cours 5

Remarque sur la preuve loi forte de grands nombres

$$M = \sup_{n \geq 0} \left(S_n(\omega) - na \right)$$

$$\{M < \infty\} \in \mathcal{B}_\infty$$

$$\left\{ \sup_{n\geq 0} (S_n - na) < \infty \right\} = \left\{ \sup_{n \geq k} (S_n - na) - (S_k - ka) < \infty \right\}$$

On rajoute à chaque tribu $\mathcal{A}_{X_n}$ les ensembles de mesures nulles.

$\{X_i = \infty\}$ est de mesure nulle

car $X_i \in L^1$.

10.3 Convergence en loi

Définition ① On dit que $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

si $\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ $\int \varphi \mu_n(dx) \to \int \varphi \mu(dx)$

② $\mu_n \xrightarrow{(v)} \mu$

si $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ $\int \varphi \mu_n(dx) \to \int \varphi \mu(dx)$

<u>Exemple</u> : On considère $\mu_n = \delta_{x_n}$ $x_n \in \mathbb{R}$

$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R})$ $\int \varphi \mu_n(dx) = \varphi(x_n)$

- Supposons que $x_n \longrightarrow x$

alors $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ (φ est continue)

On définit $\mu = \delta_x$:

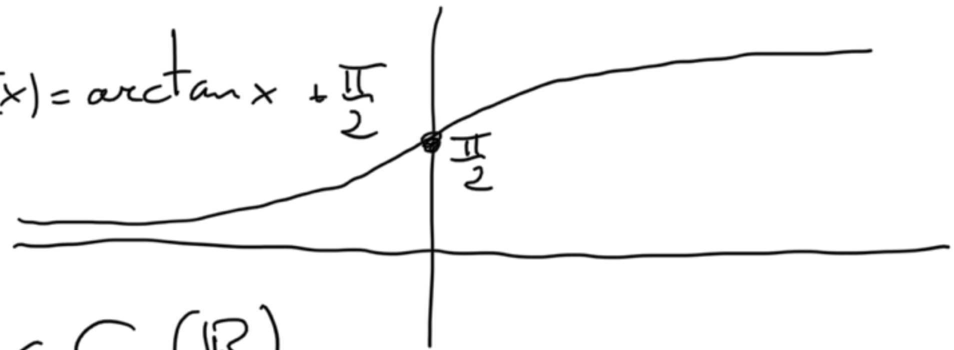
$$\int \varphi \mu_n(dx) \longrightarrow \int \varphi \mu(dx)$$

i.e. $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

- Supposons que $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

On montre que $\mu = \delta_x$ où $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

Soit $F(x) = \arctan x + \frac{\pi}{2}$



$F \in C_b(\mathbb{R})$

On a $\int F \mu_n = F(x_n) \longrightarrow \int F\mu \in [0,\pi]$

car $0 < F < \pi$

- On montre d'abord que $\int F\mu \notin \{0,\pi\}$

pour 0 : si $\int F\mu = 0 \Longrightarrow x_n \longrightarrow -\infty$

d'où $\int \varphi \mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R})$

impossible (car $\int 1 \mu_n = 1 \Longrightarrow \int 1 \mu = 1$)

Analoguement $\int F\mu \neq \pi$.

- On conclut que $\underbrace{\int F\mu}_{= y} \in]0,\pi[$

Soit $x = F^{-1}(y)$

On a $F(x_n) \longrightarrow y$ (convergence étroite)

$x_n \longrightarrow F^{-1}(y) = x$

conclusion : $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu \implies x_n \longrightarrow x$

Exemple : On considère $\mu_n = \delta_n$

$$\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{(v)} 0$$

$$\varphi \in C_c(\mathbb{R}) \qquad \int \varphi \mu_n = \varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

mais $\quad \mu_n \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{(e)}} 0$

$$F \in C_b(\mathbb{R}) \qquad \int F \mu_n = F(n)$$

en général ne converge pas.

Proposition : Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ suite de mesure de probabilités et μ mesure de probabilité (sur $\mathbb{R}^d$).

Alors $\quad \mu_n \xrightarrow{(e)} \mu \iff \mu_n \xrightarrow{(v)} \mu$

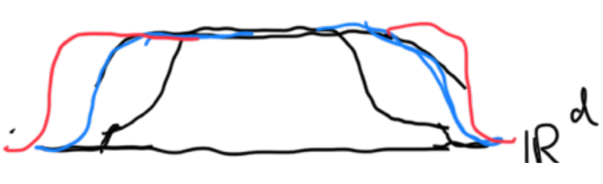
preuve : $\implies$ (car $C_c(\mathbb{R}^d) \subset C_b(\mathbb{R}^d)$)

$\impliedby$ On veut montrer

$$\forall F \in C_b(\mathbb{R}^d) \quad \int F \mu_n \longrightarrow \int F \mu .$$

- Il existe $0 \leq \varphi \leq 1$ $\quad \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ t.q

$$(*) \quad \int \varphi \mu(dx) > \mu(\mathbb{R}^d) - \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} \mu(\mathbb{R}^d) = 1 \\ \mu_n(\mathbb{R}^d) = 1 \end{pmatrix}$$



convergence vague : $\exists N \quad \forall n > N \quad \underbrace{\int \varphi \mu_n(dx)}_{\downarrow\ \int \varphi \mu(dx)} \overset{(**)}{>} \mu_n(\mathbb{R}^d) - 2\varepsilon$

Aussi $\quad F \in C_b(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi F \in C_c(\mathbb{R}^d)$

convergence vague :
$\exists M \quad \forall n > M \quad \left| \int \varphi F \mu_n(dx) - \int \varphi F \mu(dx) \right| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$

$\forall n > M, N$ on a

$$\left| \int F\mu_n - \int F\mu \right| \leq \left| \underline{\int \varphi F \mu_n - \int \varphi F \mu} \right|$$

$$+ \left| \int (1-\varphi) F \mu_n \right| + \left| \int (1-\varphi) F \mu \right|$$

$$\leq \varepsilon + \sup |F| \left(\int (1-\varphi)\mu_n + \int (1-\varphi)\mu \right)$$

$\int (1-\varphi)\mu_n \geq 0$, $(**)\ \varepsilon \to 0$: $\to 0$; $\int (1-\varphi)\mu \geq 0$, $\varepsilon \to 0$ $(*)$: $\to 0$

conclusion $\quad \int F\mu_n \longrightarrow \int F\mu \quad \forall F \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

$\blacksquare$

Définition : Une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une v.a. X

si $\quad P_{X_n} \xrightarrow{(e)} P_X$

i.e. $\quad \forall F \in C_b(\mathbb{R}^d) \quad \mathbb{E}[F(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[F(X)]$

notation : $\quad X_n \xrightarrow[n \to \infty]{(\text{loi})} X$

Remarque: (1) par la proposition précédente il suffit de vérifier que $P_{X_n} \xrightarrow{(v)} P_X$

(2) la convergence ne dépend que des lois des v.a. X_n

Proposition: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X \implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} X$

preuve: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X \implies \exists$ suite extraite t.q.

$$X_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$$

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$

- $|f(X_{n_k})| \leq \sup_{\mathbb{R}^d} |f|$
- $f(X_{n_k}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} f(X)$

Maintenat par le théorème de convergence dominé

$$\mathbb{E}[f(X_{n_k})] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$$

il faut vérifier que $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$

Par contradiction $\exists \varepsilon\ \forall n\ \exists n_\ell > n$ t.q.

$$|\mathbb{E}[f(X_{n_\ell})] - \mathbb{E}[f(X)]| > \varepsilon$$

mais la suite X_{n_ℓ} converge en probabilité et donc pour une suite extraite $X_{n_{\ell_k}} \xrightarrow{p.s.} X$

absurde

■

$$L^1 \implies (P) \implies (loi)$$

$$\Uparrow$$

Exemples

① $(X_n)_{n\geq 1}$ X_n de même loi que $-X$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$X_n \xrightarrow{(loi)} -X \quad (\text{loi constante})$$

mais X_n ne converge pas en probabilité

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|2X| > \varepsilon)$$
$$= P\left(|X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq 0$$

② Exercice : Si $X_n \xrightarrow{loi}$ constante

alors $X_n \xrightarrow{P}$ constante

(réciproque de la proposition dans le cas X constant)

Cas spécial : v.a. à valeurs entières.

Proposition : $(X_n)_{n\geq 1}$, X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Alors sont équivalents :

i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} X$

ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$

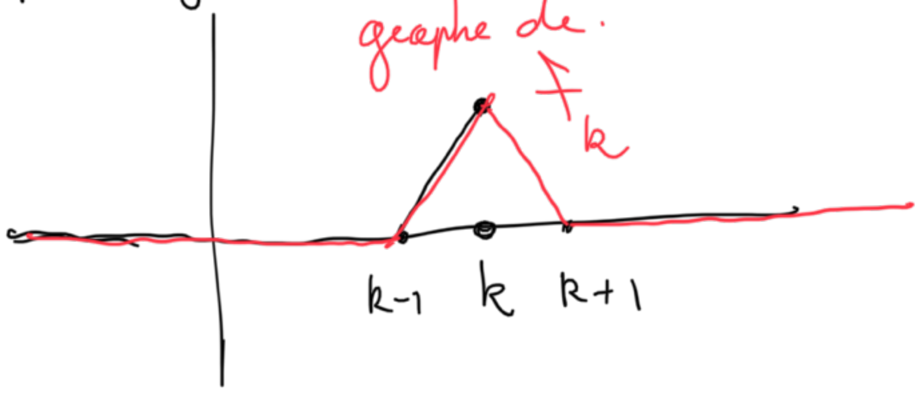
admis iii) $G_{X_n} \longrightarrow G_X$ converge sur $[0,1]$

(utilise la théorie de fonctions holomorphes) où $G_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(Y=k)$ est la fonction génératrice de la v.a. Y.

preuve : i) $\Rightarrow$ ii) On choisit une fonction

$$f_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{en } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et on la prolonge à une fonction continue bornée.



$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X \quad \Rightarrow \mathbb{E}[f_k(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f_k(X)]$$

$$\qquad\qquad \overset{\|}{P(X_n = k)} \qquad\qquad \overset{\|}{P(X = k)}$$

$$\Rightarrow \quad P(X_n = k) \longrightarrow P(X = k)$$

ii) $\Rightarrow$ i) On suppose $P(X_n = k) \longrightarrow P(X = k)$ $\forall k$

Soit f continue de support compact $[0, N]$

alors $\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{k=1}^{N} f(k) P(X_n = k)$

$$\Big\downarrow\, n \to \infty$$

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) P(X = k) = \mathbb{E}[f(X)]$$

$$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X$$

$\square$

Exemple : Soit (X_n) suite de v.a.r à densité $p_n(x)$. Supposons

- $p_n(x) \xrightarrow{p.s.} p(x)$ (densité d'une v.a.r. X)

• $|p_n(x)| \leqslant q(x) \quad q \in L^1$

T.C.D $\quad \Longrightarrow \quad \int \varphi\, p_n(x)\,dx \longrightarrow \int \varphi\, p(x)\,dx$

$\forall \varphi \in C_b(\mathbb{R})$

i.e. $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X$

Exemple : Soit X_n de loi uniforme sur

$\left\{ \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots, 1 \right\}$

Alors $\quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X \quad$ v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$

Soit $\varphi \in C_b([0,1]) \qquad P_{X_n} = \mu_n$

$$\int \varphi\, \mu_n(dx) = \sum_{i=1}^{2^n} \varphi\left(\frac{i}{2^n}\right) \frac{1}{2^n}$$

loi uniforme $P\left(X_n = \frac{i}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \varphi\left(\frac{i}{2^n}\right)$$

$$\longrightarrow \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx$$

$\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ loi (uniforme) de X.

Proposition (dite de Portmanteau) Alexandrov

(μ_n) suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ et μ mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$

Alors sont équivalents :

i) $\quad \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{(e)} \mu$

ii) $\forall F \subset \mathbb{R}^d$ ...

ii) $\forall G \subset \mathbb{R}^d$ ouvert $\liminf_{n \to \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$

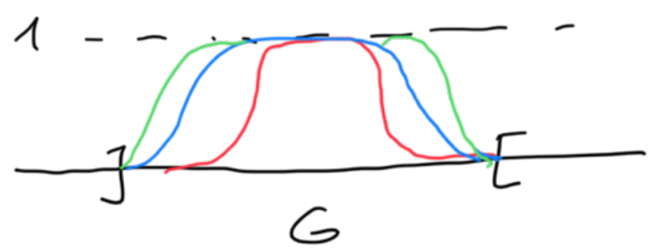
iii) $\forall F \subset \mathbb{R}^d$ fermé $\limsup_{n \to \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

iv) $\forall B \subset \mathbb{R}^d$ borélien t.q. $\underline{\mu(\partial B) = 0}$

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n(B) = \mu(B)$$

preuve : i) $\Rightarrow$ ii) Soit $G \subset \mathbb{R}^d$ ouvert

$\underset{\text{continue}}{\varphi_p} \uparrow \mathbb{1}_G \qquad 0 \leq \varphi_p \leq \mathbb{1}_G$



$$\forall p \qquad \mu_n(G) \geq \int \varphi_p \, \mu_n(dx)$$

d'où $\liminf \mu_n(G) \geq \liminf \int \varphi_p \, \mu_n(dx)$

$$\Big\downarrow \text{ convergence étroite}$$

$$\int \varphi_p \, \mu(dx)$$

$$\Big\downarrow \text{ T.C.D}$$

$$\int \mathbb{1}_G \, \mu(dx) = \mu(G)$$

$$\Rightarrow \liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$$

ii) $\Rightarrow$ iii) on prend les complémentaires

$F^c = G$

$$\mu(F) = 1 - \mu(G) \geq 1 - \liminf \mu_n(G)$$

$$= 1 - \liminf (1 - \mu_n(F))$$

$$=$$

$\limsup \mu_n(F)$

ii) ⇒ iii) ⇒ iv)

B borélien $\mu(\partial B) = 0$ $\quad \partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(\bar{B}) = \mu(\mathring{B})$$

$$\mu(B) = \mu(\mathring{B}) \leq \liminf \mu_n(\mathring{B})$$
$$\leq \limsup \mu_n(\mathring{B})$$
$$\leq \limsup \mu_n(\bar{B}) \leq \mu(\bar{B})$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mu_n(B) = \mu(B)$$

iv) ⇒ i) On suppose que $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$

$\varphi \geq 0$ (sinon on fait $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$)

$0 \leq \varphi \leq K \rightsquigarrow$ constante

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, \mu(dx) = \int_0^K \mu(\varphi(x) \geq t)\, dt}$$

En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\overbrace{\int_0^K \mathbb{1}_{\{\varphi(x) \geq t\}} dt}^{\varphi(x)} \Big) \mu(dx)$$

Fubini-Tonnelli $$= \int_0^K \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{\varphi(x) \geq t\}} \mu(dx)}_{\mu(\varphi(x) \geq t)} \Big) dt$$

- $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ continue et $C \subset \mathbb{R}$
  Alors $\partial(\varphi^{-1}(C)) \subset \varphi^{-1}(\partial C)$ <u>exercice</u>
  où $\partial C = \bar{C} \setminus \mathring{C}$

$\Rightarrow$ On obtient $\partial\{x \mid \varphi(x) \geq t\} \subset \varphi^{-1}(t)$

- Il existe au plus un nombre dénombrable de valeurs t t.q. $\underline{\mu(\{x \mid \varphi(x) = t\}) > 0}$

En effet il y a <u>au plus</u> k valeurs distinctes de t t.q. $\mu(\{x \mid \varphi(x) = t\}) \geq \frac{1}{k}$
(la mesure totale de $\mathbb{R}^d$: $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$)

$\Rightarrow dt$-p.s $\mu(\partial\{x \mid \varphi(x) \geq t\}) = 0$

condition iv) dit que

dt-p.s. $\mu_n(\{x \mid \varphi(x) \geq t\}) \to \mu(\{x \mid \varphi(x) \geq t\})$

On utilise C.D. :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mu_n(dx) = \int_0^K \mu_n(\varphi(x) \geq t)\, dt$$

$$\downarrow$$

$$\int_0^K \mu(\{x \mid \varphi(x) \geq t\})\, dt$$

$$\|$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mu(dx)$$

$\blacksquare$

Remarque : Convergence en loi et fonction de répartition.

Rappel : X v.a.r.

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$F_X :]-\infty, +\infty[\longrightarrow [0,1]$ croissante continue à droite.

- x est point de continuité si $F_X(x) = F_X(x^-)$
- x est point de discontinuité si P_X a un atome en x.

Proposition : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.r de fonction de répartition $(F_n)_{n\geq 1}$.

X v.a.r de fonction de répartition F.

Sont équivalentes :

i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ de continuité de F

$$\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

Exemple : $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

$\forall \omega \in \Omega$ $X_n(\omega) = \frac{1}{n}$ constantes

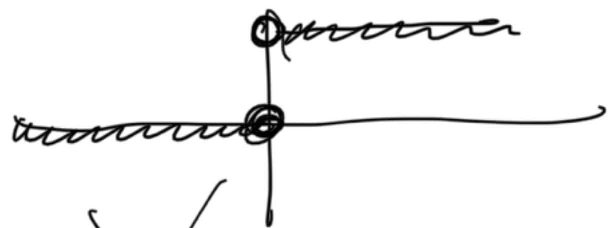
$X(\omega) = 0$

- $X_n \longrightarrow X$ convergence uniforme
- $F_n(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

mais $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

n'est une fonction de répartition car n'est pas continue à droite



$\Longrightarrow$ $X_n \cancel{\xrightarrow[n \to \infty]{(loi)}} X$

preuve de la proposition

① $X_n \xrightarrow{(loi)} X$ (i.e. $P_{X_n} \xrightarrow{(e)} P_X$)

On utilise Portmanteau $i) \Leftrightarrow iv)$

Soit B borélien avec $P_X(\partial B) = 0$

on suppose $\lim_{n \to \infty} P_{X_n}(B) = P(B)$ $(*)$

- Soit $B =]-\infty, x]$ ou x est un point de continuité de F_X.

$$\partial B = \{x\} \Rightarrow P_X(\{x\}) = P_X(X \leq x) - P_X(X < x)$$

$$= F_X(x) - F_X(x^-)$$

$$\text{point de continuité} = 0$$

d'où $\lim F_{X_n}(x)$ $F_X(x)$.

$$\lim P_{X_n}(B) \underset{(*)}{=} P_X(B)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

(2) On suppose maintenant que
$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(x)$$ pour x point de continuité.

$\boxed{\text{digression :}}$ Proposition : Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ (tribu borélienne) une classe d'ouverts stable par intersection finie. On suppose que tout ouvert de $\mathcal{B}$ est une union dénombrable ou finie d'éléments de $\mathcal{C}$. Alors si
$$\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{C}.$$
alors $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

preuve : (1) pour les unions finies :
$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$$
$$= \lim \mu_n(A_1) + \lim \mu_n(A_2) - \lim \mu_n(A_1 \cap A_2)$$
$$= \lim \left(\mu_n(A_1) + \mu_n(A_2) - \mu_n(A_1 \cap A_2)\right)$$
$$= \lim \mu_n(A_1 \cup A_2)$$

(2) pour les unions dénombrables :
$$\mu\left(\bigcup^{\infty} A_n\right) = \lim \left(\bigcup^{N} A_n\right)$$

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup A_n}_{= G}\Big) = \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{1}^{N} A_k\Big)$$

$\Rightarrow \exists N$ t.q.

$$\mu(G) \leq \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{1}^{N} A_k\Big)}_{=} + \varepsilon \quad \Leftarrow$$

$$\liminf \mu_n\Big(\bigcup^{N} A_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G)$$

$$\Big(\qquad \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\Big) \leq \mu_n(G) \Big)$$

$$\Rightarrow \mu(G) - \varepsilon \leq \liminf \mu_n(G)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(G) \leq \liminf \mu_n(G)} \quad \varepsilon \to 0$$

<u>Portmanteau</u> : ii) $\Rightarrow$ i)

$\Rightarrow$ convergence étroite $\blacksquare$

preuve de (2)

On définit C l'ensemble de points de continuité de F.

remarque : C^c est au plus dénombrable

(théorème de Froda : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone a un nombre au plus dénombrable de discontinuité.)

On définit une classe stable par intersection finie :

$\mathcal{C} = \{]a,b[\mid a<b,\ a,b \in C \}$

Il faut montrer que $\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A)$

$\forall A \in \mathcal{C}$ $\quad (\mu_n = P_{X_n},\ \mu = P_X)$

$$\mu(]a,b[) = F(b^-) - F(a) \quad (F = F_X)$$

$$F(b^-) = \lim_{x \to b} F(x) \quad \text{point de continuité}$$

$$\mu_n(]a,b[) = F_n(b^-) - F_n(a)$$

il suffit de montrer que

$$F_n(x^-) \longrightarrow F(x) \quad \forall x \in C.$$

- On a $F_n(x^-) \leq F_n(x)$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} F_n(x^-) \leq \lim_n F_n(x) \overset{\text{hypothèse}}{=} F(x)$$

- $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ t.q. $F(x-\delta) > F(x) - \varepsilon$ par continuité (et $x-\delta \in C$)

- de $F_n(x-\delta) \longrightarrow F(x-\delta)$ $\left(\begin{array}{c}\text{hypothèse} \\ x-\delta \in C\end{array}\right)$

$$F_n(x-\delta) > F(x-\delta) - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$> F(x) - 2\varepsilon$$

Mais $F_n(x^-) > F_n(x-\delta)$

$$\Rightarrow F_n(x^-) > F(x) - 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \liminf_n F_n(x^-) \geq F(x)$$

$n \to \infty$