Série d'exercices N°6

Exercice 1

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On note $\liminf A_n$ l'événement

$$\bigcup_k \bigcap_{n\geq k} A_n$$

et on note $\limsup A_n$ l'événement

$$\bigcap_k \bigcup_{n\geq k} A_n \,.$$

1) Montrer que pour tout k,

$$P(\bigcap_{n\geq k} A_n) \leq \inf_{n\geq k} P(A_n) \quad \text{et} \quad P(\bigcup_{n\geq k} A_n) \geq \sup_{n\geq k} P(A_n)\,.$$

2) En déduire les deux inégalités suivantes :

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \quad \text{et} \quad P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)\,.$$

3) Déterminer les quantités intervenant dans 2) lorsque $\Omega = \{-1; +1\}$, $P(\{-1\}) = 1/4$, $P(\{+1\}) = 3/4$, $A_n = \{(-1)^n\}$.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$: $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = 1 - p$.

1) Montrer qu'il y a presque sûrement une infinité de n tels que $X_n = 1$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'événement $A_n = \{X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{2n-1} = 1\}$. Montrer que p.s. il n'y a qu'un nombre fini de A_n qui sont réalisés.

3) Montrer qu'il en est de même pour l'événement :

$$B_n = \{\text{parmi } X_{n^2}, X_{n^2+1}, \cdots, X_{(n+1)^2} \text{ il y a } n \text{ v.a. consécutives qui valent 1.}\}$$

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et de même loi de Bernoulli de paramètre p, $(0 < p < 1)$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$, et $V_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que V_n/n converge en probabilité vers p^2.

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(X_k)$ et $Z_n = S_n - n\alpha$, $n \geq 1$, pour $\alpha \in [0,1]$.

1) Montrer en utilisant l'identité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\text{Cste}}{n^2}.$$

2) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$,

$$(1/n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\alpha]}(X_k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\,, \quad \text{p.s.}$$

Exercice 5

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1-p$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(S_n = 0)$.

2) Etudier $\sum P(S_n = 0)$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi définie par: $P(X_n = -1) = P(X_n = +1) = 1/2$. On veut montrer que pour tout k, p.s. $S_n = k$, infiniment souvent (où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $S_0 = 0$).

1) Peut-on appliquer le lemme de Borel-Cantelli ?

2) On pose $q_j = P(\sup_{n\geq 0} S_n \geq j)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. En envisageant les deux valeurs possibles de X_1, montrer que $q_j = (q_{j-1} + q_{j+1})/2$.

3) En déduire que $q_j = 1$, pour tout $j \geq 0$ et que $P(\limsup S_n = +\infty) = 1$.

4) Montrer que $P(\liminf S_n = -\infty) = 1$.

5) Montrer que pour tout k, p.s. $S_n = k$, infiniment souvent.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. Montrer qu'on a les deux cas suivants :

· Ou bien $E(|X_1|) < +\infty$ et alors $P(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 0$.

· Ou bien $E(|X_1|) = +\infty$ et alors $P(\limsup \{|X_n| \geq n\}) = 1$.

Exercice 9

Montrer qu'une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une v.a. X si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\, dP = 0\,.$$

Exercice 10

Établir que pour toute fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(p), \quad p \in [0,1]. \tag{2}$$

Établir que pour toute fonction réelle continue et bornée f définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda), \quad \lambda \in]0,+\infty[.$$

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. positives, montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ converge en probabilité si et seulement si S_n converge p.s..

Remarque : en cours, on a montré que c'était le cas pour des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 12

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $E(X_n^2) < +\infty$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = 0.$$

1) On pose $m_n = (1/n)\sum_{k=1}^n E(X_k)$. Montrer que la suite $((1/n)\sum_{k=1}^n X_k - m_n)$ converge en probabilité vers 0.

2) En déduire que $(1/n)\sum_{k=1}^n X_k$ converge en probabilité vers m.

Exercice 13

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $E(\exp(\lambda S_n)) = (1 - p - p\exp(\lambda))^n$.

2) Soient $\lambda, \varepsilon > 0$ tels que $p + \varepsilon < 1$. En appliquant l'inégalité de Markov à $\exp(\lambda S_n/n)$, vérifier que

$$P(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon) \leq \exp\left(n \log(1 - p + pe^{\lambda/n}) - \lambda(p+\varepsilon)\right).$$

En déduire que $P(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon) \leq \exp(-nH(p+\varepsilon))$, où pour tout $x \in]0,1[$, $H(x) = x\log(\frac{x}{p}) + (1-x)\log(\frac{1-x}{1-p})$.

3) Montrer que sur $[0, 1-p[$, $x \mapsto H(x+p)$ est convexe, puis que pour tout $x \in [0, 1-p[$, $H(p+x) \geq 2x^2$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$.

4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$, puis que $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2)$.

5) En déduire la loi des grandes nombres pour des v.a. de Bernoulli indépendantes.