Cours 2 1

Rappel : $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B}_i$ classes stables par intersection finie contenant Ω

t.q. $\sigma(\mathcal{C}_i) = \mathcal{B}_i$

si $\forall C_i \subset \mathcal{C}_i$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(C_i)$$

alors $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes

Corollaire : Regroupement par paquets

Soit $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ tribus indépendantes

Alors les tribus suivantes sont indépendantes

$$\mathcal{D}_1 = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1})$$

$$\mathcal{D}_2 = \sigma(\mathcal{B}_{n_1+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_2})$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{D}_p = \sigma(\mathcal{B}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathcal{B}_{n_p})$$

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p = n$$

$$\underbrace{(\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2 \dots \mathcal{B}_{n_1})}_{\mathcal{D}_1} \underbrace{(\mathcal{B}_{n_1+1} \quad \dots \quad)}_{\mathcal{D}_2} \dots \underbrace{(\quad \mathcal{B}_n)}_{\mathcal{D}_p}$$

<u>preuve</u> : On définit les classes

$$\mathcal{C}_j = \{ B_{n_{j-1}+1} \cap \dots \cap B_{n_j} \mid B_i \in \mathcal{B}_i$$

$i \in \{n_{j-1}+1, \dots, n_j\} \}$

$i \in \{n_{j-1}+1, \dots, n_j\}$

(intersections finies d'ensembles dans un paquet)

On observe que $\mathcal{C}_j$ est stable par intersection finie et contient Ω.

On note aussi que $\sigma(\mathcal{C}_j) = \mathcal{D}_j$.

On vérifie maintenant que $\underbrace{\mathcal{C}_j}_{1 \le j \le p}$ sont "indépendants" :

$$P\big((B_1 \cap \dots \cap B_{n_1}) \cap (B_{n_1+1} \cap \dots B_{n_2}) \cap \dots \cap (\quad B_n)\big)$$

$$= P(B_1)P(B_2) \dots P(B_n)$$

(vraie car $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes)

Les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées donc

$\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_p$ sont indépendantes ☒

Exemple : ① $X_1, \dots, X_n$ v.a. indépendantes

$$Y_1 = (X_1, \dots, X_{n_1})$$

$$Y_2 = (X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2})$$

$$\vdots$$

$$Y_p = (X_{n_{p-1}+1}, \dots, X_n)$$

Alors $Y_1, \dots, Y_p$ sont indépendantes

($\mathcal{B}_i = \sigma(X_i)$ alors $\sigma(Y_1) = \sigma(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{n_1})$)

② $X_1, \boxed{X_2}, X_3, \boxed{X_4}$ indépendantes alors $E_1 = (X_1 \wedge 3)$ $E_2 = |X_2 + X_4|$ v.a.r.

v.a. indépendantes

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & (X_1, X_3) \arrow[r] & X_1 X_3 \end{tikzcd}$$

$$\sigma(X_1 X_3) \subset \sigma(\sigma(X_1), \sigma(X_3))$$

analoguement $\sigma(X_2^3 + X_4) \subset \sigma(\sigma(X_2), \sigma(X_4))$

par regroupement de paquets

$\sigma(\sigma(X_1), \sigma(X_3))$ et $\sigma(\sigma(X_2), \sigma(X_4))$

sont indépendantes

$\Rightarrow$ $\sigma(X_1 X_3)$ et $\sigma(X_2^3 + X_4)$ sont indépendantes.

Définition (indépendance pour une famille infinie)

- Soit $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que la famille est indépendante si pour tout sous-ensemble fini de I les tribus correspondantes sont indépendantes.
- Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de v.a.

On dit que la famille est indépendante si $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ est une famille indépendante.

Proposition : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille de v.a indépendantes. Alors $\forall p \in \mathbb{N}$ les deux tribus $\mathcal{B}_1 = \sigma(X_0, \dots, X_p)$

$$\mathcal{B}_2 = \sigma(X_{p+1}, \dots\dots)$$

sont indépendantes.

preuve : On appliquera la proposition du debut du cours à deux classes :

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$$

$$\mathcal{C}_2 = \bigcup_{k=p+1}^{\infty} \sigma(X_{p+1}, \dots, X_k) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}_2}}$$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont stables par intersection finies et contiennent Ω.

"indépendance" de classe est satisfaite ;

$$C_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ et } C_2 \in \mathcal{C}_2$$

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2)$$

(par définition de famille indépendante)

$\Longrightarrow$ $\sigma(\mathcal{C}_1)$, $\sigma(\mathcal{C}_2)$ sont indépendante

$\boxtimes$

Plus généralement (exercice)

Théorème : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ famille des classes stables par intersection finies contenant Ω.

Soit $\{I_j\}_{j \in J}$ une partition de I.

Soit $\mathcal{A}_j = \sigma(\bigcup \mathcal{C}_i)$

Alors $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ est une famille indépendante

9.3 Lemme de Borel - Cantelli

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événement dans $\mathcal{A}$.

Définition : $\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

$\liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

Interprétation : $\omega \in \limsup A_n \iff \omega$ appartient à un nombre infini de A_n.

$\omega \in \liminf A_n \iff \omega$ appartient à tout k à partir d'un certain rang.

Aussi $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$

$= \inf_n \left\{ \sup_{k \geq n} \mathbb{1}_{A_k} \right\}$

Lemme (Borel - Cantelli) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événement.

i) Si $\sum P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$

i) Si $\sum_n P(A_n) < \infty$ alors $P(\limsup A_n) = 0$

(autrement dit $\{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n\}$ est fini presque sûrement)

ii) Si $\sum_n P(A_n) = \infty$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille indépendante alors

$$P(\limsup A_n) = 1$$

(autrement dit presque sûrement $\{n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n\}$ est infini)

Remarque : L'hypothèse d'indépendance est nécessaire en ii) :

exemple : $A_n = A$ avec $0 < P(A) < 1$

alors $\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k \geq n}^{\infty} A = A$

$$\sum P(A_n) = \sum P(A) = \infty \quad \text{mais}$$

$$P(\limsup A_n) < 1$$

preuve : i) $\sum P(A_n)$ converge

$\iff \forall \varepsilon \; \exists N_\varepsilon$ t.q. $\sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty} P(A_n) < \varepsilon$

$$P(\limsup A_n) \leq P\left(\bigcup_{n \geq N}^{\infty} A_n\right) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$\forall N$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

ii) stratégie : On montre que $\boxed{P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1}$ $\forall n$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

$\Big($ car l'intersection est décroissante $= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$. $\Big)$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)^c\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right)$$

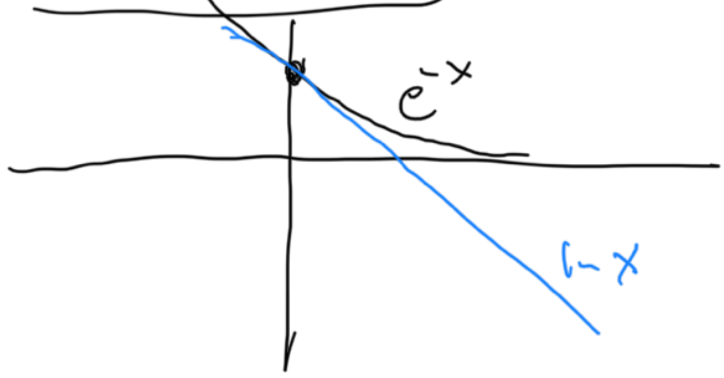
par indépendance

$$= 1 - P(A_n^c) \cdots P(A_N^c)$$

$$= 1 - (1 - P(A_n)) \cdots (1 - P(A_N))$$

On utilise maintenant l'inégalité

$$\boxed{1 - x \leq e^{-x}}$$



$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \geq 1 - e^{-P(A_n)} \cdots e^{-P(A_N)}$$

$$\geq 1 - e^{-\sum_{i=n}^{N} P(A_i)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

$$\boxed{P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1}$$

Applications

① Il n'existe pas de probabilité sur $\mathbb{N}$ t.q. $P(\{\text{multiples de } n\}) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>preuve</u>: Soit p premier et $A_p = \{np \mid n \in \mathbb{N}\}$

On montre que la famille (A_p) est indépendante :

Soit $A_{p_1}, \dots, A_{p_n}$ (p_i distinct deux à deux)

On écrit

$$P(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_n}) = P((p_1 \cdots p_N)\mathbb{N})$$

car les p_i premiers

par hypothèse $= \dfrac{1}{p_1 \cdots p_N}$

par hypothèse $= P(A_{p_1}) \cdots P(A_{p_n})$

donc $(A_{p_1}, \dots, A_{p_n})$ est indépendante.

On sait que $\displaystyle\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$

par hypothèse $= \sum P(A_p)$

Borel - Cantelli $\Longrightarrow$

$$P(\limsup A_p) = 1 \quad \text{impossible}$$

i.e. presque sûrement $n \in \mathbb{N}$ appartient à un nombre infini de A_p

i.e. presque sûrement n est multiple d'un nombre infini de nombres premiers

② Développement dyadique

$x \in [0,1[$ on associe une suite dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ développement de x en base 2

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots \qquad x_i \in \{0,1\}$$

Il y a une ambiguïté pour certains rationnels (de la forme $\frac{p}{2^q}$)

par exemple $\frac{1}{2} = \begin{cases} 0,100\dots \\ 0,0111\dots \end{cases}$

On choisit les développements qui finissent par une suite de 0.

Définition : $\forall x \in [0,1[$ on définit

$$R_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$X_n(x) = \underbrace{[2R_{n-1}(x)]}_{n} \qquad R_n(x) = \underbrace{2R_{n-1}(x) - X_n(x)}_{\text{reste}}$$

$$x = \sum_{j=1} \frac{X_j(x)}{2^j} + \frac{1}{2^n} R_n(x)$$

$\forall n \quad X_n(x) \in \{0,1\}$ et $R_n(x) \in [0,1[$

Proposition : Soit $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, P)$

où P est la mesure de Lebesgue restreinte à $[0,1[$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli $B(1,\frac{1}{2})$

Rappel : $B(1,\frac{1}{2}) \qquad P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$

Remarque : On peut démontrer aussi que R_n est de loi uniforme sur $[0,1[$ et R_n et $(X_1,\dots,X_n)$ sont indépendante.

preuve : On observe d'abord que

- $\{x\in[0,1[\mid X_1(x)=0\} = \{0 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \mid x_k\in\{0,1\}}\}$

$$\frac{1}{2}[0,1[\qquad = \left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} \,\middle|\, x_n\in\{0,1\}\right\} = [0,\tfrac{1}{2}[$$

$$P(X_1=0) = \frac{1}{2} = P([0,\tfrac{1}{2}[)$$

$$P(X_1=1) = \frac{1}{2} = P([\tfrac{1}{2},1[)$$

- $\{x\in[0,1[\mid X_1(x)=1\} = \{\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x_k}{2^k} \mid x_k\in\{0,1\}\}$

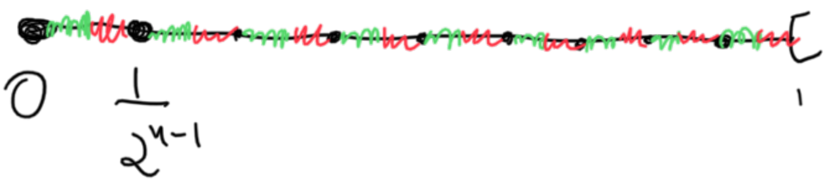
$= [\frac{1}{2}, 1[$

Analoguement

$\{x \in [0,1[\mid X_n(x) = 0\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \right\}$

$\{x \in [0,1[\mid X_n(x) = 1\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \right\}$

multiple de $\frac{1}{2^{n-1}}$



$$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} = P(X_n = 1)$$

$\forall n$ X_n sont des v.a. de loi de Bernoulli $B(1, \frac{1}{2})$.

On montre maintenant que la famille (X_n) est indépendante.

Il suffit de montrer que pour $i_1, \ldots, i_p \in \{0,1\}$ fixés

$$P(X_1 = i_1, \ldots, X_p = i_p) \overset{?}{=} \prod_{k=1}^{p} \underbrace{P(X_k = i_k)}_{\frac{1}{2}}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1}{2^p}$$

$$\{X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p\} = \Big\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \frac{i_k}{2^k}}_{\text{fixé}} + \underbrace{\sum_{k>p}^{\infty} \frac{a_k}{\cancel{2}^k}}_{\frac{1}{2^p}[0,1[} \Big\}$$

donc

$$P(X_1 = i_1, \dots, X_p = i_p) = P\left(\frac{1}{2^p}[0,1[\right) = \frac{1}{2^p}$$

conclusion: la famille est indépendante

On considère maintenant les paquets

$$\forall n \geq 0 \quad Y_n = (X_{np+1}, X_{np+2}, \dots, X_{np+p})$$

(par le même argument qu'avant on

$$P(X_{k+1} = i_1, X_{k+2} = i_2, \dots X_{k+p} = i_p) = \frac{1}{2^p}\text{)}$$

Les vecteurs Y_n sont indépendants

On définit alors

$A_n = \{Y_n = (i_1, \dots, i_p)\}$ qui est une suite d'événements indépendants

$$P(A_n) = \frac{1}{2^p} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

Borel - Cantelli $P(\omega \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k) = 1$

On a fixé un segment de 0 et 1 de taille p.

Pour presque tout $\omega \in [0,1[$ le segment apparaît une infinité de fois dans le développement dyadique de ω.

$$1010011$$

$$\omega = 0{,}x_1 x_2 x_3 1010011\, x \ldots\ldots 1010011 \ldots$$

Problème : <u>construire des v.a. indépendantes avec des lois prescrites.</u>

Proposition : Soit $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Il existe une suite de v.a. réelles $(X_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ sur $([0,1[, \mathcal{B}_{[0,1[}, P)$ indépendantes t.q. $\forall j \in \mathbb{N}^*$ X_j soit de loi μ_j.

restriction de la mesure de Lebesgue.

(généralisation de la proposition précédente)

<u>preuve</u> : On ~~a~~ construit $\tilde{X}_n$ famille indépendante (dans la prop. précédente)

Soit $(N_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles infinis formant une partition de $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} N_j$$

Soit φ_j la suite des élément de N_j en ordre croissante

Exemple : $N_1 = \{ \underset{\varphi_1(1)}{\overset{\shortparallel}{1}} , \underset{\varphi_1(2)}{\overset{\shortparallel}{3}} , 5 , 7 , \dots \}$ ....

On pose $Y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{X}_{\varphi_j(k)}$

<u>lemme</u> : $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une famille indépendante.

<u>preuve</u> : Chaque Y_j est mesurable par rapport à la tribu

$$\sigma(\tilde{X}_k \mid k \in N_j)$$

$\tilde{X}_1, \dots,$ sont indépendantes

par regroupement par paquets :

$\sigma(\tilde{X}_k \mid k \in N_j)$ sont indépendants

$\Rightarrow (Y_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est indépendante.

<u>lemme</u> $\forall j$ Y_j est de loi uniforme sur $[0,1[$

Remarque : une fois $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ construite de loi uniforme sur $[0,1[$ on construira une famille $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de lois $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice : Soit $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ une fonction de répartition donnée et Y variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$. Construire une v.a. $X=G(Y)$ de loi donné par la fonction de répartition F.

indication : Simulation

$$\Omega \xrightarrow{Y} \mathbb{R} \xrightarrow{G} \mathbb{R}$$

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]$$

t.q. $\boxed{F_{G(Y)}=F}$

indication : construire une "réciproque" G de F

Alors $G(Y)$ a une loi de fonction de répartition F.