Feuille TD 1 - Intro

1 Intro aux équations différentielles : résolution classique

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = ay(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Montrer que $y(t) = ce^{at}$ est une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que toute solution de (1) est de cette forme.
3. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) telle que $y(0) = y_0$.

Soit maintenant $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

4. Trouver toutes les fonctions $c(t)$ telles que $c(t)e^{at}$ est une solution de (2). En déduire que toute solution de (2) satisfait l'identité

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} f(s)ds.$$

Réciproquement, montrer que cette fonction est solution de (2).

5. Trouver l'unique solution de

$$y'(t) - 5y(t) = e^t, \qquad y(0) = 7.$$

Pour $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère finalement l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

6. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$.
7. Montrer que l'équation (3) admet une unique solution, qu'on exprimera sous une forme intégrale explicite.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle (2)

1. Vrai ou faux : si $f(t)$ est T-périodique alors les solutions $y(t)$ de (2) sont T-périodiques aussi.
2. Dans le cas où $a < 0$, montrer que si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = L$, où $L \in \mathbb{R}$, alors toute solution $y(t)$ de (2) satisfait $\lim_{t\to+\infty} y(t) = L/|a|$.

Exercice 3. Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes

1. $ty'(t) - 3y(t) = 0$ (*résoudre sur l'intervalle* $]0, +\infty[$).
2. $y'(t) - \frac{2}{t^2-1}y(t) = 0$ (*résoudre sur l'intervalle* $]1, +\infty[$)

Exercice 4. Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes

1. $y'(t) + 3\cos(t) = 0$
2. $3y'(t) + 4y(t) = 4t + 1$
3. $y'(t) = y(t) + 2\cos(3t)$
4. $y'(t) + 5y(t) = 2t^2 - t$ telle que $y(0) = 0$.

2 Équations linéaires d'ordre 2

Exercice 5. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \tag{4}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $y(t) = e^{\lambda t}$ est une solution de (4), alors λ est une solution de l'équation
$$az^2 + bz + c = 0 \tag{5}$$
2. A quelle condition portant sur a, b, c peut-on trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, solutions de (4) ?
3. Si la condition de la question n'est pas satisfaite, décrire deux solutions linéairement indépendantes de (4).
4. Soit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Sous la condition de la question 2., montrer que le système
$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \end{cases}$$
a une seule solution.

Exercice 6. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)e^{\gamma t}, \tag{6}$$

où $P(t)$ est un polynôme de degré d et $\gamma \in \mathbb{R}$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $E_m = \{Q(t)e^{\gamma t} \mid Q \text{ polynôme}, \deg Q \leq m\}$ est un sous-espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\dim E_m = m + 1$.
2. On considère l'application linéaire
$$L : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad L(y(t)) = ay''(t) + by'(t) + cy(t).$$
Montrer que, si γ n'est pas une solution de (5), alors $L(E_d) \subset E_d$ et $L|_{E_d} : E_d \to E_d$ est un isomorphisme.
3. En déduire, toujours sous l'hypothèse que γ n'est pas une solution de (5), qu'il existe une solution particulière de (6) dans E_d. Décrire toutes les solutions de (6).
4. Comment modifier l'argument si γ est une solution de (5) ?

Exercice 7. Trouver toutes les solutions des équations différentielles suivantes

1. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = te^{-t}$
2. $y''(t) + 4y(t) = t^2$
3. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin(t)$

3 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

1. À l'aide du théorème d'inversion locale, montrer que f est localement inversible en tout point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$
2. Montrer que f n'est pas globalement inversible
3. En identifiant $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x + iy \in \mathbb{C}$, quelle transformation géométrique décrit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?

Exercice 9. On considère l'équation

$$y + \log x - \log y = 0 \tag{7}$$

1. Montrer que $(e^{-1}, 1)$ est une solution de (7).
2. Montrer que pour toute solution (x_0, y_0) de (7) telle que $(x_0, y_0) \neq (e^{-1}, 1)$ il existe un voisinage $I \subset \mathbb{R}$ de x_0 et une solution $y = \varphi(x)$ définie pour tout $x \in I$, de classe C^1 telle que $\varphi(x_0) = y_0$.
3. Montrer que la fonction $y = \varphi(x)$ satisfait l'équation différentielle
$$y' = \frac{y}{x(1-y)}, \qquad y(x_0) = y_0$$