cours 6

Convergence en loi et fonctions caractéristique

- critère de Levy qu'on utilisera dans la demonstration du théorème central limite.

Proposition : Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et μ des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$. Soit $H \subset C_b(\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\overline{H} \supset C_c(\mathbb{R}^d) \quad \text{(clôture pour la topologie de la norme sup)}.$$

Alors on a équivalence :

i) $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

ii) $\int \varphi \mu_n \longrightarrow \int \varphi \mu \quad \forall \varphi \in H$

Remarque : on a déjà montré la proposition dans le cas $H = C_c(\mathbb{R}^d)$.

i) $\Rightarrow$ ii) évident

ii) $\Rightarrow$ i) il suffit de montrer que

$$\int \varphi \mu_n \longrightarrow \int \varphi \mu \quad \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$$

* On suppose $\underset{\in H}{\varphi_k} \longrightarrow \varphi$ (hypothèse de densité)

$$\left| \int \varphi \mu_n - \int \varphi \mu \right| \leq \underbrace{\left| \int \varphi \mu_n - \int \varphi_k \mu_n \right|}_{1} + \underbrace{\left| \int \varphi_k \mu_n - \int \varphi_k \mu \right|}_{2}$$

$$+ \underbrace{\left| \int \varphi_k \mu - \int \varphi \mu \right|}_{3}$$

① $\Rightarrow \left|\int(\varphi-\varphi_k)\mu_n\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^d}|\varphi-\varphi_k| \int\mu_n \longrightarrow 0$

② $\longrightarrow 0$ par hypothèse

③ $\leq \sup_{\mathbb{R}^d}|\varphi_k-\varphi| \underbrace{\int\mu}_{=1} \xrightarrow{*} 0$ $\blacksquare$

Théorème (Paul Levy - 1886/1971) Une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ converge étroitement vers une mesure de probabilité $\underline{\mu}$ sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \qquad \hat{\mu}_n(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\mu}(\xi)$$

Rappel : $\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i\xi x}\mu(dx)$.

Remarque : • $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X \iff \Phi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X(\xi)$

fonctions caractéristiques

• $P_{X_n} \xrightarrow{(e)} P_X \iff \hat{P}_{X_n}(\xi) \longrightarrow P_X(\xi)$

preuve ① $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$

$\Rightarrow e^{i\xi x} \in C_b(\mathbb{R}^d)$

$$\int e^{i\xi x}\mu_n(dx) \longrightarrow \int e^{i\xi x}\mu(dx) \quad \left(\text{convergence étroite}\right)$$

$\Rightarrow \hat{\mu}_n(\xi) \longrightarrow \mu(\xi)$

② $\hat{\mu}_n(\xi) \longrightarrow \mu(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ (On fait la preuve pour $d=1$)

stratégie : On montre la convergence étroite pour les fonctions dans $H \subset C_b(\mathbb{R})$

Définition de H:

On considère $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (densité d'une loi gaussienne de variance σ et espérance 0)

$$H = \{ g_\sigma * f \mid \sigma > 0 ,\ f \in C_c(\mathbb{R}) \}$$

<u>lemme</u>: $\forall f \in C_c(\mathbb{R}) \quad g_\sigma * f \xrightarrow[\sigma \to 0]{} f$ dans la norme sup.

admis

Il faut montrer que :

$$\boxed{\int \underset{\substack{\cap \\ H}}{g_\sigma * f}\ \mu_n(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g_\sigma * f\ \mu(dx)}$$

Rappel: $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi)\, d\xi \Leftarrow$

$$\left(\Phi_X(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}} \quad \text{si} \quad X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \right)$$

On écrit $\int (g_\sigma * f)(y)\,\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) g_\sigma(y-x)\, dx \right) \mu(dy)$

F.-T. $\Rightarrow$ $= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g_\sigma(y-x)\,\mu(dy) \right) dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi(y-x)} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi)\, d\xi \right) \mu(dy) \right) dx ,$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi)\, \hat{\mu}(-\xi)\, d\xi \right) dx .$$

$\mathbb{R}$ où $\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \mu(dx)$

donc $\int (g_r * f)(y)\mu(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\quad - \quad \right) dx$

?

Aussi $\int (g_\sigma * f)(y)\mu_n(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{i\xi x} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) \hat{\mu}_n(-\xi) d\xi \right) dx$

Par T.C.D :

$$\underbrace{\int e^{i\xi x} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) \hat{\mu}_n(-\xi) d\xi}_{\mathrm{I}} \longrightarrow \underbrace{\int e^{i\xi x} g_{\frac{1}{\sigma}}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) d\xi}_{\mathrm{II}}$$

$\left(\text{car } |\hat{\mu}_n(\xi)| = \left| \int e^{i\xi x} \mu_n(x) \right| \leq 1 \right)$

On utilise encore une foi le T.C.D :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{I}\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{II}\, dx$$

$\left(\text{car } |\mathrm{I}(x)| \leq 1 \right)$

On conclut que $\int_{\mathbb{R}} g_\sigma * f \, \mu_n(dx) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} g_\sigma * f \, \mu(dx)$

Par la proposition précédente $\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu$.

∎

Remarque : critère de Levy (admis)

Soit X_n v.a.r. de fonctions caractéristiques

Φ_n t.q. $\Phi \longrightarrow \Phi$ convergence simple

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ vers une fonction continue en 0.

Alors Φ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

Remarques sur la convergence en loi théorèmes de Skorohod, Prokorov.

① Théorème de Skorohod (1930-2011)

On observe que la convergence en loi n'impose pas que les v.a. soient définies sur le même espace de probabilité.

Théorème (de représentation) Soient X_n, $n \geq 1$ et X v.a.r t.q. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} X$

(X_n ne sont pas forcément des v.a. définies sur un même esp. de probabilité)

Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et des v.a.r. Y_n, $n \geq 1$ et Y sur Ω de même loi que X_n et X respectivement t.q.

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} Y$$

Attention : on ne dit pas que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$!

preuve: On commence avec une v.a. U de loi uniforme sur $]0,1[$

Soient F_n les fonctions de répartition de X_n.

$F_n(x) = P(X_n \leqslant x)$ pour chaque n.

cas spécial :

On suppose que F_n et F continues et avec réciproque $F_n^{-1} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

et $F^{-1} :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

On considère alors les variables aléatoires

$$Y_n = F_n^{-1}(U) \quad \text{et} \quad Y = F^{-1}(U)$$

$Y_n \sim X_n$, $Y \sim X$ ($\sim$ ont la même loi)

(remarque : dans le cas générale on définit

$$F_n^{-1}(x) = \inf\{ y \mid F(y) \geqslant x \}$$

fonctions continues à droites croissantes..)

Maintenant $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{(\text{loi})} X \Rightarrow F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F$ simplement

(car on a supposé que tout point est de continuité)

$\Rightarrow F_n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} F^{-1}$ simplement

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Y$ simplement

(dans le cas générale $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} Y$) ∎

(2) Théorème de Prohorov (compacité relative)

Question : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.r $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\exists$ suite extraite $X_{n_k} \xrightarrow[n_k \to +\infty]{(loi)} X$??

Exemple : $(X_n)_{n\geq 1}$ $\quad X_n(\omega) = n \quad \forall \omega \in \Omega$
constantes

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = f(n) \qquad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Il n'existe pas de suite extraite convergente en loi :

supposons $X_{n_k} \xrightarrow{(loi)} X \Rightarrow \forall f \in C_b(\mathbb{R}) \ \mathbb{E}[f(X_{n_k})] \to \mathbb{E}[f(X)]$

i.e. $f(n_k) \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$

en particulier si $f \in C_c(\mathbb{R})$

$$\boxed{\mathbb{E}[f(X)] = 0} \quad \text{impossible :}$$

Si $g(\omega) = 1$ est la fonction constante

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[1] = 1$$

On sait qu'il existe $f_k \uparrow g$ $\quad f_k$ de support compact

$$\text{T.C.D} \Rightarrow \boxed{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}[f_k]}}} \longrightarrow \mathbb{E}[g] = 1$$

contradiction.

Problème : il y a une perte de masse à l'infini.

Définition : (μ_n) ... famille de mesures

Définition : $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ est tendue si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subset \mathbb{R}^d$ compacte t.q.

$$\forall i \in I \quad \mu_i(K^c) \leq \varepsilon$$

Définition : $(X_i)_{i\in I}$ une famille de v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^d$ est relativement compacte s'il existe une sous-suite extraite convergente en loi d'une suite choisit dans la famille.

Théorème : (Prohorov) Une Famille de variables aléatoires est relativement compacte si et seulement si la famille de lois associées est tendue. notation : (X_n), $P_{X_n} = \mu_n$

preuve : (1) relativement compacte $\Rightarrow$ tendue.

Par contradiction :

si (μ_n) n'est pas tendue :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists i_n \quad \mu_{i_n}(\underbrace{\|x\| > n}_{K_n^c}) > \varepsilon \qquad K_n = \{\|x\| \leq n\}$$

i.e. $\forall n \quad \mu_{i_n}(\|x\| \leq n) < 1 - \varepsilon$

$$\Rightarrow \limsup_n \mu_{i_n}(\|x\| \leq R) \leq 1 - \varepsilon \quad \forall R > 0$$

$$\Rightarrow \mu(\|x\| \leq R) \leq 1 - \varepsilon \quad \forall R > 0$$

contradiction

contradiction.

(2) tendu $\Rightarrow$ rel. compacte $(d=1)$

$(\mu_i)_{i\in I}$ tendue. On considère F_i les

Fonction de répartition de μ_i

critère pour convergence en loi avec les Fonction de répartition: $\lim_{k\to\infty} F_{i_k} = F$ au aux points de continuité de F.

$\hookrightarrow$ fonct. de répart.

contruction de F :

$\forall q \in \mathbb{Q}$ $F_n(q)$ est à valeur dans $[0,1]$

$\Rightarrow$ extraire une suite convergente

procédé diagonal : on extrait une suite convergente sur $\mathbb{Q}$

$$G_n \longrightarrow G \quad \text{sur } \mathbb{Q}$$

où $G_n = F_{k_n}$ G est croissante sur $\mathbb{Q}$

G n'est pas forcement une Fonction de répartition. On définit alors

$$F(x) = \inf\{ G(q) \mid q \in \mathbb{Q},\ q > x \}$$

$(q \geq x ?)$

est défini sur $\mathbb{R}$ et est continue à droite et croissante.

<u>lemme</u> : $G_n(x) \longrightarrow F(x)$ en tout point de continuité de F. (admis exercice)

dernier point : montrer que F est une fonction de répartition : i.e.

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

on utilise que μ_n est tendue :

$$\forall \varepsilon \ \exists M \ \forall n \quad \mu_n([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \ G_n(-2M) \leq \varepsilon \quad G_n(2M) \geq 1 - \varepsilon$$

On suppose que $2M, -2M$ sont des points de continuité.

$$\forall \varepsilon \quad F(-2M) = \lim_{n \to \infty} G_n(-2M) \leq \varepsilon$$

$$F(2M) = \lim_{n \to \infty} G_n(2M) \geq 1 - \varepsilon$$

$\blacksquare$

Le théorème central limite

Théorème : $(X_n)_{n \geq 1}$ suite v.a.r. indépendantes de même loi que X t.q. $\mathbb{E}[|X|] < \infty$

alors $$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{(P)} \mathbb{E}[X]$$

preuve : $\Phi_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda X}]$ fonction caractéristique

$$\Phi_{S_n}(\lambda) = \left(\Phi_X(\lambda)\right)^n$$ car X_i sont indépendantes

d'où $\Phi_{\frac{S_n}{n}}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda \frac{S_n}{n}}]$

$$= \Phi_{S_n}\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \left(\Phi_X\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \left(1 - \Phi_X\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)\right)^n$$

Rappel : $\Phi_X(0) = 1$

$$\Phi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$$

donc $1 - \Phi_X\left(\frac{\lambda}{n}\right) = -\frac{i\lambda}{n}\mathbb{E}[X] + o\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

$$\Rightarrow \Phi_{\frac{S_n}{n}}(\lambda) = \left(1 + \frac{i\lambda}{n}\mathbb{E}[X] + o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)^n$$

$$\longrightarrow e^{i\lambda\mathbb{E}[X]} = \Phi_{\mathbb{E}[X]}(\lambda)$$

$$\Rightarrow \Phi_{\frac{S_n}{n}}(\lambda) \longrightarrow \Phi_{\mathbb{E}[X]}(\lambda)$$

Par le théorème de Levy :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{(loi)} \mathbb{E}[X]$$

Par l'exercice $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} X$ (↳ constante) $\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$

alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{(P)} \mathbb{E}[X]$ ∎

Motivation : Loi forte des grands nombres :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X]$$

On veut déterminer la vitesse de convergence de $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X]$.

On calcule la variance :

$$var(S_n) = \mathbb{E}[(S_n - n\mathbb{E}[X])^2]$$

hypothèse d'indépendance $\Rightarrow$

$$= \sum_{i=1}^{n} var(S_i)$$

$$= n \, var(X)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = var(X)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_n - n\mathbb{E}[X]\right)$$ converge en loi ?

vers une v.a. de variance $var(X)$

réponse v.a. de loi normal

$$\mathcal{N}(0, var(X))$$

Théorème : (central limite) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.r. indépendantes et de même loi que X (v.a. dans L^2)

Soit $\sigma^2 = var(X)$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(S_n - n\mathbb{E}[X]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(\text{loi})} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

Remarque : cette convergence implique que
$\forall\, a, b \in \overline{\mathbb{R}} \quad a < b$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(S_n \in [n\mathbb{E}[X] + a\sqrt{n},\, n\mathbb{E}[X] + b\sqrt{n}]\right)$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

preuve : On suppose que $\mathbb{E}[X] = 0$
(quitte à substituer X_n par $X_n - \mathbb{E}[X_n]$)

- La fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$:

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(\xi) = \mathbb{E}\left[e^{i\xi\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{indépendance}}}{=} \left(\mathbb{E}\left[e^{i\xi\frac{X}{\sqrt{n}}}\right]\right)^n$$
$$= \underline{\left(\Phi_X\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n}$$

- Proche de $\xi = 0$

$$\Phi_X(\xi) = 1 + i\cancelto{0}{\mathbb{E}[X]}\,\xi - \frac{1}{2}\xi^2\mathbb{E}[X^2] + o(\xi^2)$$
(vu dans le cours de proba)

$$= 1 - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2 + o(\xi^2)$$
$$\uparrow \quad \overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[X^2]} = \operatorname{var}(X) \text{ quand}$$

$\mathbb{E}[X] = 0$

- Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé on a

$$\Phi_X\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\sigma^2\xi^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}}$$

$$= \Phi_U(\xi)$$

où U ~~est~~ v.a. de loi normal

$\rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(\xi) \longrightarrow \Phi_U(\xi)$$

Par le théorème de Levy :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(loi)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$\blacksquare$

10/05/ pas de cours

12/05/ cours normal