9 juillet (vendredi)

(I) Probabilités : chapitre 9 et 10 poly Le Gall

(II) Equations différentielles poly Barilari (3 premiers chapitres)

chapitre 9 Le Gall

Indépendance

9.1 evénement indépendant

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

Définition : $(A_i)_{1 \le i \le n}$ famille d'evénement

est dite indépendante si pour tout

sous-ensemble $\{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$

$$\longrightarrow P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_p}) = P(A_{j_1}) \dots P(A_{j_p})$$

<u>Proposition</u> : $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante ssi

$$\longrightarrow P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \dots P(B_n)$$

$$\forall 1 \leq i \leq n \quad \forall B_i \in \sigma(A_i) = \{ \phi, A_i, A_i^c, \Omega \}.$$

Cette proposition suggère une définition d'indépendance de <u>tribus</u>.

9.2 Variables aléatoires et tribus indépendantes.

<u>Définition</u> : Une famille de tribus $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite indépendante ssi $\forall A_i \in \mathcal{B}_i$

$$P\left(\bigcap^n A_i\right) = \prod^n P(A_i)$$

- Une famille de tribu $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in I}$ est dite indépendante ssi chaque sous-famille fini $(\mathcal{B}_{\alpha_i})_{1 \le i \le n, \, n \in \mathbb{N}^*}$ est indépendante

- Une famille de v.a $(X_i)_{1 \le i \le n}$ est dite indépendante ssi les tribus $(\sigma(X_i))_{1 \le i \le n}$ sont indépendant.

$$\left(X_i : \Omega \longrightarrow E_i \right) \quad (E_i, \mathcal{E}_i) \text{ espaces mesurables.}$$

- Une famille de v.a $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est dite indépendante ssi chaque sous-famille finie est indépendante.

Remarques: ① Rappel $\sigma(X_i) = \{ X_i^{-1}(F) \mid F \in \mathcal{E}_i \}$

donc les v.a. $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont indépendantes

ssi les événements $(X_i^{-1}(F_i))_{1\le i\le n}$ sont

indépendants $\forall F_i \in \mathcal{E}_i$; $1\le i\le n$.

② Si les tribus $(\mathcal{B}_i)_{1\le i\le n}$

sont indépendantes et $X_i : \Omega \longrightarrow E_i$

v.a. $\mathcal{B}_i$-mesurable alors X_i, $1\le i\le n$

sont indépendantes.

$$\left(\text{car } \forall i \quad X_i^{-1}(F_i) \in \mathcal{B}_i \quad (F_i \in \mathcal{E}_i) \right)$$

③ $(A_i)_{1\le i\le n}$ sont indépendants

ssi les tribus $\sigma(A_i)_{1\le i\le n}$ le sont

(proposition de 9.1)

<u>Rappel</u> : $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de v.a. à valeurs dans $((E_i,\mathcal{E}_i))_{1\leq i\leq n}$

$$X_i : \Omega \longrightarrow E_i$$

• $(X_1,\dots,X_n)$ (est un vecteur aléatoire)

est v.a à valeur dans $(E_1\times\dots\times E_n\,,\ \mathcal{E}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{E}_n)$

$\hookrightarrow$ tribu engendrée par $\{A_1\times\dots\times A_n \mid A_i\in\mathcal{A}_i\}$

<u>théorème</u> ① $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ v.a. à valeur dans $((E_i,\mathcal{E}_i))_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes ssi <u>la loi de $(X_1,\dots,X_n)$ est le produit de lois de $X_1,\dots,X_n$</u>.

$\rightarrow$ (i.e. $P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1}\otimes\dots\otimes P_{X_n}$)

$$(X_1,\dots,X_n) \qquad X_1 \qquad X_n)$$

② De plus pour tout $\boxed{f_i : E_i \to \mathbb{R}}$, $1\le i\le n$, mesurables $\boxed{\text{positives}}$

$$\Longrightarrow \quad E\Big[\underbrace{\prod_{i=1}^{n} f(X_i)}_{f}\Big] = \prod_{i=1}^{n} E[f(X_i)]$$

__preuve__ : __Rappel__ : loi $P_{(X_1,\dots,X_n)}$:

__définition__ : $P_{(X_1,\dots,X_n)}(\underbrace{F_1\times\dots\times F_n}_{\text{pavé dans } E_1\times\dots\times E_n}) = P(\{X_1\in F_1\}\cap\dots\cap\{X_n\in F_n\})$

‖ indépendance

définition : $P_{X_1}\otimes\dots\otimes P_{X_n}(F_1\times\dots\times F_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i\in F_i)$

i) Par définition d'indépendance les deux lois sont les mêmes sur les pavés.

ii) Par le lemme de la classe monotone

$$P \qquad P\otimes\dots\otimes P$$

$$\Longrightarrow \quad P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$$

(si les mesures coïncident sur les pavés alors elles sont égales)

② conséquence de Fubini-Tonelli

<u>Rappel</u> : $(E_1 \times \dots \times E_n \,,\, \mathcal{E}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n \,,\, P_1 \otimes \dots \otimes P_n)$

F-T : $\forall F \geq 0$ mesurable sur $E_1 \times \dots \times E_n$

$$\longrightarrow \underbrace{\int_{E_1 \times \dots \times E_n} F \, d(P_1 \otimes \dots \otimes P_n)}_{(I)} = \underbrace{\int_{E_1} \left(\left(\int_{E_n} F \, P_n(dx_n) \right) \dots \right) P_1(dx_1)}_{(II)}$$

On suppose que :

- $F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$
- $P_i = P_{X_i}$ P_i est la loi de X_i

$$(I) = E\left[\prod_{i=1}^{n} F_i(X_i) \right]$$

$$(II) = \prod_{i=1}^{n} E\left[F_i(X_i) \right]$$

$$(\mathrm{I}) = (\mathrm{II})$$

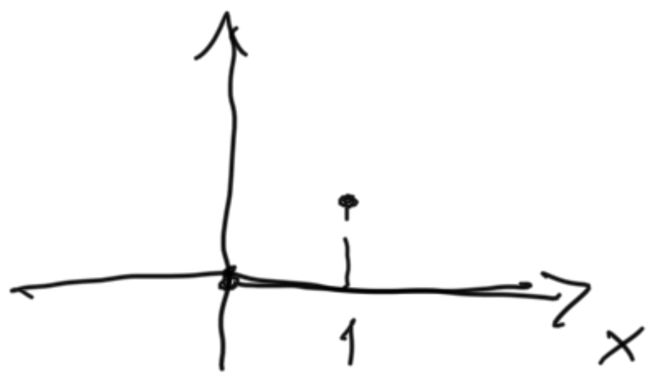
<u>Remarque</u> : On suppose que $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ est intégrable ($E[|f_i(X_i)|] < \infty$) on obtient la même formule en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue.

$E_i = \mathbb{R}$

· cas particulier : si $X_1, \dots, X_n$ v.a.r. sont indépendantes dans L^1 on a alors

$\rightarrow X_1 \cdots X_n \in L^1$ et $E[X_1 \cdots X_n] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$

Attention · $X_1, X_2 \in L^1 \not\Longrightarrow X_1 \cdot X_2 \in L^1$



$X_1 :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$X_2 :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

intégr.

$X_1 X_2 = \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable

Corollaire : Soient X_1, X_2 v.a.r. indépendantes dans L^2. Alors $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0$

preuve : rappel : $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \underbrace{E[X_1 X_2] - E[X_1]E[X_2]}_{\to\, 0}$

par la proposition précédente et la remarque.

∎

Exemple : On peut avoir deux v.a. X, Y avec $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = 0}$ mais non indépendantes.

$$\begin{cases} X \text{ v.a avec } E[X] = 0 \text{ et } E[X^3] = 0 \\ Y = X^2 \end{cases}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[\overbrace{XY}^{X^3}] - \overbrace{E[X]}^{0}E[Y] = 0$$

Mais X et Y ne sont pas indépendantes.

Faux : $P(\{X \in F_1\} \cap \{X^2 \in F_2\}) = P(X \in F_1) . P(X^2 \in F_2)$

$\forall F_1$ et F_2 (si $F_2 = F_1^2$ on a

côté gauche $P(\{X \in F_1\} \cap \{X^2 \in F_1^2\})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{P(\{X \in F_1\})} = (P(X \in F_1))^2$

droit $P(X \in F_1) . P(X^2 \in F_1^2) = (P(X \in F_1))^2$

$$P(X \in F_1) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

<u>Corollaire</u>: $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ v.a. <u>réelles</u>

i) si <u>X_i est à densité p_i</u> et les v.a sont indépendantes alors $(X_1, \dots, X_n)$ a une densité

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_1^n p_i(x_i)$$

→ ii) <u>réciproquement</u>, si la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ a une densité de la forme

$$\boxed{p(x_1, \dots, x_n) = \prod_i q_i(x_i)} \quad \text{avec}$$

$q_i \geq 0$ borélienne alors $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et la loi de X_i a une densité $\boxed{p_i(x_i) = C_i\, q_i(x_i)}$.

($C_i > 0$ une constante)

<u>preuve</u>: i) Par le théorème précédent :

$$P_{(X_1, \dots, X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}$$

loi de chaque v.a $\quad P_{X_i}(dx_i) = p_i(x_i)\, dx_i \quad$ (hypothèse)

par le théorème de <u>Fubini-Tonnelli</u>

$$dP_{(X_1, \dots, X_n)} = p(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \left(\prod_{i=1}^n p_i(x_i)\right) dx_1 \dots dx_n$$

$$\Rightarrow \quad p(x_1, \dots, x_n) = \prod^n p_i(x_i)$$

ii) Par Fubini-Tonelli on peut écrire l'intégrale comme un produit

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} p(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \prod_1^n \int_{\mathbb{R}} q_i(x_i)\,dx_i$$

$$\forall i \quad \int_{\mathbb{R}} q_i(x_i)\,dx_i = K_i \in]0,1[$$

par définition de $\boxed{p_i(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \overbrace{p(x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots x_n)}^{q_1(x_1)\dots\widehat{q_i(x_i)}\dots q_n(x_n)}\,dx_1\dots\widehat{dx_i}\dots dx_n}$

On veut montrer que

$$p_i(x_i) = C_i\, q_i(x_i)$$

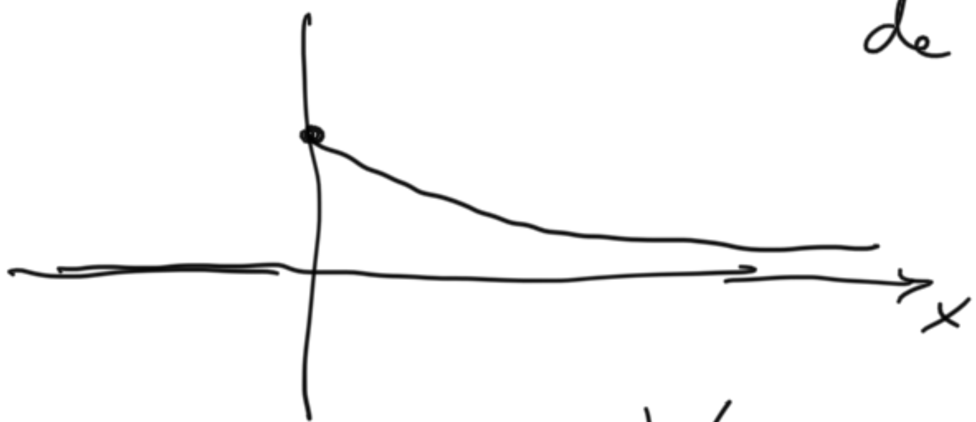
$$= \prod_{j\neq i} K_j\, q_i(x_i) = \frac{1}{K_i}\, q_i(x_i)$$

d'où $\underline{p(x_1,\dots,x_n) = \prod_1^n q_i(x_i)} = \prod_1^n p_i(x_i)$ ∎

<u>Exemple</u> : U v.a de loi exponentielle de paramètre 1.

i.e. $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

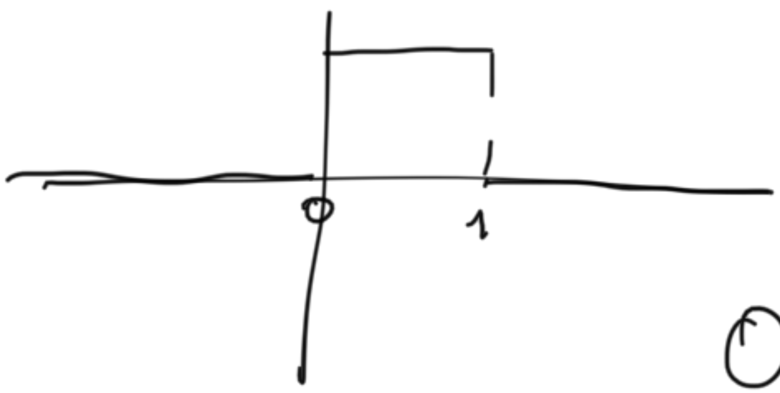
de loi avec densité $\lambda = 1$



$$\boxed{p(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$$

u

V v.a de loi uniforme sur $[0,1]$.



$$q(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

v v

On suppose U et V indépendantes

On définit $X = \sqrt{U} \cos 2\pi V$
$Y = \sqrt{U} \sin 2\pi V$

Montrer que X et Y sont indépendantes

On calcule la loi du couple et on montre que la densité de la loi se factorise.

On choisit $\varphi(X,Y)$ une fonction à valeurs réelles positive. Par Fubini-Tonelli on écrit

$$E\left(\varphi(X,Y)\right) = \int_0^\infty \int_0^1 \varphi\left(\sqrt{U}\cos 2\pi V, \sqrt{U}\sin 2\pi V\right) e^{-U}\, dU\, dV$$

changement de variable $r=\sqrt{U}$, $\theta = 2\pi V$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\, e^{-r^2} r\right) d\theta\, dr$$

changement de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\, e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

on conclut que $p(x,y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2}$ est la densité du couple.

On observe que $$p(x,y) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}}_{q_x(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}}_{q_y(y)}$$

la densité du couple se factorise.
Alors par le corollaire les variables sont indépendantes.

Exercice

<u>Proposition</u> : si $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont v.a. <u>réelles</u> alors les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont indépendantes

ii) $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n \quad P(X_1 \le a_1, \dots, X_n \le a_n) = \prod_1^n P(X_i \le a_i)$

iii) Si $f_i \in C_0^+(\mathbb{R})$ alors $E\left[\prod_i f_i(X_i)\right] = \prod_1^n E\left[f_i(X_i)\right]$

iv) La fonction caractéristique de X est
$$\Phi_X(\xi_1, \dots, \xi_n) = \prod_1^n \Phi_{X_i}(\xi_i)$$

$\cdot \quad -$

<u>Proposition</u> : Soient $(\mathcal{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$

Soient $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$ $\boxed{\text{des classes stables par intersections finies contenant } \Omega.}$
$\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i$

On suppose $\forall C_i \in \mathcal{C}_i$ $\boxed{P\left(\bigcap_1^n C_i\right) = \prod_1^n P(C_i)}$ ("indépendance des classes $\mathcal{C}_i$")

Alors $(\mathcal{B}_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille indépendante

<u>preuve</u> : lemme de la classe monotone.

On fixe $C_2, C_3, \dots, C_n$ dans $\mathcal{C}_2,$
$\mathcal{C}_3 \dots \mathcal{C}_n$

et on définit

$$\boxed{\mathcal{M}_1 = \{ B_1 \in \mathcal{B}_1 \mid P(B_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n) = P(B_1) \ldots P(C_n) \}}$$

On veut montrer que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{B}_1$!

On montre que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone.

<u>Rappel</u> : $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est classe monotone si

i) $\Omega \in \mathcal{M}_1$

exerc. $\to$ ii) si $A, B \in \mathcal{M}_1$ avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \mathcal{M}_1$

exerc. $\to$ iii) si $\underset{\mathcal{M}_1}{A_n} \subset \underset{\mathcal{M}_1}{A_{n+1}} \subset \ldots \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{M}_1$

<u>lemme</u> : $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finies alors la classe monotone engendré par $\mathcal{C}$ est $\sigma(\mathcal{C})$

la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

On sait que $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i \quad \forall i$

On revient à la preuve

$\mathcal{M}_1$ est classe monotone :

$$C_1 \in \mathcal{M}_1 \quad \forall C_1 \in \mathcal{C}_1 \quad (\Rightarrow \Omega \in \mathcal{M}_1)$$

on doit vérifier que $\underset{\mathcal{M}_1}{\overset{\wedge}{B_n}} \subset \underset{\mathcal{M}_1}{\overset{\wedge}{B_{n+1}}} \subset \cdots$

alors $\quad \cup B_n \in \mathcal{M}_1$

en effet : $P(B_n \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n) = P(B_n) \cdot P(C_2) \ldots P(C_n)$

$$\Big\downarrow \text{ convergence monotone} \qquad \Big\downarrow$$

$$P((\cup B_n) \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n) = P(\cup B_n) P(C_2) \ldots P(C_n)$$

$$\Rightarrow \quad \cup B_n \in \mathcal{M}_1$$

$\mathcal{M}_1$ est une classe monotone !

On continue l'argument maintenant avec la classe

$$\mathcal{M}_2 = \{ B_2 \in \mathcal{B}_2 \mid P(B_1 \cap B_2 \cap C_3 \ldots \cap C_n) = P(B_1) P(B_2) \ldots P(C_n) \}$$

On montre avec le même argument que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone et on conclut que

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{B}_2$$

On répète l'argument jusqu'à $\mathcal{M}_n$. $\blacksquare$

<u>Corollaire</u> : (<u>Regroupement</u> de <u>paquets</u>)

Soit $(\mathcal{B}_i)_{1 \le i \le n}$ des tribus indépendantes

$$\boxed{\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2 \quad \mathcal{B}} \quad \mathcal{B} \quad \ldots \mathcal{B} \quad \mathcal{B}$$

$$\underbrace{\boxed{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots \mathcal{B}_{n_1}}}, \underbrace{\mathcal{B}_{n_1+1} \dots, \mathcal{B}_{n_2}}, \underbrace{\mathcal{B}_{n_2+1} \dots}$$

$$\longrightarrow \underline{\sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1})} \qquad \sigma(\mathcal{B}_{n_1+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_2}) \qquad \dots$$

$$\mathcal{D}_1 \qquad \mathcal{D}_2 \qquad \dots \mathcal{D}_p$$

$$\shortparallel \qquad \shortparallel$$

notation : $\mathcal{B}_1 \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_1} \qquad \mathcal{B}_{n_1+1} \vee \dots \vee \mathcal{B}_{n_2}$

$$\boxed{\text{Alors } (\mathcal{D}_i)_{1 \leq i \leq n_p} \text{ est une famille indépendante}}$$

preuve : On définit des classes

$$C_j = \left\{ B_{n_{j-1}+1} \cap \dots \cap B_{n_j} \;\middle|\; B_i \in \mathcal{B}_i \right.$$
$$\left. i \in \{n_{j-1}+1, \dots, n_j\} \right\}$$

exemple : $C_1 \subset \mathcal{D}_1$

$$\shortparallel$$

$$\{ B_1 \cap \dots \cap B_n \mid B_i \in \mathcal{B}_i \quad 1 \le i \le n \}$$

Remarque $\sigma(\mathcal{C}_j) = \mathcal{D}_j$

On vérifie que $\mathcal{C}_j$ est stable par intersection fini et contient Ω.

On applique alors la proposition précédente

$\blacksquare$