Equations différentielles

Chapitre I : Théorie générale des E.D.

On considère

i) $U \subset \overset{\text{"temps"}}{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert

ii) $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue

iii) $(t_0, x_0) \in U$

Le problème de Cauchy est l'équation (différentielle)

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}} \quad \text{(condition initiale)}$$

En coordonnées : $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$F(t,x) = (F_1(t,x), \dots, F_n(t,x))$$

$$x'_1(t) = F_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$x'_2(t) = F_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$$\vdots$$

$$x'_n(t) = F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Définition : Une solution du problème de Cauchy est une fonction dérivable

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

t.q. i) $I \subset \mathbb{R}$ intervalle t.q. $t_0 \in I$

et $u(t_0) = x_0$

ii) $(t, u(t)) \in U \quad \forall t \in I$

iii) $\forall t \in I \quad u'(t) = f(t, u(t))$

Remarque : si u est solution, comme f est continue, $u'(t) = f(t, u(t))$ est continue sur I.

Proposition : Soit $u : I \to \mathbb{R}^n$ ($u \in C(I, \mathbb{R}^n)$) t.q. $(t, u(t)) \in U \quad \forall t \in I$.
Alors u est solution du problème de Cauchy si et seulement si u satisfait

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

(équation intégrale)

<u>preuve</u> : $\Rightarrow \quad u'(s) = f(s, u(s))$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

$$\| $$

$$u(t) - \underbrace{u(t_0)}_{x_0} = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

$$\iff u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\,ds$$

$$\Longleftarrow \qquad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds$$

on la dérive (on observe que le terme de droite est de classe C^1)

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

de plus $\quad u(t_0) = x_0$

(condition initiale)

Exemples :

① $\quad U = I \times \mathbb{R} \qquad f(t,x) = g(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

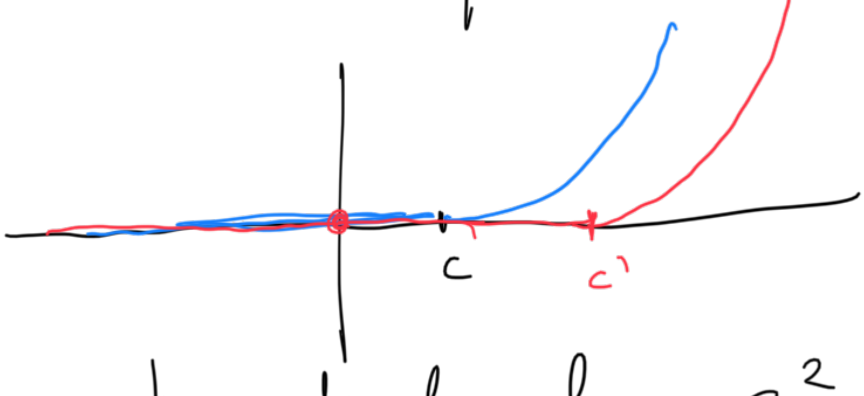
eq. intégrale : $\quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$

solution de l'équation

② $\quad U = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad f(t,x) = 3x^{2/3}$

On considère $c \in \mathbb{R}$ et on définit

$$u_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3 & t \geq c \\ 0 & t \leq c \end{cases}$$



$u_c(t)$ est de classe C^2

$$u_c'(t) = \begin{cases} 3(t-c)^2 & t \geq c \end{cases}$$

et $\quad v_c'(t) = \begin{cases} \ldots \\ 0 & t \le c \end{cases}$

$$= 3\left(v_c(t)\right)^{2/3}$$

$\Rightarrow \quad v_c(t)$ est solution de l'équation

$$x'(t) = 3(x(t))^{2/3}$$

pour $c \geq 0 \quad v_c(t)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(il n'y a pas d'unicité pour le problème de Cauchy)

③ $\quad U = \mathbb{R} \times]a, b[\qquad F(t,x) = f(x) \neq 0$

$\forall x \in]a, b[$

$f \in \mathcal{C}(]a,b[)$

$$x'(t) = f(x)$$

$$x(t_0) = x_0$$

si $v : I \to \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy alors

$$v'(t) = f(v(t)) \quad \text{et} \quad v(t_0) = x_0$$

d'où $\quad \dfrac{v'(t)}{f(v(t))} = 1$

On définit $G(x) = \int_{x_0} \frac{ds}{f(s)}$

sur $]a,b[$. Alors

$$G'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$$

$\Rightarrow G$ est inversible : $G :]a,b[\longrightarrow]b_1,b_2[$

$\exists \; G^{-1} :]b_1, b_2[\longrightarrow]a,b]$

(réciproque de G)

On a $G'(u(t))\, u'(t) = \frac{1}{f(u(t))} \cdot f(u(t)) = 1$

$$(G \circ u)'(t) = 1$$

$$G(u(t)) - \underbrace{G(u(t_0))}_{\overset{\shortparallel}{G(x_0) = 0}} = t - t_0$$

$$G(u(t)) = t - t_0$$

$$\boxed{u(t) = G^{-1}(t - t_0)}$$

remarque : $\frac{dx}{dt} = f(x)$ $\qquad f(x) > 0$

$$\Rightarrow \frac{dx}{f(x)} = dt$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f(x)}}_{G(x)} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$G(x) = t - t_0$$

$$x = G^{-1}(t - t_0)$$

(4) équation à variables séparables

$$x'(t) = g(t) f(x)$$ $$x(t_0) = x_0$$

voir en T.D.

1.1 Existence et unicité

Une formulation plus générale :

$$\Phi(x, x', t) = 0$$

où $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$$U \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

il n'existe pas toujours des solutions :

Exemple : $\begin{cases} x x' + t = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Le problème de Cauchy n'a pas de solution :

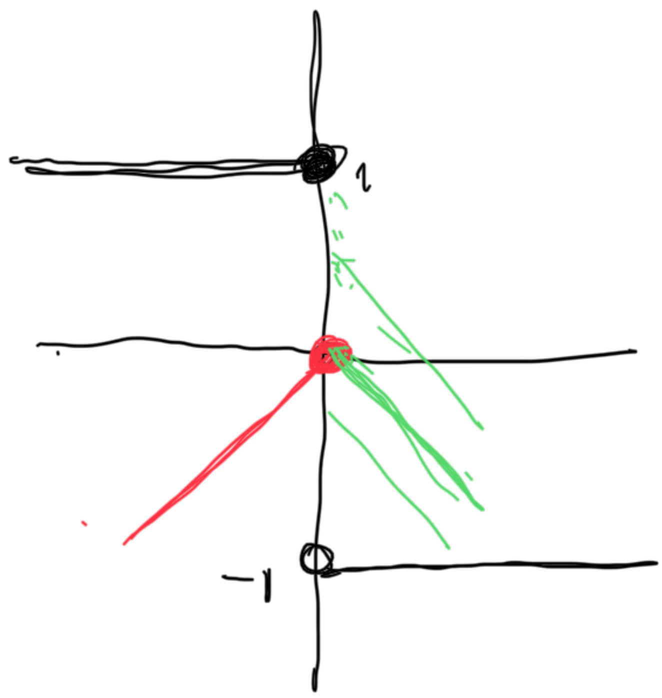
Supposons $u(t)$ est solution dans un intervalle I contenant 0.

$$\int_0^t u(s)\, u'(s)\, ds + \int_0^t s\, ds = 0$$

$$\frac{1}{2} u^2(s) \Big|^t + \frac{s^2}{2} \Big|^t = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\underset{\substack{\vee\\0}}{u^2(t)} + t^2\right) = 0 \qquad \text{impossible.}$$

Exemple : $x'(t) = \underbrace{\begin{cases} -\dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}}_{F(x,t) \text{ n'est pas continue}}$



$x(0) = 0$

si $u(t)$ est solution

$$u'(t) = -\frac{u(t)}{|u(t)|} \qquad \text{si } u(t) \neq 0$$

en $t=0$ $\quad \boxed{u'(0) = 1}$.

$t > 0 \qquad u'(t) = -1 < 0$

$t \leq 0 \qquad u'(t) = 1 > 0$

impossible

Condition sur F pour existence et unicité du problème de Cauchy ?

Définition : Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

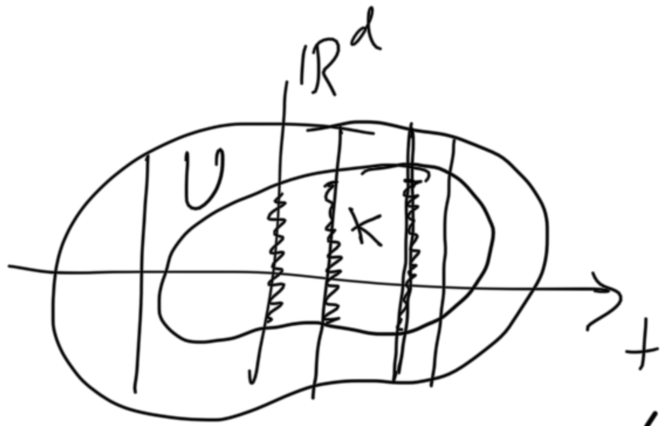
$F : U \to \mathbb{R}^n$ continue.

On dit que F est localement Lipschitz par rapport à seconde variable si

$\forall K \subset U$ compacte connexe, $\exists L > 0$

t.q. $\| F(t,x) - F(t,y) \| \leq \underline{L} \, \|x - y\|$

$\forall (t,x), (t,y) \in K$.



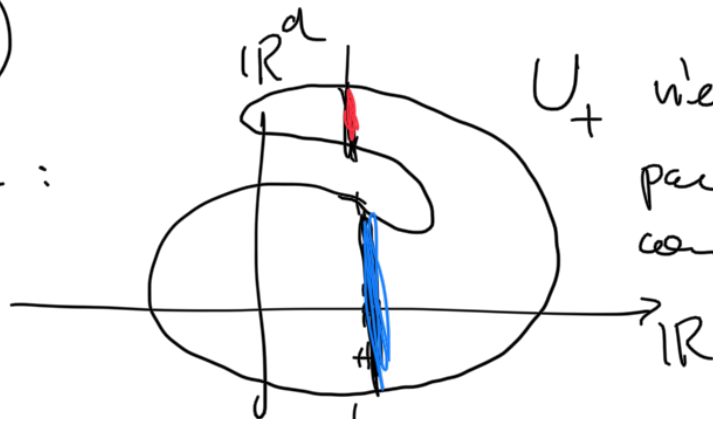
$F\big|_{(\{t\} \times \mathbb{R}^n) \cap U \cap K}$

est Lipschitz.

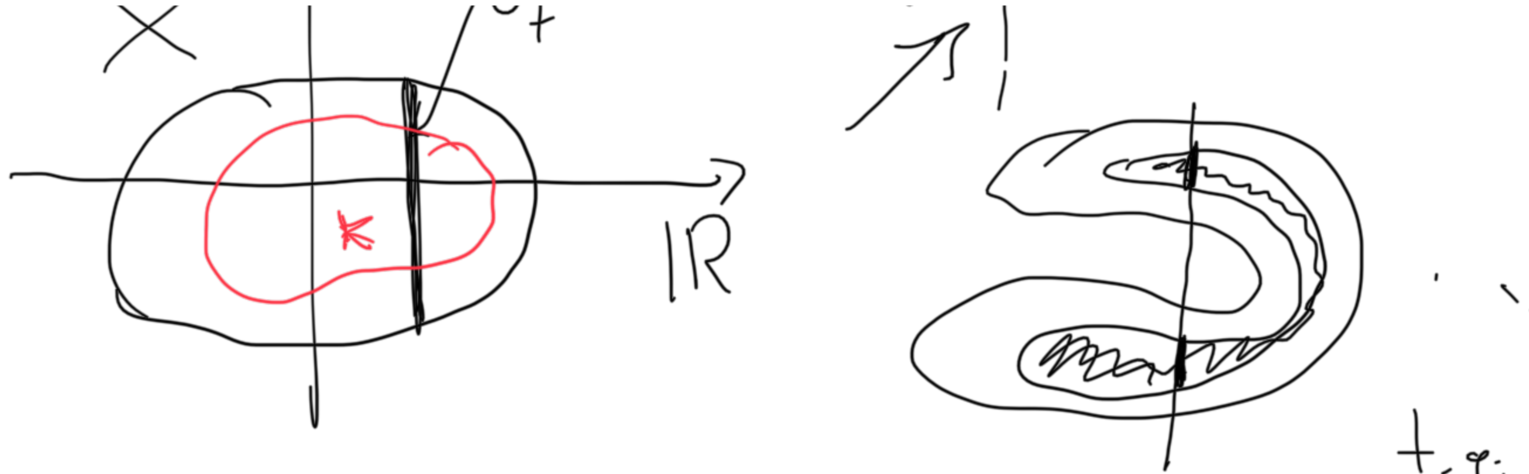
Proposition : Soit $F : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors F est localement Lipschitz sur Ω.

preuve : (dans le cas où $U_t \subset \{x \mid (t,x) \in U\}$ est convexe)

exemple :



U_t n'est pas convexe



Théorème des accroissements finis : sur K :

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq \sup_{0<\theta<1} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,\theta x+(1-\theta)y)\right\| \cdot \|x-y\|$$

$$\leq C\|x-y\|$$

$\hookrightarrow$ par compacité.

$$\left(\sup_{\substack{0<\theta<1 \\ (t,x),(t,y)\in K}} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,\theta x+(1-\theta)y) \right\| \leq C \right)$$

(J'ai fait la preuve avec l'hypothèse U_+ convexe. Exercice : compléter la preuve)

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ ouvert et

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz

par rapport à la deuxième variable dans U.

Alors $\forall (t_0,x_0)\in U$ il existe $\delta>0$

t.q. le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a une solution unique définie sur

l'intervalle $]t_0-\delta, t_0+\delta[$

idée de la preuve:

$$A \subset \mathcal{C}(]t_0-\delta, t_0+\delta[, \mathbb{R}^d)$$

$\mathcal{C}$ ⟶ fonctions continue

$T : A \longrightarrow A$

- $T(v)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$

On cherche un point fixe de cette application :

$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

$\xRightarrow{\text{proposition}}$ $v(t)$ est solution du problème de Cauchy.

On utilisera

Théorème du point fixe (lemme de contraction)

Soit (X, d) espace métrique complet et $F : X \longrightarrow X$ une contraction

$(\text{i.e. } d(F(x), F(y)) \leqslant K\, d(x,y),\ 0 \leq K < 1)$

Alors il existe un unique point fixe par F et de plus

$$\forall x \in X \quad F^n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \text{point fixe}$$

(Ici $F'(x) = F(F(x)))$.