Série d'exercices N°7

Exercice 1

Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs entières telle que pour tout n, X_n suit la loi :

$$P(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1\,,$$

($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > \alpha$). Montrer que $(X_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par $\frac{1}{n}\delta_1 + (1-\frac{1}{n})\delta_0$. Étudier les différents modes de convergence de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 - \cos 2n\pi x\,, \quad \text{si} \quad x \in]0,1[\\ f_n(x) &= 0\,, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n, une v.a. de densité f_n. Montrer que la suite (X_n) converge en loi bien que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas.

Exercice 5

On considère deux suites de v.a. réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$.

1) On suppose que (X_n) converge en loi vers une v.a. X et que (Y_n) converge en probabilité vers 0. Montrer que la suite $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.
2) Donner un exemple dans lequel (X_n) converge en loi vers une v.a. X, (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y, mais $(X_n + Y_n)$ ne converge pas en loi.

Exercice 6

On considère une suite de v.a. indépendantes et de même loi : $(X_n)_{n\geq 0}$. On définit alors la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_0 = \frac{X_0}{2};\ Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2};\ Y_2 = \frac{X_2 + Y_1}{2};\cdots;Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2};\cdots.$$

1) Calculer la fonction caractéristique ϕ_n de Y_n en fonction de ϕ, la fonction caractéristique de X_1, et de n.

2) On suppose que la loi commune aux variables X_n est la loi normale centrée $\mathcal{N}(0,\sigma)$. Quelle est la loi de Y_n ? Quelle est la loi limite de (Y_n) lorsque n tend vers l'infini ?

3) Si les variables X_n suivent la loi de Cauchy de densité $[\pi(1+x^2)]^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que (Y_n) converge en loi lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées, de variance σ^2, de fonction caractéristique Φ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit aussi la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de v.a. indépendantes telle que pour tout k, N_k est une v.a. de Poisson de paramètre k. On suppose de plus que la suite (N_k) est indépendante de la suite (X_n). Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k} \quad \text{si} \quad N_k \neq 0\,, \\ Z_k &= X_1 \quad \text{si} \quad N_k = 0\,. \end{aligned}$$

1) Exprimer la fonction caractéristique Φ_k de Z_k en fonction de Φ. Qu'advient-il si X_1 est une gaussienne ?

2) Montrer que pour tout réel t, $\Phi^n(t/\sqrt{n}) \to \exp -\sigma^2 t^2/2$, lorsque $n \to \infty$. En déduire que (Z_k) converge en loi vers une v.a. que l'on précisera.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\,,$$

converge en loi et trouver la loi limite.

2) On définit maintenant la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$.

La suite (Z_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite.

Exercice 9

Avec les hypothèses de l'exercice 8, on définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad X_n \leq \frac{1}{n}\,, \\ T_n &= 1 \quad \text{si} \quad X_n > \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

1) Montrer que la suite (T_n) converge en probabilité et trouver sa limite.

2) Vérifier que la série de probabilités

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon)\,,$$

est convergente pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire la convergence presque sure de la suite (T_{n^2}).

Exercice 10

Soient X_n, $n \geq 1$ des v.a. de fonction de répartition F_n.

1) On suppose que $P(X_n = 1/n) = 1$. (X_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite. $F_n(x)$ converge-t-elle vers $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

2) On suppose que $X_n = n$, p.s. F_n tend-elle vers une fonction de répartition ?

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de fonction caractéristique Φ. On suppose que $E(X_1^2) < +\infty$. Posons $Y_n = (-1)^n X_n$.

1) Quelle est la fonction caractéristique de Y_n ? Quelle condition faut-il imposer à la loi de (X_n) pour que (Y_n) converge en loi ?

2) Quelle condition faut-il imposer à la loi de (X_n) pour que (Y_n) converge en probabilité ?

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{2k}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_{2k+1}$ et $V_n = S_n/T_n$, (On suppose que $P(T_n = 0) = 0$). Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de (V_n) ? (On traitera en premier lieu le cas $E(X_1) \neq 0$.)

Exercice 12

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1) Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $P(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?

2) Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 13

Soit $b > 0$, et soit $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ une suite de variables indépendantes, de loi commune la loi gamma de paramètre b.

On pose : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

1) Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque surement, lorsque $n \to \infty$, vers un réel c que l'on calculera.

2) Montrer que : $\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - c\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

3) Montrer que : $n\left(\frac{S_n}{n} - c\right)^2$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

4) Montrer que : $\sqrt{n}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)^2 - c^2\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera. Plus généralement, si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe C^1, montrer que :
$\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(c)\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

Exercice 14

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice 15

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables alátoires indṕendantes, X_n étant de fonction de répartition donnée par

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \qquad \text{et} \qquad F_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.