $|Y_{k+1} - Y_k| \wedge 1 = 1$

On obtient que la série
$$X = Y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (Y_{k+1} - Y_k) \in L^0$$

$$Y_k \xrightarrow{p.s} X$$

$$\Rightarrow d(X, Y_k) = \mathbb{E}[|Y_k - X| \wedge 1] \xrightarrow[k \to \infty]{\text{convergence dominée}} 0$$

$\blacksquare$

10.3 Convergence en loi

Rappel d'analyse:

Définition : E espace topologique et μ mesure borélienne sur E. On dit que μ est une mesure de Radon si $\mu(K) < \infty$ $\forall K \subset E$ compact.

Remarque : Si μ est mesure de probabilité μ est mesure de Radon.

Proposition : (régularité des mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$)
Soit μ mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$. Alors

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U \text{ ouvert}\}$$
$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\}$$

Définition : $C_b(\mathbb{R}^d) = \{$Fonctions continues bornées$\}$

$C_c(\mathbb{R}^d) = \{$Fonctions continues à support compact$\}$

Définition : Soit μ mesure de Radon sur $\mathbb{R}^d$

① On dit que μ_n converge étroitement vers μ si

$$\int \varphi \, \mu_n \longrightarrow \int \varphi \, \mu \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

notation $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

(2) On dit que μ_n converge vaguement vers μ si

$$\int \varphi \mu_n \longrightarrow \int \varphi \mu \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$$

notation $\mu_n \xrightarrow{(v)} \mu$

Remarque $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu \Longrightarrow \mu_n \xrightarrow{(v)} \mu$