Feuille TD 4 - Stabilité

Exercice 1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire :

$$x' = \mu x - x^3. \tag{1}$$

1. Pour $\mu = 0$, trouver explicitement toutes les solution de (1) avec $x(0) = x_0$. Montrer que 0 est l'unique équilibre de (1) et qu'il est asymptotiquement stable.
2. Pour $\mu \neq 0$, trouver tous les équilibres de l'équation (1) et déterminer s'ils sont stables, asymptotiquement stables ou instables.
3. Tracer les orbites dans les différents cas.

Exercice 2. Déterminer les équilibres pour les systèmes :

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -4x - 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = -x - 2y - 1, \end{cases}$$

et déterminer leur nature (stables, asymptotiquement stables ou instables).

Exercice 3. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = \sin(x + y), \\ y' = e^x - 1. \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale prenant la valeur (x_0, y_0) en $t = 0$. On notera I l'intervalle maximal de définition de cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $|x(t) - x_0| \leq |t|$. En déduire que $I = \mathbb{R}$.
3. Déterminer tous les points d'équilibre de (2) et leur nature (stables, asymptotiquement stables ou instables).

Exercice 4. Considérons l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ x_2' = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases} \tag{3}$$

1. Trouver tous les équilibres du système.
2. Montrer que $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$ est une solution 2π-périodique de ce système.
3. Pour toute solution $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, déterminer si la quantité $\rho(t)^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ est constante, croissante ou décroissante, selon la valeur initiale $(x_1(0), x_2(0))$.
4. En déduire que toute solution avec $\|x(0)\| < 1$ est définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire si $\|x(0)\| > 1$?
5. Écrire le système en coordonnées polaires (ρ, θ).
6. Déterminer explicitement les solutions $(\rho(t), \theta(t))$.
7. Tracer l'allure des orbites dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = -kx + y - x^3, \\ y' = -x. \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer que $(0, 0)$ est l'unique équilibre du système.
2. Écrire le système linéarisé autour de $(0, 0)$.
3. En déduire, pour $k \neq 0$, si l'origine est un équilibre stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. L'origine est-elle stable si $k = 0$? Justifier votre réponse.

Exercice 6. On considère le système défini sur $\Omega =]0, +\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x' = xy - x^3, \\ y' = xy - y^3. \end{cases} \tag{5}$$

On notera $(x(t), y(t))$ la solution maximale du système telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, définie sur $I_{(x_0,y_0)}$.

1. Montrer que si $(x_0, y_0) \in \Omega$, alors $(x(t), y(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I_{(x_0,y_0)}$.
2. Trouver tous les équilibres du système dans Ω.
3. Déterminer si l'unique point d'équilibre $(x_\infty, y_\infty) \in \Omega$ est stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, on a $[0, +\infty[\subset I_{(x_0,y_0)}$.
5. En déduire que toute solution $(x(t), y(t))$ satisfait :

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t), y(t)) = (x_\infty, y_\infty).$$

Exercice 7 (*Équation de Newton*)**.** On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 :

$$x'' = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

où $F \in C^1(\mathbb{R})$. On définit les fonctions *énergie cinétique* et *énergie potentielle* :

$$K(v) = \frac{1}{2}v^2, \qquad U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(s)ds. \tag{7}$$

1. Écrire (6) comme un système dans les inconnues (x, v), où $v := x'$.
2. Montrer que les solutions constantes de (6) correspondent aux équilibres du système, i.e. aux points $(x_0, 0)$ tels que x_0 est un point critique pour $U(x)$.
3. Vérifier que l'*énergie totale* $E(x, v) = K(v) + U(x)$ est constante le long des solutions de (6).
4. Soit x_0 un point de minimum strict pour $U(x)$. Montrer que $(x_0, 0)$ est stable mais pas asymptotiquement stable.
5. Écrire le système linéarisé en $(x_0, 0)$. Le système linéarisé nous permet-il de déduire que tout minimum strict est stable ?
6. Montrer, à partir de la conservation de l'énergie que :

$$x'(t) = \sqrt{2[E_0 - U(x(t))]},$$

   où E_0 est l'énergie le long la solution $x(t)$. En déduire que, si $x(t)$ est strictement monotone sur $[0, T]$, le temps pour aller de $x(0) = a$ et $x(T) = b$ est :

$$T = \int_a^b \frac{dy}{\sqrt{2[E_0 - U(y)]}}.$$

Exercice 8. Soit $\gamma > 0$. On modifie l'équation de Newton avec un terme dissipatif :

$$x'' = F(x) - \gamma x'. \tag{8}$$

1. Écrire (8) comme un système dans les inconnues (x, y), où $y := x'$.
2. Montrer que les équilibres de (8) sont les mêmes que ceux de (6).

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un minimum local strict pour $U(x)$, où U est définie comme en (7).

1. Montrer que E est une fonction de Lyapunov pour le système.
2. En déduire la stabilité de $(x_0, 0)$. Peut-on déduire que $(x_0, 0)$ est asymptotiquement stable ?
3. Écrire le système linéarisé en $(x_0, 0)$.
4. En déduire une condition suffisante pour que $(x_0, 0)$ soit asymptotiquement stable.

Exercice 9. Un *champ de gradient* est un champ de vecteurs de la forme :

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

où $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2. Le but de cet exercice est étudier la dynamique $x' = f(x)$ associé à un champ de gradient.

1. Montrer que les points d'équilibre du système coïncident avec les points critiques de V.

2. Écrire le système linéarisé autour d'un équilibre x_0. En déduire une condition suffisante pour que :
   (a) x_0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système.
   (b) x_0 ne soit pas un équilibre stable du système.
3. Montrer que pour toute solution $x(t)$ du système on a l'identité :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -\|\nabla V(x(t))\|^2.$$

4. En déduire :
   (a) si x_0 est un minimum local, alors x_0 est un équilibre stable du système.
   (b) si x_0 est un minimum local isolé, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable du système.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = -3x^2 - 12x. \end{cases} \tag{9}$$

0. Trouver tous les équilibres de (9).
1. Montrer que la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x, y) = x^3 + 6x^2 + y^2$ est constante le long les solutions de (9).

Les courbes de niveau de H sont représentées en figure. On note γ la courbe de niveau qui passe par $A = (-4, 0)$ et Ω la région à l'intérieur de la boucle formée par γ.

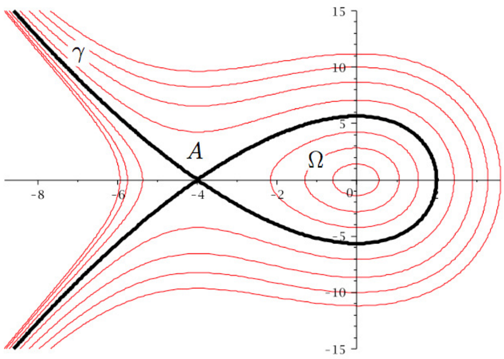

FIGURE 1 – Courbes de niveau de $H(x, y)$.

2. Montrer que toute solution maximale de (9) issue d'un point de Ω est définie sur tout $\mathbb{R}$. En déduire qu'elle est périodique.
3. Que peut-on dire sur l'intervalle de définition d'une solution issue d'un point (x_0, y_0) de γ ?
4. Considérons maintenant l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x' = 2y + (H(x, y) - 32)y, \\ y' = -3x^2 - 12x + (H(x, y) - 32)x. \end{cases} \tag{10}$$

   Que peut-on dire sur l'intervalle de définition d'une solution issue d'un point (x_0, y_0) de γ ? Et de celles issues d'un point de Ω ?

Exercice 11 (Modèle "prédateur-proie" de Volterra)**.** Soient $a, b, c, d > 0$. On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \tag{11}$$

où x représente le nombre de proies, y le nombre de prédateurs.

1. Monter que si les nombres initiaux de proies x_0 et prédateurs y_0 sont strictement positifs, le modèle ne peut pas induire de populations négatives. Que trouve-t-on trouve si $x_0 = 0$ (resp. $y_0 = 0$.) ?
2. Montrer qu'il existe un fonction de la forme $V(x, y) = F(x) + G(y)$ définie sur $(0, +\infty)^2$ qui est constante le long les solutions de (11). En déduire que toute solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que pour toute solution $z(t) = (x(t), y(t))$ dans $(0, +\infty)^2$, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $z(t_1) = z(t_2)$. En déduire que toute solution est périodique.

Exercice 12 (Méthode des caractéristiques). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteur complet de flot ϕ_t.

0. Montrer que $D\phi_t(x) \cdot f(x) = f(\phi_t(x))$.

Considérons une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Montrer que la fonction $u(t, x) = g(\phi_t(x))$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = f(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \qquad u(0, x) = g(x). \tag{12}$$

2. Étudions maintenant l'unicité des solutions de (12). On considère donc une solution $v(t, x)$ de (12) telle que $v(0, x) = g(x)$.
   (a) Soit F le champ de vecteurs sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ défini par $F(t, x) = (-1, f(x))$. Montrer que, si $y(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ est solution de l'équation différentielle $y'(s) = F(y(s))$, alors $v \circ y$ est une fonction constante.
   (b) Montrer que toute solution maximale de $y' = F(y)$ coupe l'hyperplan $t = 0$.
   (c) En déduire que $v(t, x) = g(\phi_t(x))$ et conclure sur l'unicité des solutions de (12).
3. Dans le cas $n = 1$, résoudre l'équation aux dérivées partielles du transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0$$

   en fonction de la condition aux limites $u(0, x) = g(x)$.