Groupes et Algèbres de Lie

Grégory Ginot

2016-2017

Résumé

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19ème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie (originellement comme une version pour les équations différentielles de ce que la théorie de Galois est pour les équations algébriques). Elle a connu de nombreuses ramifications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et reste encore très active. Par ailleurs ces objets interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des "formes automorphes" et du "programme de Langlands", et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativité générale où les exemples de groupes de Lie abondent et sont fondamentaux. Les groupes de Lie sont en correspondance avec les algèbres de Lie, une notion plus algébrique, très utile pour classifier les groupes de Lie et leur représentations, mais qui a aussi son propre intérêt et applications que ce soit en mathématique ou physique.

Dans ce texte, on s'intéressera uniquement aux groupes de Lie, dit classiques, donnés comme sous-groupe fermé d'un groupe linéaire (ou linéaires, ou matriciels). Cela nous évitera de devoir utiliser le langage de la géométrie différentielle tout en s'intéressant à une classe d'exemple très générale qui englobe essentiellement tous les phénomènes généraux de la théorie.

Table des matières

Remarques : ces notes de cours sont très largement basées sur celles écrites, les années précédentes, par Jean-François Dat et Daniel Bertrand.

Ce cours ne se placera *pas* dans un cadre de géométrie différentielle, ni n'utilisera la théorie des revêtements ou d'outils de la topologie algébrique. Cependant, on fera de temps en temps des apartés, sous formes le plus souvent de "*remarques culturelles*" ou de notes de bas de page, clairement identifiées en tant que telles, qui relieront les notions étudiées dans ce texte à celles que nous venons d'évoquer. Ces remarques sont, comme leur nom l'indique, culturelle et destinée à satisfaire partiellement la curiosité des élèves ou autres lecteurs qui ont suivi des cours sur ces sujets. Bien sûr, ces remarques sont hors-programme et ne sont en rien nécessaire à la compréhension du reste du texte.

On emploiera parfois la terminologie ***groupe abstrait*** pour désigner un groupe au sens usuel (et insister sur le fait que l'on a pas fixé de topologie sur le groupe).

Un certain nombre des exercices présentés dans ces notes seront traités et détaillés pendant les Travaux Dirigés.

1 Groupes de Lie linéaires

1.1 Notions de groupes topologiques

Dans ce cours, on s'intéressera essentiellement aux sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ ainsi qu'aux algèbres de Lie qui leur sont associées. Néanmoins on commence par quelques généralités sur les groupes topologiques qui ont de nombreuses et jolies propriétés.

1.1.1 DÉFINITION.– *Un groupe topologique est un espace topologique G muni d'une loi de groupe*[1] $(x, y) \mapsto xy$ *vérifiant les axiomes suivants :*

i) L'application produit $(x, y) \mapsto xy$ est une application continue de $G \times G$ dans G.

ii) L'application "inverse" $x \mapsto x^{-1}$ est une application continue de G dans G.

Dans le point i), on munit bien-sûr $G \times G$ de la topologie produit[2]. Les points i) et ii) peuvent être remplacés par le point suivant

i') L'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est une application continue de $G \times G$ dans G.

La démonstration de l'équivalence entre i)+ii) et i') est laissée en exercice.

1.1.2 *Quelques propriétés élémentaires mais* ***importantes****.*
Soit G un groupe topologique.

i) L'application "inverse" $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme (elle est son propre inverse et est continue).

ii) La loi de groupe de G est *séparément continue* au sens où, pour tout $x \in G$, les translations (dites à gauche et à droite respectivement) $\gamma_x : y \mapsto xy$ et $\delta_x : y \mapsto yx$ sont des applications continues de G dans G.

iii) Les translations à gauche et à droite vérifient $\gamma_x \circ \gamma_y = \gamma_{xy}$ et $\delta_x \circ \delta_y = \delta_{yx}$. En particulier, elle sont inversibles, d'inverse respectif $\gamma_{x^{-1}}$ et $\delta_{x^{-1}}$, qui sont par conséquent continus.

Les *translations sont donc des homéomorphismes* et conservent en particulier les propriétés topologiques de G : elles envoient ouvert sur ouvert, fermé sur fermé, connexe sur connexe... On utilisera de manière *systématique* ces propriétés par la suite.

iv) En particulier, pour tout $g \in G$, l'application $\mathrm{Ad}_g : x \mapsto gxg^{-1}$ est un homéomorphisme de G sur lui-même.

v) Une conséquence pratique du point ii) est que *l'élément neutre e de G admet une base de voisinages symétriques* (*i.e.* tels que $V = V^{-1}$).

1.1.3 *Quelques exemples.*

i) Tout groupe abstrait G peut être muni de la topologie discrète (celle pour laquelle tous les sous-ensembles sont ouverts) qui vérifie effectivement i) et ii) et fait donc de G un groupe topologique. Un tel groupe est appelé groupe *discret*[3].

1. autrement dit la donnée d'une multiplication associative, d'un élément neutre et d'un inverse vérifiant les axiomes usuels !

2. on rappelle que cela signifie qu'une base d'ouverts de $G \times G$ est donnée par les produits $U \times V$ d'ouverts U, V de G et que cette topologie est la topologie la moins fine rendant continues les deux projections canoniques $G \times G \to G$.

3. autrement dit un groupe discret est un groupe topologique qui est discret en tant qu'espace topologique.

ii) Un produit de groupes topologiques, muni de la topologie produit [4], est encore un groupe topologique. Par exemple, si G est fini et $G \neq \{e\}$, $G^{\mathbb{N}}$ est un groupe topologique non discret (Exercice : le montrer !).

iii) Les groupes additifs $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ ainsi que les groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont des groupes topologiques (non-discrets).

iv) Tout sous-groupe d'un groupe topologique (muni de la topologie induite) est un groupe topologique. Ainsi le cercle [5] $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^*,\ |z| = 1\}$ est un groupe topologique.

v) Le groupe linéaire général $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ses sous-groupes fermés sont des groupes topologiques. Ce sont ces exemples qui nous intéresseront dans ce cours. Évidemment, on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

Exemple. (Hors programme : limite projective de groupes topologiques) – Le produit de groupes topologiques est un cas particulier de la limite (projective) de groupes topologiques. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de groupes (topologiques) et si $\varphi_n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ est un morphisme de groupes, qui est continu, alors le sous -groupe

$$\varprojlim(G_n, \varphi_n) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(x_n) = x_{n-1}\}$$

est un sous-groupe (exercice) du produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$. On l'appelle *limite projective du système* $(G_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On ne s'intéressera pas beaucoup à ces exemples dans ce cours, mais ce sont des constructions importantes en arithmétique. En particulier, si les G_i sont finis (munis de la topologie discrète) et les φ_n n'importe quels morphismes de groupes, alors $\varprojlim(G_n, \varphi_n)$ est un sous-groupe fermé (exercice) du produit.

Voici deux exemples :

— Les nombres p-adiques $\mathbb{Z}_p := \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \pi_n)$ où p est un nombre premier et π_n : $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}$ est la projection canonique. C'est un groupe, et même un anneau topologique compact, très utile en théorie des nombres.

— Les groupes de Galois d'extension algébriques de degré infini. Par exemple l'homomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})$, où K_n est une suite croissante d'extensions Galoisiennes de $\mathbb{Q}$ d'union $\overline{\mathbb{Q}}$, est un isomorphisme qui fait de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ un groupe compact, objet de toutes les attentions de la recherche moderne en théorie des nombres.

1.1.4 Définition.– *Un (homo)morphisme* [6] $f : G \to G'$ *de groupes topologiques est un homomorphisme de groupes abstraits (c-à-d tel que* $f(xy) = f(x)f(y)$*) qui est continu.*

Les groupes topologiques munis des morphismes de groupes topologiques forment une catégorie ; terminologie que l'on pourra ignorer dans ce cours, la seule chose à retenir étant

4. Pour un produit non-nécessairement fini, la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$ est la topologie la moins fine rendant continue les projections canoniques $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$. Une base d'ouverts est donnée par les produits $\prod U_i$ pour lesquels seul un nombre *fini* d'ouverts U_i sont différents de X_i.

5. Remarque culturelle : il n'existe en fait que 3 sphères S^n qui soient munissables de structure de groupes topologiques : il s'agit de S^0, S^1 et S^3 qui est le sous-groupe des éléments de norme 1 du corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$, cf. exemple 1.3.6. La sphère S^7 admet une multiplication continue non-associative alors que les autres sphères n'admettent aucune multiplication continue unitaire. La démonstration générale de ces résultats requière cependant des outils de topologie algébrique un peu sophistiqué (la K-théorie).

6. on se contentera le plus souvent de dire morphisme

que, sauf mention explicite du contraire, *on ne s'intéressera pas à des morphismes de groupes non-continus* entre deux groupes topologiques.

En particulier, un morphisme de groupes topologiques f est appelé *isomorphisme de groupes topologiques* s'il admet un inverse (c-a-d un homomorphisme de groupes topologiques $G' \xrightarrow{g} G$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{G'}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_G$). Cela équivaut à demander que f soit à la fois un isomorphisme de groupes abstraits et un homéomorphisme.

Exemple. – — tout morphisme de groupes abstraits entre groupes discrets est un morphisme de groupes topologiques [7].

- — Soit $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ le groupe produit infini du groupe discret $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On note H le groupe abstrait $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie discrète (et non pas la topologie produit). L'application identité : $H \to G$ est bien continue et est un isomorphisme de groupes abstraits. Ce *n'est pas un isomorphisme de groupes topologiques* (exercice : le montrer !), autrement dit son application réciproque n'est pas continue.
- — De même, notons $\mathbb{R}^{dis}$ le groupe $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète. L'application identité est évidemment un morphisme de groupes topologiques $\mathbb{R}^{dis} \to \mathbb{R}$ qui est de plus une bijection. Mais ce n'est ***pas*** un isomorphisme car l'identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{dis}$ n'est *pas* continue (exercice : le montrer !).
- — L'application déterminant det : $GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes topologiques.
- — L'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ est un morphisme de groupes topologiques de $(\mathbb{R}, +)$ dans S^1.
- — Pour tout $g \in G$, le morphisme $\mathrm{Ad}_g : x \mapsto gxg^{-1}$ est un isomorphisme [8] (exercice !) du groupe topologique G sur lui-même. C'est un exemple important que nous reverrons plus tard.

Remarque. – Les exemples précédents montre que la théorie des groupes discrets coïncide avec celles des groupes abstraits. En revanche, un groupe discret et un groupe connexe (par exemple $\mathbb{R}$) se comportent de manière très différentes en tant que groupes topologiques.

Le lemme suivant est parfois pratique.

1.1.5 LEMME.– *Soient G, H des groupes topologiques.*

i) Un homomorphisme $f : G \to H$ de groupes abstraits est continu dès qu'il l'est en l'élément neutre e de G.

ii) Un groupe topologique G est séparé si (et seulement si) le point $\{e\}$ est fermé.

Démonstration. On commence par i). Pour montrer la continuité en $x \in G$, on utilise les translations du paragraphe 1.1.2.iii pour se ramener [9] au cas de e. Comme ces translations sont des homéomorphismes, pour tout voisinage ouvert V de $f(g)$, $\gamma_{f(g)^{-1}}(V)$ est un voisinage [10] de e. Par continuité de f en e, l'ensemble $f^{(-1)}(\gamma_{f(g)^{-1}}(V))$ est un voisinage de e. Le point clé est que $f \circ \gamma_x = \gamma_{f(x)} \circ f$ car f est un homomorphisme de groupes (abstraits) ; par suite

7. réciproquement, un morphisme de groupes topologiques entre groupes discrets est juste un morphisme de groupes abstraits
8. il est appelé automorphisme intérieur ou action adjointe.
9. c'est un argument très courant pour les groupes topologiques
10. c'est à dire un sous-ensemble qui contient un ouvert contenant e

l'ouvert $f^{(-1)}(\gamma_{f(g)^{-1}}(V)) = \gamma_{g^{-1}}(f^{(-1)}(V))$. Puisque $\gamma_{g^{-1}}$ est un homéomorphisme, on en déduit que $f^{(-1)}(V)$ est un voisinage de g.

Passons à ii). Soit $x \neq y$ dans G. Encore par translation on obtient que le singleton $\{x^{-1}y\}$ est fermé, donc puisque $x^{-1}y \neq e$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de e ne contenant pas $x^{-1}y$. Mais par continuité de la loi de groupe, il existe des voisinages $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de e tel que[11] $\mathcal{U}.\mathcal{U}'$ soit inclus dans $\mathcal{V}$. Quitte à restreindre on peut supposer que $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. On a alors $e \notin x\mathcal{U}.\mathcal{U}y^{-1}$, donc $x\mathcal{U} \cap y\mathcal{U}^{-1} = \emptyset$, ces deux voisinages étant ouverts car les translations et l'inverse sont des homéomorphismes. □

1.1.6 Lemme.– *Si H est un sous-groupe ouvert dans un groupe topologique G, il est automatiquement fermé.*

Par contre l'inverse n'est pas vrai ! (Par exemple $(\mathbb{R}, +) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2, +)$ n'est pas ouvert).

Démonstration. Il suffit de montrer que le complémentaire de H est ouvert. Or ce complémentaire $G \backslash H$ est réunion des classes à gauche $xH, x \in G, x \notin H$. Ces dernières sont ouvertes (car H l'est et les translations sont des homéomorphismes) et donc leur réunion aussi. □

1.1.7 *Quelques propriétés faciles des sous-groupes topologiques.*

i) Si $f ; G \to G'$ est un morphisme de groupes topologiques et si G' est séparé, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé dans G car c'est la pré-image du fermé $\{e\}$ par une application continue. Par contre, $\mathrm{Im}(f)$ n'a pas de raison de l'être (voir un contre-exemple en TD).

ii) Si H est fermé dans G, son *normalisateur* $N(H) := \{x \in G, xHx^{-1} = H\}$ est un sous-groupe fermé de G ; Idem, si G est séparé, pour son *centralisateur* $Z(H) := \{x \in G, \forall h \in H, xhx^{-1} = h\}$, donc pour le *centre* $Z(G)$ de G.

iii) Soit G un groupe topologique *séparé* et Γ un sous-groupe, muni de la topologie induite. On a la propriété suivante[12] :

Si Γ est discret, alors il est fermé dans G.

En effet, par hypothèse, e a un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ (que l'on peut prendre symétrique par 1.1.2.iv) tel que $\mathcal{V} \cap \Gamma = \{e\}$. On veut montrer que Γ est fermé, c'est à dire que $\Gamma = \overline{\Gamma}$. Soit $y \in \overline{\Gamma}$. Par définition de l'adhérence, tout voisinage ouvert de y rencontre Γ. Ainsi $y\mathcal{V} \cap \Gamma \neq \emptyset$ (car $y\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de y). Soit x dans cette intersection. Montrons que, nécessairement, $y = x$. Par symétrie de V, on a aussi $y \in x\mathcal{V} \cap \overline{\Gamma}$. Comme $x\mathcal{V}$ est ouvert, on a aussi $x\mathcal{V} \cap \overline{\Gamma} \subset \overline{x\mathcal{V} \cap \Gamma} = \overline{\{x\}} = \{x\}$ car G est séparé. Donc $y = x$.

1.1.8 *Sur la composante connexe de l'identité.*

Soit G un groupe topologique. On notera G^0 *la composante connexe de e* (aussi appelée composante neutre de G).

On a les propriétés suivantes :

11. si A et B sont deux parties de G, on notera $A.B = AB$ l'ensemble des éléments de la forme ab, où $a \in A, b \in B$.

12. cette propriété n'est pas vraie en général si Γ est seulement un sous-espace. Par exemple $\{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ est dicret dans $[0, 1]$ mais n'est pas fermé.

1.1.9 PROPOSITION.– *La composante connexe G^0 est un sous-groupe de G qui est de plus fermé et normal (i.e. distingué : $N(G^0) = G$).*

Par ailleurs, G^0 est contenu dans tout sous-groupe ouvert H de G.

Démonstration. Toute composante connexe est fermée, donc G^0 l'est. Pour tout x dans G^0, $x^{-1}G^0$ est connexe et contient e, donc est contenu dans G^0. On vient donc de montrer que G^0 était stable par l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$. C'est donc un sous-groupe.

De même, on montre que $x^{-1}G^0x$ est contenu dans G^0 pour tout $x \in G$, ce qui montre que G^0 est normal.

Enfin, si H est un sous-groupe ouvert de G, on écrit $G^0 = (G^0 \cap H) \sqcup (G^0 \cap (G \setminus H))$ qui est réunion disjointe de deux ouverts (cf le Lemme 1.1.6). Comme le premier est non vide (il contient e), le second est nécessairement vide par connexité de G^0, et on a donc bien $G^0 = G^0 \cap H$, *i.e.* $G^0 \subset H$. □

Notons aussi que G^0 *est ouvert si G est localement connexe* (exercice : le montrer).

Le lemme suivant est très utile en pratique (comme nous le verrons plus tard).

1.1.10 LEMME.– *Soient G un groupe topologique, et $\mathcal{V}$ un voisinage connexe de e. Alors, G^0 est la réunion des $\mathcal{V}^n := \{x_1x_2...x_n, x_i \in \mathcal{V}\}$, où n parcourt $\mathbb{N}$.*

En particulier, si G est un groupe topologique connexe, alors G est engendré par tout voisinage connexe de e.

Démonstration. Lorsque G est connexe, $G = G^0$ donc la seconde assertion suit de la première.

Pour la première, notons que cette réunion $\mathcal{U}$ d'ensembles connexes d'intersection non vide est connexe, donc contenue dans G^0. Posons alors $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{-1}$; c'est un voisinage symétrique de e.

On note $\mathcal{W}^i = \{w_1 \cdots w_i,\, w \in \mathcal{W}\}$. Par définition, la réunion $H = \bigcup \mathcal{W}^n$ des $\mathcal{W}^n, n \in \mathbf{N}$ est un sous-groupe de G, qui plus est incluse dans $\mathcal{U}$. Ainsi, il nous suffit de montrer que $G^0 \subset H$ pour conclure la preuve. D'après la proposition 1.1.9, il nous suffit donc de montrer que H est ouvert. Mais $\mathcal{W}$ est ouvert car intersection d'ouvert. De plus $\mathcal{W}^2$ est ouvert car c'est une réunion $\mathcal{W}^2 = \bigcup_{x\in\mathcal{W}} x\mathcal{W}$ d'ouverts. On obtient de même par récurrence que chaque $\mathcal{W}^n$ est ouvert, ainsi H, qui est leur réunion, l'est aussi. □

1.1.11 *Actions (continues) de groupes topologiques et quotients par un groupe.*

Lorsque l'on étudie un groupe topologique, il convient de s'intéresser à ses représentations *continues* qui sont définies comme on l'imagine :

1.1.12 DÉFINITION.– *Soit G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action* continue *de G sur X est la donnée d'une application continue*

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

satisfaisant les axiomes $ex = x$ et $(gg')x = g(g'x)$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$.

Par une action d'un groupe topologique sur un espace topologique, on entendra toujours une action continue (sauf si on précise explicitement le contraire).

On notera que l'application $(g, x) \mapsto gx$ définit une action du groupe abstrait G sur l'ensemble X et que l'on demande simplement en plus que cette application soit continue. Plus précisément la définition 1.1.12 définit des actions à gauche d'un groupe topologique. Une action continue *à droite* est une action à droite abstraite telle que l'application associée soit continue.

Soit X comme dans la définition et soit $x \in X$. *Nous noterons* $G_x = \{g \in G \,/\, gx = x\}$ *son stabilisateur et* $G \cdot x := \{gx, g \in G\}$ *son orbite.*

Remarque. – Rappelons aussi que, de manière équivalente, une action d'un groupe abstrait G sur un ensemble X est un homomorphisme $G \xrightarrow{\rho} \mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ désigne le groupe des bijections de X dans lui-même. La correspondance est donnée par $gx := \rho(g)(x)$.

Lorsque X est un espace topologique, il existe une topologie naturelle sur $Homeo(X)$ le groupe des bijections bicontinues de X sur lui-même. Il s'agit de la topologie induite par celle de l'espace $Map(G, G) := \{f : G \to G, \text{ t.q. } f \text{ est continue}\}$ des applications continues de G dans G. Ce dernier est muni de la topologie compacte-ouverte [13]. Nous ne l'utiliserons pas dans ces notes, mais on fait la remarque culturelle et rassurante suivante : *une action continue est la donnée d'un homomorphisme de groupes topologiques de* G *dans* $Homeo(X)$.

Exercice culturel.– D'après les exemples précédents, pour tout $x \in G$, la translation à gauche γ_x est dans $Homeo(G)$. De même Ad_x est dans son sous-groupe $Iso(G)$ des isomorphismes de groupes topologiques. Supposons que G est métrique.

i) Montrer que $Homeo(G)$ et $Iso(G)$ sont des groupes topologiques.
ii) Montrer que $\gamma : G \to Homeo(G)$ et $\mathrm{Ad} : G \to Iso(G)$ sont des morphismes de groupes topologiques.

Exemple. –

i) Une action abstraite d'un groupe discret sur un espace topologique discret X est toujours continue. (Exercice : le montrer) Autrement dit, la théorie des actions de groupes abstraits sur des ensembles est un cas particulier de celle des groupes topologiques sur les espaces (il s'agit précisément du cas discret).
ii) D'après le point 1.1.2.iii, les translations à gauche définissent une action continue de G sur lui même. Évidemment, les translations à droite définissent une action à droite.
iii) Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes topologiques et G' agit continûment sur X, alors f induit une action continue de G sur X donnée par la formule $gx := f(g)x$ (autrement dit par la composition $G \to G' \to \mathfrak{S}(X)$).
   En particulier, *si* H *est un sous-groupe de* G*, alors* H *agit continûment sur* G *par translation à gauche*, ainsi que, bien sûr, par translation à droite..
iv) De même $\mathrm{Ad}_g : x \mapsto gxg^{-1}$ définit une action continue de G sur lui même, appelée *action adjointe* [14].
v) L'action naturelle $(M, X) \mapsto MX$ de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$) est continue.

1.1.13 *Quotients par un (sous-)groupe topologique.*

1.1.14 Définition. (topologie quotient [15])– *Soit* G *un groupe topologique munie d'une action continue sur* X*, un espace topologique. On définit* l'espace topologique quotient X/G

13. une base de cette topologie est donnée par les sous-ensembles d'applications f telles que $f(K) \subset U$ où K et U parcourent respectivement les sous-espaces compact et ouverts de G. Lorsque X est métrisable, cette topologie est celle de la convergence uniforme sur tout compact

14. voir aussi le paragraphe 2.2.11 pour une variante.

15. voir le TD pour des (r)appels plus détaillés sur les quotients d'espaces topologiques.

comme le quotient abstrait[16] *que l'on munit de la topologie quotient, c'est à dire la topologie la plus fine rendant continue la projection canonique* $\pi : X \to X/G$.

En particulier, si H *est un sous-groupe de* G*, on dispose de l'espace quotient* G/H *(pour l'action à droite de* H *sur* G*, cf l'exemple précédent).*

Concrètement, un sous-ensemble $U \subset X/H$ est donc ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X.

On constate alors les faits suivants (en partie laissés en exercice) :

i) π *est une application* ouverte *(cad qui envoie tout ouvert sur un ouvert).* En effet, si $O \subset G$ est ouvert, alors $\pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup_{h\in H} Oh$ est aussi ouvert.

ii) G/H *est discret si et seulement si* H *est ouvert dans* G. Exercice.

iii) G/H *est séparé si et seulement si* H *est fermé dans* G. Le sens $\Rightarrow$ est trivial puisque $H = \pi^{-1}(\{e\})$. Pour le sens $\Leftarrow$, soient $x, y \in G$ tels que $xH \neq yH$, cad $x^{-1}y \notin H$. Considérons l'application continue de $G \times G$ dans G qui à (g, g') associe $gx^{-1}yg'$. Comme H est fermé et $f(e, e) \notin H$, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de e tel que $f(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \cap H = \emptyset$. Ceci équivaut à $y\mathcal{V}H \cap x\mathcal{V}^{-1}H = \emptyset$. Donc $\pi(y\mathcal{V}H)$ et $\pi(x\mathcal{V}^{-1}H)$ sont des voisinages ouverts (par i)) respectifs de yH et xH d'intersection vide.

iv) *Si* G/H *et* H *sont connexes, alors* G *est connexe.* En effet, une application continue f de G vers $\{0, 1\}$ sera constante sur les classes à gauche modulo H par connexité, donc se factorisera par G/H en une application à nouveau constante par connexité de G/H. Donc f est nécessairement constante, et G est bien connexe.

v) *Si* G *est localement compact et* H *est fermé, alors* G/H *est localement compact.*

vi) Si H est distingué, G/H est un groupe topologique et π est un morphisme de groupes topologiques.

Rappelons aussi que la topologie quotient satisfait la *propriété universelle* suivante.

1.1.15 *(Propriété universelle du quotient). Toute application continue* $f : X \to Y$ *qui est constante sur les orbites (*i.e. $f(gx) = f(x)$ *pour tous* $g \in G$, $x \in X$*) se factorise de manière unique sous la forme* $f = \tilde{f} \circ \pi$ *où* $\tilde{f} : X/G \to Y$ *est continue.*

Soit X un espace topologique munie d'une action continue de G, et soit $x \in X$. L'action de G induit une bijection continue $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$. *En général, ce n'est pas* un homéomorphisme. Il y a cependant un cas utile où c'est un homéomorphisme :

Proposition. – *Si* X *est séparé et* G/G_x *est compact, la bijection* $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. C'est un résultat de topologie générale. Une bijection continue d'un compact sur un espace séparé est toujours un homéomorphisme[17]. □

Remarque. (Une mise en garde) – Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes abstraits, il induit un isomorphisme de groupes abstraits :

$$\overline{f} : G/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}(f).$$

16. c'est à dire l'ensemble quotient de X par la relation d'équivalence engendrée par G : $x \simeq y$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $y = gx$. On rappelle que les éléments de X/G s'identifient canoniquement aux orbites $G \cdot x$.

17. en effet la bijection est alors ouverte : l'image d'un ouvert est le complémentaire de l'image du fermé complémentaire, laquelle est compacte puisque la bijection est continue, la source est compacte et le but séparé

Supposons de plus que G et G' sont des groupes topologiques. Et munissons $\operatorname{Im}(f)$ de la topologie induite par G' et $G/\operatorname{Ker}(f)$ de la topologie quotient. Alors la propriété universelle du quotient assure que l'application $\overline{f}$ est alors continue, mais *généralement pas un homéomorphisme.*

Exemple stupide : $G = G'$ et $f = \mathrm{id}$ avec la topologie discrète sur G et une topologie non discrète sur G'.

1.1.16 Exemple (enroulement irrationnel)*.* Voici un exemple moins stupide : l'enroulement irrationnel d'une ficelle sur un tore, autrement dit l'injection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. C'est bien un morphisme injectif de groupes topologiques, mais ce n'est *pas* un homéomorphisme sur son image. Ceci est un exemple important à méditer et à (re)voir en TD.

Exercice. – — Démontrer que $\overline{f}$ est un homéomorphisme si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de e, $f(\mathcal{V})$ est un voisinage de e' dans $\operatorname{Im}(f)$.
— Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Montrer que l'action (par translation) *à gauche* de G sur lui-même passe au quotient pour définir une action continue de G sur G/H.

Voici un autre résultat général dans le sens de la Proposition 1.1.15, que nous citons pour la culture.

Théorème. – *Supposons que G est localement compact et dénombrable à l'infini (union dénombrable de compacts), et que l'orbite est localement compacte. Alors la bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} G \cdot x$ est un homéomorphisme.*

Remarquons que l'hypothèse "dénombrable à l'infini" est vérifiée par tout groupe localement compact connexe, en vertu du lemme 1.1.10.

Démonstration. (Hors programme) Il suffit de prouver que l'application $g \in G \longrightarrow g\cdot x \in G\cdot x$ est ouverte. Comme d'habitude, à l'aide des translations, on se ramène à prouver que si $\mathcal{U}$ est un voisinage de e dans G, alors $\mathcal{U} \cdot x$ est un voisinage de x dans $G \cdot x$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage compact symétrique de e tel que $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{U}$. L'hypothèse "dénombrable à l'infini" implique l'existence d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments tels que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\mathcal{W}$. On a donc aussi $G \cdot x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g_n\mathcal{W} \cdot x$. Chacun des $g_n\mathcal{W} \cdot x$ est compact dans $G \cdot x$. Le théorème de Baire [18], applicable à $G \cdot x$ puisqu'on suppose cette orbite localement compacte, nous dit qu'au moins l'un des $g_n\mathcal{W} \cdot x$ est d'intérieur non vide. Par translation, $\mathcal{W} \cdot x$ est donc d'intérieur non vide. Soit $w \cdot x$ un point dans l'intérieur de $\mathcal{W} \cdot x$. Par translation, x est dans l'intérieur de $w^{-1}\mathcal{W} \cdot x \subset \mathcal{U}.x$. □

Un espace de la forme G/H pour G localement compact et H fermé est généralement appelé *espace homogène.* Ces espaces sont très étudiés en mathématiques.

Les groupes connexes vérifient la propriété suivante.

1.1.17 Lemme. (Centre et connexité)– *Soit G un groupe topologique connexe, de centre $Z = Z(G)$.*

i) Tout sous-groupe distingué et discret N de G est contenu dans Z.

ii) Si Z est discret, le centre de G/Z est réduit à son élément neutre.

18. relire son cours de topologie générale ou analyse fonctionnelle

Démonstration. i) Pour tout élément n de N, l'application $\phi : g \mapsto gng^{-1}n^{-1}$ de G dans G est continue. Elle envoie G dans N (puisque N est distingué), donc $\phi(G)$ est discret dans G. Mais $\phi(G)$ est connexe et contient $e = \phi(n^{-1})$. Donc $\phi(G)$ est réduit à $\{e\}$, et n commute à tous les éléments de G.

ii) Soit x un relevé dans G d'un élément du centre de G/Z. Alors, l'application ψ : $g \mapsto gxg^{-1}x^{-1}$ envoie G dans Z, qui est discret, donc son image est le singleton $\{e\}$, et par conséquent $x \in Z$. □

Exemple. – Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, de centre les homothéties, et donc isomorphe à $\mathbb{C}^*$ (on pourra se reporter au TD ou à son cours d'algèbre linéaire). Il suit que les sous-groupe distingué et discret de $GL_n(\mathbb{C})$ sont les sous-groupes discrets de $\mathbb{C}^*$. En particulier, les sous-groupes distingués finis de $GL_n(\mathbb{C})$ sont cycliques, engendrés par des homothéties.

1.1.18 *Homomorphismes locaux.*

1.1.19 Définition.– *Soient G et G' deux groupes topologiques. On appelle homomorphisme local de G vers G' toute application continue h, d'un voisinage $\mathcal{V}$ de e dans G, vers G', telle que $h(xy) = h(x)h(y)$ dès que x, y et xy sont dans $\mathcal{V}$.*

Si un homomorphisme local induit un homéomorphisme d'un voisinage $\mathcal{V}$ de e sur un voisinage $\mathcal{V}'$ de e' dans G', on dit que c'est un *isomorphisme local*. Dans ce cas, $f^{-1} : \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$ est aussi un homomorphisme local et on dit que G et G' sont *localement isomorphes*. Noter qu'en général, un homomorphisme local ne se prolonge pas en un homomorphisme de groupes.

Exemple. – la projection $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un authentique homomorphisme de groupes topologiques. C'est aussi un isomorphisme local, bien qu'elle ne soit pas injective. L'homomorphisme local inverse ne se prolonge pas en un homomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$. (Exercice : montrer qu'il n'existe pas de tel homomorphisme.)

Plus généralement, si $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe fermé discret, l'homomorphisme quotient $G \longrightarrow G/\Gamma$ est un isomorphisme local, mais n'admet en général pas d'inverse global.

De manière générale les homéomorphismes locaux surviennent dés que l'on prend un revêtement (une notion hors programme mais qui peut avoir été vue par ceux suivant un cours de topologie algébrique) d'un groupe !

1.2 Généralités sur le groupe linéaire et ses décompositions

Nous allons maintenant nous intéresser spécifiquement aux groupes linéaires et à leur sous-groupes. On commence par quelques généralités et (r)appels d'algèbre linéaire, avant de donner plusieurs exemples de sous-groupes. Nous nous intéresserons essentiellement au cas de la dimension finie, mais nous commenons cependant par quelques propriétés de natures générales.

Soit V un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ *le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires continus de V* qui est muni de la norme (dîte d'opérateur)

$$||\varphi|| := sup\{||\varphi(v)||, v \in V, ||v|| = 1\}.$$ [19]

19. Rappelons que $\|\varphi\|$ est aussi égal à $inf\{M \in \mathbb{R}$, t. q. $\forall v \in V$, $\frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} \leqslant M\}$.

Si V est de Banach de Banach (c.a.d. est complet, par exemple un espace de dimension finie) alors $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ est aussi un espace de Banach [20]. La norme d'opérateur a l'importante propriété suivante : elle est sous-multiplicative :

$$\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\| \, \|\psi\|.$$

1.2.1 DÉFINITION.– *On note* $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K}) \subset \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ *le groupe des endomorphismes continus inversibles.*

On prendra garde au fait que, sauf mention explicite du contraire, "inversible" sous-entend "inversible parmi les endomorphismes continus", c'est-à-dire que que l'inverse doit aussi être continu. En particulier, l'inverse d'un élément de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ est bien dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$. Il est clair que la composée de deux bijections bicontinues est encore une bijection bicontinue. Ainsi $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ est bien un groupe.

Lorsque $V = \mathbb{K}^n$, on notera plus simplement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n/\mathbb{K})$. Lorsque le corps de base est clair, on notera parfois aussi $\mathrm{GL}(V)$ pour $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$.

En dimension finie, bijectif implique inversible, mais ce n'est pas vrai en dimension infinie [21]. Cependant, le théorème de l'isomorphisme de Banach implique que si V est de Banach, alors toute bijection linéaire continue de V sur lui-même est un homéomorphisme (et donc dans $GL(V/\mathbb{K})$).

1.2.2 THÉORÈME.– *Soit V un espace de Banach. Le groupe* $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K}) \subset \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ *des endomorphismes continus inversibles est un ouvert dans* $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$*, l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est continue et $GL(V/\mathbb{K})$ est un groupe topologique séparé.*

Si de plus V est de dimension finie, alors G est localement compact, et dense dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ tel que $||\varphi|| < 1$. Comme $\|\varphi^n\| \leqslant \|\varphi\|^n$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n$ est absolument convergente. Puisque $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ est complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n$ converge, et est inversible d'inverse $\mathrm{id}_V - \varphi$. Pour ce dernier point, il suffit de vérifier que

$$(\mathrm{id}_V - \varphi) \sum_{n=0}^{N} \varphi^n = \mathrm{id}_V - \varphi^{N+1}$$

et de faire tendre N vers $+\infty$.

Ainsi $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ contient un voisinage $\mathcal{V}$ de id_V dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$. Soit alors $g \in G$ un élément. La multiplication par g dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ est continue, et ouverte puisque celle par g^{-1} est aussi continue. Ainsi $g.\mathcal{V}$ est un voisinage de g dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ contenu dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$, qui est donc bien ouvert. De même, la série ci-dessus dépendant continûment de φ, on voit que l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est continue au voisinage de id_V. Par translation, elle est continue en tout point.

Pour en déduire que $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ est un groupe topologique, il faut vérifier que la multiplication [22] est continue. C'est une conséquence immédiate du fait que la multiplication est bilinéaire et de l'inégalité $\|\varphi \circ \psi\| \leqslant \|\varphi\| \, \|\psi\|$. Puisque $L(V/\mathbb{K})$ est séparé, $GL(V/\mathbb{K})$ aussi.

Reste à voir la densité dans le cas de dimension finie, c'est à dire $V \cong \mathbb{K}^n$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, considérons la $\mathbb{R}$-droite affine $D_M := (M(t) := M - tI_n)_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Il n'y a qu'un nombre

20. On le laisse en exercice, c'est trivial en dimension finie.
21. Un contre-exemple est donné par l'opérateur de "dérivation" $x\frac{\partial}{\partial x}$ agissant sur les polynomes $\mathbb{K}[X]$.
22. c'est à dire la composition des endomorphismes

fini de valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ n'est pas inversible, donc $D_M \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans D_M. $\square$

Exercice. – Si V est de dimension finie, montrer directement la continuité de $g \mapsto g^{-1}$ à l'aide des formules de Cramer.

Exercice. – Si V est de dimension finie, montrer qu'une partie fermée Γ de G est compacte si et seulement s'il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall g \in \Gamma, ||\gamma|| \leqslant c$ et $det(\gamma) > 1/c$.

1.2.3 Proposition.– *Soit V un espace de Banach. L'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est de classe C^∞, de différentielle donnée en tout point $\varphi \in GL(V/\mathbb{K})$ par l'application linéaire continue $f \mapsto -\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1}$ de $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$.*

Démonstration. D'après la preuve du théorème 1.2.2, on a, pour $\|h\| < 1/\|\varphi^{-1}\|$, que $\varphi + h \in GL(V/\mathbb{K})$ et

$$(\varphi + h)^{-1} - \varphi^{-1}) = -\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1} + \varphi^{-1} \circ \sum_{n=2}^{\infty} (-h \circ \varphi^{-1})^n.$$

Le terme le plus à droite est de la forme $o(\|h\|)$ par sous-multiplicativité de la norme et car $\|h\| \, \|\varphi^{-1}\| < 1$. L'existence et la formule donnée pour la différentielle en découle. Comme une composée de fonctions différentiables l'est encore, on en déduit que l'inverse est de classe C^∞. $\square$

Remarque. (le cas complexe est un cas particulier du cas réel) – Un espace de Banach V sur $\mathbb{C}$ fournit naturellement un espace de Banach $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R}$, muni d'un automorphisme J de carré $-id_{\tilde{V}}$, ce qui permet d'identifier $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ au sous-groupe fermé $\{g \in \mathrm{GL}(\tilde{V}/\mathbb{R}), gJ = Jg\}$ de $\mathrm{GL}(\tilde{V}/\mathbb{R})$, et en particulier, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Exercice. – Voici deux applications de la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, bien connues des agrégatifs, que nous laissons en exercice :

i) Si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont même polynôme caractéristique.
ii) Le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est exactement le groupe $\{\lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}, \lambda \in \mathbb{K}^\times\} \simeq \mathbb{K}^\times$ des homothéties non nulles de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Exercice. – Vérifier que l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ est continue. Soit $P_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices dont la dernière colonne est $(0, \cdots, 0, 1)$ (parfois appelé sous-groupe *mirabolique*).

i) Utiliser la Proposition 1.1.15 pour prouver que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/P_n(\mathbb{K})$ est homéomorphe à $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
ii) Vérifier que $P_n(\mathbb{K})$ est homéomorphe au produit $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{n-1}$.
iii) En déduire par récurrence que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
iv) Toujours par récurrence, prouver que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes et que sa composante neutre est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det(g) > 0\}$.

Cette étude de la connexité des groupes linéaires utilise la proposition 1.1.15. On peut se contenter en fait de la proposition 1.1.15 à l'aide des décompositions polaires qui ramènent l'étude des groupes linéaires à celles de certains sous-groupes compacts.

1.2.4 *L'exponentielle et le logarithme.*

L'exponentielle jouera un rôle très important dans les chapitres suivants.

Soit V un espace de Banach et soit $u \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$. Rappelons que u^k désigne la composée $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois). Comme la norme $||.||$ sur $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ est sous-mutiplicative (*i.e.* $||u^k|| \leqslant ||u||^k$), la série

$$\exp(u) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{u^k}{k!}$$

est normalement convergente, donc convergente dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ puisque celui-ci est complet. Pour les mêmes raisons, elle dépend continûment de u. Par ailleurs, on vérifie facilement que :

$$\textit{si } u \textit{ et } v \textit{ commutent, on a } \exp(u+v) = \exp(u)\exp(v). \tag{1.2.4.1}$$

En particulier, on a $\exp(u)\exp(-u) = \mathrm{id}_V$. On a donc obtenu une application continue, appelée *l'exponentielle d'opérateurs*,

$$\exp : \mathrm{L}(V/\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{K}).$$

Comme $gu^n g^{-1} = (gug^{-1})^n$, un passage à la limite montre que pour tout $g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$, on a

$$\exp(gug^{-1}) \ = \ g\exp(u)g^{-1}. \tag{1.2.4.2}$$

Exercice. – Si V est de dimension finie, montrer que $\det(\exp(u)) = \exp(\mathrm{tr}(u))$.

Dans l'autre sens, considérons la série

$$\log(u) := \sum_{k \geqslant 1} -\frac{(\mathrm{id}_V - u)^k}{k}.$$

Elle converge normalement vers une fonction continue

$$\log : B(\mathrm{id}_V, 1) \longrightarrow \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$$

sur la boule ouverte $B(\mathrm{id}_V, 1) = \{u, || \mathrm{id}_V - u|| < 1\}$, qui est contenue dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$. On vérifie formellement

1.2.5 LEMME.– *Pour tout* $u \in B(\mathrm{id}_V, 1)$*, on a* $\exp \circ \log(u) = u$*. Inversement, on a* $\log \circ \exp(u) = u$ *pour tout* $u \in B(0, \log(2))$ [23]

Démonstration. Ce sont des manipulations formelles qui viennent du fait suivant. Si $f(z) = \sum_n^\infty a_n z^n$ et $g(z) = \sum_n^\infty b_n z^n$ sont des séries entières de rayon de convergence strictement positifs, avec $g(0) = 0$, alors la fonction $f \circ g$ est aussi développable en série entière (*i.e.* analytique) dans un voisinage $\mathcal{V}$ de 0. Si maintenant $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (ou en fait dans n'importe quelle algèbre de Banach, par exemple $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ pour V de Banach) vérifie que $\sum_{n=0}^\infty \|b_n\| \|X\|^n$ est strictement plus petite que le rayon de convergence de f, alors, les séries $g(X)$, $f(g(X)$ et $(f \circ g)(x)$ sont bien convergentes et de plus $(f \circ g)(X) = f(g(X))$. Ces derniers points, une fois que l'on vérifie que la condition mise garantit les convergences normales, sont juste des manipulations formelles des coefficients du développement en série entière de $f \circ g$ en fonction de ceux de f et g. $\square$

23. (la convergence du log étant ici assurée par $|| \mathrm{id}_V - \exp(u)|| < \exp(||u||) - 1 < 1$

En particulier, on constate

1.2.6 PROPOSITION.– *L'application exponentielle* exp *réalise un homéomorphisme local d'un voisinage de* 0 *sur un voisinage de* id_V.

Exercice. – Vérifier que exp n'est pas injective. (Indication : en dimension 2 sur $\mathbb{R}$, calculer $\exp\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$.)

Exercice. – Trouver un voisinage $\mathcal{V}$ de id_V dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ qui ne contient pas de sous-groupe non-trivial.

En dimension finie, on peut utiliser des techniques différentielles, qui seront très utiles par la suite.

LEMME. – *Supposons V de dimension finie. Alors*

i) exp *est $\mathbb{K}$-analytique (donc en particulier de classe C^∞).*

ii) exp *réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de* $0 \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ *sur un voisinage de* $\mathrm{id}_V \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$.

Démonstration. i) est clair d'après la formule. On peut aussi prouver la différentiabilité par le théorème de dérivation d'une série dont la somme des dérivées converge uniformément sur tout compact.

ii) On a $\exp(u)-\exp(0) = u+o(u)$, donc la différentielle en 0 est l'identité qui est inversible, et on peut appliquer le théorème d'inversion locale. Alternativement, on peut utiliser le log. □

1.2.7 *Rappels sur les décompositions de Jordan.* On suppose ici que V est de dimension finie. De plus, si le corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on note $V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = V \oplus iV$ le complexifié de V.

DÉFINITION. – *Soit $a \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ un $\mathbb{K}$-endomorphisme de V. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, notons $a_\mathbb{C}$ l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de a à $V_\mathbb{C}$. On dit que a est :*

i) semi-simple *si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(a) $V_\mathbb{C}$ est somme directe de sous-espaces propres pour $a_\mathbb{C}$, c'est-à-dire $a_\mathbb{C}$ est diagonalisable ;

*(b) le polynôme minimal $m_a(T)$ de a est séparable (*i.e. *n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$), autrement dit : la K-algèbre $K[a]$ engendrée par a dans $End(V/\mathbb{K})$ est isomorphe à un produit de corps.*

ii) nilpotent *si une puissance de a est nulle (de façon équivalente, si toutes les valeurs propres de $a_\mathbb{C}$ sont nulles),*

iii) unipotent *si $a - id_V$ est nilpotent (de façon équivalente, si toutes les valeurs propres de $a_\mathbb{C}$ sont égales à 1).*

Il est conseillé de relire, si besoin est, les cours d'algèbre linéaire de L2-L3 (ou toute autre référence) pour se convaincre de l'équivalence des conditions. On rappelle aussi les propriétés très utiles de diagonalisation ou trigonalisation simultanées :

1.2.8 Proposition.– *Soit $\mathcal{E} \subset \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ une famille d'endomorphismes trigonalisables (resp. diagonalisables) qui commutent deux à deux, alors il existe une base de V dans laquelle tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont triangulaires (resp. diagonaux).*

Remarquons qu'une famille d'endomorphismes diagonaux simultanément diagonalisables commutent nécessairement entre eux. Ce n'est en général *pas* le cas des familles de matrices simultanément trigonalisables.

Nous laissons en exercice les propriétés topologiques suivantes :

Exercice. – Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Montrer que l'ensemble $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{ss}}$ des $\mathbb{K}$-endomorphismes semi-simples de V est dense dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$.
- Montrer que l'ensemble $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{nilp}}$ des endomorphismes nilpotents de V est fermé dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$.
- Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{unip}}$ des automorphismes unipotents de V est fermé dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$.

1.2.9 *Sur l'image de l'exponentielle.*

1.2.10 Proposition.– *L'exponentielle induit un homéomorphisme*

$$\exp : \mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{nilp}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{unip}}$$

dont l'inverse est donné par la série log.

Démonstration. Si a est nilpotent, on a $a^n = 0$ pour $n = \dim(V)$. Donc la restriction de l'exponentielle à $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{nilp}}$ est donnée par le polynôme $a \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$. En particulier $\mathrm{id}_V - \exp(a)$ est nilpotent donc $\exp(a)$ est unipotent. Réciproquement si u est unipotent, $\log(u)$ est donnée par le polynôme $\sum_{k=1}^{n} -\frac{(\mathrm{id}_V - u)^k}{k}$ et est nilpotent puisque $\mathrm{id}_V - u$ l'est !

Ainsi $\exp : \mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{nilp}} \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{unip}}$ et $\log : \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{unip}} \longrightarrow \mathrm{L}(V/\mathbb{K})^{\mathrm{nilp}}$ sont bien définis. Un calcul formel (comme pour le lemme 1.2.5) montre qu'ils sont inverses l'un de l'autre. □

1.2.11 Proposition.– *Soit V de dimension finie sur $\mathbb{K}$.*

*i) (*Jordan additif[24]*) Soit a un $\mathbb{K}$-endomorphisme de V. Il existe un unique couple (a_s, a_n) de $\mathbb{K}$-endomorphismes de V, vérifiant $a_s + a_n = a$ avec a_s semi-simple, a_n nilpotent et $a_s a_n = a_n a_s$. De plus, a_s et a_n s'expriment comme des polynômes en a à coefficients dans $\mathbb{K}$, sans termes constants.*

*ii) (*Jordan multiplicatif*) Soit g un $\mathbb{K}$-automorphisme de V. Il existe un unique couple (g_s, g_u) de $\mathbb{K}$-automorphismes de V, avec g_s semi-simple, g_u unipotent et $g_s g_u = g_u g_s = g$. De plus, g_s et g_u s'expriment comme des polynômes en g à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Pour l'existence de ces décompositions, et leur expression sous forme polynômiale, voir le cours d'algèbre de L3. Rappelons que les décompositions sont reliées de la manière suivante : si $g \in GL(V/\mathbb{K})$, les parties semi-simples de la décomposition additive et de la décomposition multiplicative sont les mêmes, et on a $g_u = \mathrm{id}_V + g_s^{-1} g_n$.

24. parfois appelé décomposition de Dunford

L'unicité se déduit de la remarque suivante. Soit a et b deux endomorphismes de V tels que $ab = ba$. Alors, si a et b sont nilpotents, $a + b$ est nilpotent ; si a et b sont unipotents, ab est unipotent ; si a et b sont semi-simples, ab et $a + b$ sont semi-simples. (En effet, a et b, ou le cas échéant $a_{\mathbb{C}}$ et $b_{\mathbb{C}}$, sont simultanément diagonalisables). □

Corollaire. – *Si $K = \mathbb{C}$, l'exponentielle* $\exp : \mathrm{L}(V/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ *est surjective.*

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$. Ecrivons g sous forme de Jordan $g = g_s g_u$. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de g. Choisissons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_i) = \log\lambda_i$ pour tout i. Alors $x_s := P(g_s)$ est un logarithme de g_s. Comme dans la première proposition, $x_u := \log(\mathrm{id}_V - g_u)$ est un polynôme en g_u, est nilpotent, et est un logarithme de g_u. Comme x_u et x_s sont des polynômes en g, ils commutent, et par conséquent, posant $x = x_u x_s$, on a $\exp(x) = \exp(x_s)\exp(x_u) = g_s g_u = g$. □

Si $K = \mathbb{R}$, on vérifie facilement que l'image de l'exponentielle est contenue dans la composante neutre $\mathrm{GL}^+(V/\mathbb{R})$. Pour $n > 1$, elle y est strictement contenue.

Exercice. – Trouver un logarithme réel pour la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mais montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

1.2.12 *Décomposition polaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un outil très utile pour l'étude topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ *orthogonales*, et soit SDP_n l'ensemble des matrices $n \times n$ *symétriques définies positives*. Nous aurons aussi besoin de l'espace vectoriel $\mathrm{S}_n \simeq \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ de toutes les matrices symétriques de taille n.

Lemme. – *i)* $\mathrm{O}(n)$ *est un sous-groupe compact (donc fermé) de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

ii) SDP_n *est un demi-cône convexe de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, fermé dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

iii) L'application exp *induit un homéomorphisme* $\mathrm{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{SDP}_n$.

iv) L'application $S \mapsto S^2$ *est un homéomorphisme de* SDP_n *dans lui-même.*

Démonstration. i) Le groupe $\mathrm{O}(n)$ est l'image réciproque de $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$, donc il est fermé. Il est aussi borné pour la norme euclidienne $M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, donc compact.

ii) être un "demi-cône" signifie simplement être "stable par homothéties positives", ce qui est évident pour SDP_n. Être convexe signifie que pour $A, B \in \mathrm{SDP}_n$, on a $M(t) := tA + (1-t)B \in \mathrm{SDP}_n$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il est clair que $M(t)$ est symétrique. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle M(t)x, x\rangle = t\langle Ax, x\rangle + (1-t)\langle Bx, x\rangle > 0$, donc $M(t)$ est bien définie positive. Enfin, si une suite de matrices de SDP_n converge vers S dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors S est symétrique et ses valeurs propres de S sont $\geqslant 0$. Donc si S est dans $\mathrm{GL}_n(K)$, elle est aussi dans SDP_n.

iii) Si T est symétrique, alors ses valeurs propres sont réelles. La matrice $\exp(T)$ est clairement symétrique et ses valeurs propres sont les exponentielles de celles de T, donc sont strictement positives. On a donc bien $\exp(T) \in \mathrm{SDP}_n$. Prouvons la surjectivité. Soit $S \in \mathrm{SDP}_n$. Elle est diagonalisable dans une base orthonormée et à valeurs propres strictement positives. Elle est donc de la forme $S = O.D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).O^{-1}$ où O est une matrice orthogonale et $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale des valeurs propres $\lambda_i > 0$ de S. La matrice $\ell(S) :=$

$O.D(\log\lambda_1, \cdots, \log\lambda_n).O^{-1}$ est symétrique et vérifie $S = \exp(\ell(S))$, d'où la surjectivité. Pour l'injectivité, fixons $T \in \mathrm{S}_n$, posons $S := \exp(T)$, et montrons que $T = \ell(S)$. Pour cela on remarque que $\ell(S)$ est un polynôme en S (prendre un polynôme qui envoie chaque λ_i sur $\log\lambda_i$). Il s'ensuit que T commute à $\ell(S)$, puisqu'elle commute à S. On peut alors diagonaliser T et $\ell(S)$ dans une même base. Comme elles ont les mêmes valeurs propres, elles sont donc égales.

Reste à voir la continuité de la bijection réciproque $S \mapsto \ell(S)$. Soit $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers S. Écrivons chaque S_i sous la forme $O_i D_i O_i^{-1}$ avec O_i orthogonale et D_i diagonale. En notant $D \mapsto \log(D)$ l'application continue qui à une matrice diagonale à coefficients > 0 associe la matrice diagonale obtenue en prenant le logarithme de ses coefficients, on a que $\ell(S_i) = O_i \log(D_i) O_i^{-1}$. Autrement dit, la continuité sur les matrices diagonales est triviale. Il reste à voir que la continuité survit indépendamment du choix des bases de daigonalisation ; on va utiliser la compacité de $\mathrm{O}(n)$ pour cela.

Puisque $O_i D_i O_i^{-1}$ converge vers $S = ODO^{-1}$, et que O_i appartient au compact $\mathrm{O}(n)$, les coefficients de D_i, et donc les valeurs propres de S_i sont bornés. Ainsi, la suite $(D_i)_{i\in I}$ est dans un voisinage compact K de D et, pour montrer que la suite $\ell(S_i) = O_i \log(D_i) O_i^{-1}$ converge, il suffit de montrer que toute ses sous-suites convergentes (dans le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\log(K)\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$) convergent vers la même limite. Soit donc $\ell(S_{\varphi(i)}) = O_{\varphi(i)} \log(D_{\varphi(i)}) O_{\varphi(i)}^{-1}$ qui converge.

Comme $\mathrm{O}(n)$ est compact, on peut aussi extraire de la suite $(O_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ une suite $(O_{\psi\circ\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente vers $\tilde{O}$. On obtient ainsi que la matrice diagonale $D_{\psi\circ\varphi(i)}$ converge vers la matrice (nécessairement diagonale) $\tilde{O}^{-1} S \tilde{O}$. Par injectivité de l'exponentielle obtenue précédemment, on en déduit que $\log(\tilde{O}^{-1} S \tilde{O}) = \ell(\tilde{O}^{-1} S \tilde{O}) = \tilde{O}^{-1} \ell(S) \tilde{O}$ [25]. Ainsi, en utilisant la continuité du logarithme sur les coefficients d'une matrice diagonale

$$\lim_i \ell(S_{\varphi(i)}) = \lim_i \ell(S_{\psi\circ\varphi(i)}) = \tilde{O} \lim_i \log(D_{\psi\circ\varphi(i)}) \tilde{O}^{-1} = \tilde{O} \log(\lim_i D_{\psi\circ\varphi(i)}) \tilde{O}^{-1} = \ell(S).$$

On a donc une seule limite possible et par conséquent la suite $(\ell(S_{\varphi(i)}))_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(S)$. On a montré que toute sous-suite convergente Cela prouve que la suite est convergente.

iv) L'homéomorphisme réciproque est $S \mapsto \sqrt{S} := \exp(\frac{1}{2}\ell(S))$.

□

THÉORÈME. (Décomposition polaire) – *L'application produit*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(n) \times \mathrm{SDP}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. L'application est évidemment continue. Observons que si $M = OS$, alors ${}^tMM = S^2$. Réciproquement, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ est définie positive et $M.\sqrt{{}^tMM}^{-1}$ est orthogonale. Il s'ensuit que l'application continue

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{O}(n) \times \mathrm{SDP}_n \\ M & \mapsto & (M.\sqrt{{}^tMM}^{-1}, \sqrt{{}^tMM}) \end{array}$$

est une (la) bijection réciproque de l'application de l'énoncé. □

25. on obtient même, quitte à réindicer l'ordre des vecteurs propres de D, c'est à dire à changer O, que $\log(D_{\varphi(i)})$ converge vers $\log(D)$

Le groupe compact $\mathrm{O}(n)$ *est en fait maximal parmi les sous-groupes compacts de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, cf l'exercice suivant

Exercice. – Soit H un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathrm{O}(n)$.

i) Soit $Q \in \mathrm{SDP}_n$ et M une constante telle que $\|Q^k\| \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $Q = \mathbf{I}_n$ la matrice identité.

ii) En utilisant la décomposition polaire, en déduire que $H = \mathrm{O}(n)$.

Montrer que tout sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $\mathrm{O}(n)$, c'est à dire de la forme $g \cdot \mathrm{O}(n) \cdot g^{-1}$ avec $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.2.13 *Décomposition polaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Celle-ci est analogue à la précédente, mais il faut trouver un substitut au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$, qui n'est plus compact. Soit $\mathrm{U}(n)$ le groupe des matrices $n \times n$ *unitaires* (*i.e.* qui vérifient ${}^t\overline{A}.A = I_n$) et soit HDP_n l'ensemble des matrices $n \times n$ *hermitiennes définies positives.* Les deux résultats suivants se prouvent comme dans le cas réel. Nous avons aussi besoin de l'espace vectoriel $\mathrm{H}_n \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ de toutes les matrices hermitiennes de taille n.

Les deux résultats suivants se prouvent comme dans les cas réel.

LEMME. – *i)* $\mathrm{U}(n)$ *est un sous-groupe compact (donc fermé) de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

ii) HDP_n *est un demi-cône convexe de* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, fermé dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

iii) L'application exp *induit un homéomorphisme* $\mathrm{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{HDP}_n$.

iv) L'application $M \mapsto M^2$ *est un homéomorphisme de* HDP_n *dans lui-même.*

THÉORÈME. – *L'application produit*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}(n) \times \mathrm{HDP}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) & \mapsto & UH \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Remarque culturelle. – Les groupe $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{U}(n)$ sont en fait des sous-variété lisses de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{M}_n\mathbb{C}$. On peut vérifier que les applications produit des Théorèmes 1.2.12 et 1.2.13 sont des difféomorphismes de classe C^∞.

1.3 Groupes de Lie (linéaires) : définition, exemples classiques.

1.3.1 DÉFINITION.– *On appelle groupe de Lie linéaire tout groupe topologique* isomorphe *à un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *(pour un certain* $n \geqslant 0$*).*

Un homomorphisme (resp. isomorphisme) entre deux groupes de Lie (linéaires) G, H *est un homomorphisme (resp. isomorphisme) de groupes topologiques entre* G *et* H.

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on peut remplacer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ou même par $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ pour V de dimension finie, dans la définition ci-desus [26].

Par commodité, nous parlerons souvent simplement de “groupe de Lie”, car, dans ce texte nous ne nous intéresserons pas à d'autres groupes de Lie. Il faut préciser ici que la notion de groupe de Lie que l'on trouve dans la littérature avancée est plus générale et plus intrinsèque que celle-ci, mais nécessite le vocabulaire de la géométrie différentielle que nous ne supposons pas connu.

26. s'en convaincre !

Remarques. – — Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ (et ce, de plusieurs manières différentes), un groupe de Lie linéaire peut toujours être plongé comme un sous-groupe fermé d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de plusieurs manières. Un tel choix de plongement ***ne fait pas*** partie de la définition d'un groupe de Lie. Seule l'existence d'un tel plongement importe.
Les groupes classiques issus de la géométrie euclidienne/hilbertienne dont nous donnons un aperçu ci-dessous ont cependant souvent un plongement standard. Ce n'est cependant pas le cas de tous les groupes de Lie.

— Un sous-groupe fermé $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (bien que ce soit le cas de la plupart des groupes classiques). Considérer par exemple les groupes triangulaires $\mathrm{B}_n(\mathbb{R})$, cf paragraphe 1.3.7.

— On remarquera que si G est un groupe de Lie linéaire compact, alors tout homomorphisme de groupe topologique continus de G dans $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ est a pour image un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. Ce n'est pas le cas si G n'est pas compact ; penser au fil, voir 1.1.16 et les paragraphes 1.3.9, 1.3.10.

Remarque culturelle. – De manière générale un groupe de Lie est un groupe abstrait, muni d'une structure de variété différentiable (lisse) de telle sorte que la multiplication et l'inverse soient des applications lisses.

Tout groupe de Lie (linéaire) (Définition 1.3.1) est un groupe de Lie en ce dernier sens.

Ceci est essentiellement une conséquence du fait que l'exponentielle de matrice définit un homéomorphisme local et que les multiplications à gauche et à droite par des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de classes C^∞. Plus précisément, le Théorème 2.2.7 donnent des cartes locales en tout point d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui établissent la structure de variétés.

En revanche un sous-groupe non-fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas forcément une variété. Par exemple l'enroulement irrationnel d'une droite sur un tore (Exemple 1.1.16) est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ (puisque le cercle est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$), mais n'est pas une sous-variété. Il existe des sous-groupes non fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas (isomorphes à) des groupes de Lie. Par exemple, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ ne peut pas être muni d'une structure de variété (il est totalement discontinu, mais non-discret).

Enfin, il existe des groupes de Lie qui ne sont pas des groupes de Lie linéaires. Nous en mentionnerons un ou deux exemples. *(Fin de la remarque)*

On peut démontrer [27] que

Proposition. – *Tout groupe de Lie (linéaire) connexe est connexe par arcs.*

Nous avons déjà rencontré $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{U}(n)$. Voici un tour d'horizon des groupes de Lie dits "classiques".

1.3.2 *Groupes linéaires spéciaux et projectifs.* Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie :
le déterminant $A \mapsto \det(A)$ *est un homomorphisme de groupes topologiques de* $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}^* := \mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$.

Son noyau $\mathrm{SL}(V/\mathbb{K})$ s'appelle le groupe spécial linéaire de V. Il est fermé [28] dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$, non compact, (sauf $\mathrm{SL}_1(\mathbb{K}) = \{1\}$ qui est compact). *Pour* $V = \mathbb{K}^n$ *on le note* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.

27. cela suit par exemple du fait, hors programme, que les groupes de Lie linéaires sont des variétés
28. car c'est la pré-image $\det^{-1}(\{1\})$ d'un fermé par une application continue.

Pour $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe [29], de même que le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ [30]. Pour voir cela on peut utiliser le fait que ces groupes sont engendrés par les matrices de transvection.

Exercice. – Le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est formé des homothéties de déterminant 1, donc il est isomorphe au groupe $\mu_n(\mathbb{K})$ des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{K}^*$ (d'ordre n si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'ordre 1 ou 2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Les groupes $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/(\mathbb{K}^*\mathbf{I}_n), \mathrm{PSL}_n(\mathbb{K}) := \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})/(\mu_n(\mathbb{K})\mathbf{I}_n)$ interviennent naturellement en géométrie projective [31]. Il n'est pas complètement évident de voir que ce sont bien des groupes de Lie linéaires. Voici une possibilité.

Exercice. – Montrer que l'action par conjugaison $g.f := g \circ f \circ g^{-1}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est continue et induit un homomorphisme continu $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$, dont le noyau est le centre $\mathbb{K}^\times$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Enfin, montrer que ce morphisme identifie $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ à un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$.

1.3.3 *Groupes orthogonaux.* Comme d'habitude $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On pose

$$\mathrm{O}(\Phi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K}),\ \Phi(gv, gw) = \Phi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ appelé groupe orthogonal de Φ. On vérifie facilement que deux formes quadratiques équivalentes ont des groupes orthogonaux isomorphes (et mêmes conjugués). Lorsque $K = \mathbb{C}$, on sait que toutes les formes quadratiques sont équivalentes, de sorte que $\mathrm{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe orthogonal complexe usuel

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ {}^tMM = I_n\}.$$

Exercice. – Utiliser la décomposition polaire pour exhiber un homéomorphisme entre $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$.

Lorsque $K = \mathbb{R}$, le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leqslant n$ et d'une base $e_1, \cdots, e_n$ dans laquelle

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^n x_i y_i.$$

Le couple d'entiers $(p, q := n - p)$ s'appelle la *signature* de Φ. Ainsi $\mathrm{O}(\Phi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\mathrm{O}(p, q) := \left\{M \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{R}),\ {}^tM.D_{p,q}.M = D_{p,q}\right\}$$

où $D_{p,q} = D(1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$ est la matrice diagonale où 1 est répété p fois et -1 l'est q fois. Pour $p = n$ et $p = 0$, on retrouve le groupe orthogonal *euclidien* $\mathrm{O}(n, 0) = \mathrm{O}(n)$ qui, comme on l'a vu, est compact et agit continûment sur la sphère euclidienne S^{n-1}. Les autres

29. connexe, mais pas simplement connexe ; ainsi, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ a un π_1 isomorphe à $\mathbb{Z}$, et il n'existe aucun homomorphisme continu injectif de son revêtement universel dans un groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ce revêtemet universel est un exemple de groupe de Lie “non linéaire”.

30. qui, lui, est simplement connexe.

31. où ils jouent le rôle qu'à le groupe affine en géométrie affine.

groupes orthogonaux *ne sont pas* compacts ; ils agissent sur des espaces “hyperboliques”. Par exemple $\mathrm{O}(1,n-1)$ est le groupe d'isométrie de l'hyperboloïde $\mathcal{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 = 1\}$.

Exercice. – Montrer que $\mathrm{O}(1,1)$ est non-compact. En déduire que $\mathrm{O}(p,q)$ est non-compact pour $p,q>0$.

On a $\mathrm{O}(p,q) = \mathrm{O}(q,p)$ et on montre que les $\mathrm{O}(p,q)$ pour $q \leqslant p$ sont deux à deux non isomorphes.

Exemple. – Pour la forme $xx' + yy' + zz' - tt'$ sur l'espace-temps $\mathbb{R}^4$, on obtient ainsi le *groupe de Lorentz* $\mathrm{O}(3,1)$ qui intervient dans la théorie de la relativité générale.[32]

Exercice. – i) Vérifier que $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(p+q) = \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ en tant que groupe topologique.

ii) Démontrer que la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ se restreint en un homéomorphisme

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SDP}_{p+q}).$$

iii) À l'aide de l'exponentielle, vérifier que $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SDP}_{p+q}$ est homéomorphe à un espace affine $\mathbb{R}^d$.

Cet exercice ramène l'étude topologique des $\mathrm{O}(p,q)$ à celles des $\mathrm{O}(n)$. En particulier, on constate que $\mathrm{O}(p,q)$ *a* 4 *composantes connexes dès* $pq \neq 0$.

Par ailleurs, on définit les groupes spéciaux orthogonaux par

$$\mathrm{SO}(p,q) := \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

On peut montrer que $\mathrm{SO}(p,q)$ a deux composantes connexes et est d'indice 2 dans $\mathrm{O}(p,q)$.

Exercice. – Vérifier que l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur la sphère euclidienne $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 = 1\}$ est continue. Soit $\mathrm{SO}(n)$ le groupe spécial orthogonal (déterminant 1). Utiliser la proposition 1.1.11 pour trouver un homéomorphisme $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$, où l'on voit $\mathrm{SO}(n-1)$ plongé dans un bloc diagonal de $\mathrm{SO}(n)$. En déduire par récurrence la connexité[33] de $\mathrm{SO}(n)$, puis le fait que $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes, et enfin retrouver les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ grâce à la décomposition polaire 1.2.12.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ *est un sous-groupe maximal de* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$:

Exercice. – Soit H (qu'on ne suppose pas nécessairement compact) un sous-groupe de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, contenant $\mathrm{SO}(n)$. On veut montrer que si $H \neq \mathrm{SO}(n)$, alors $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Les cas $n = 0, 1$ étant triviaux, on suppose $n \geqslant 2$.

i) Soit $f = oh$ la décomposition polaire d'un élément $f \in H \setminus \mathrm{SO}(n)$. Montrer que h a au moins deux valeurs propres distinctes et que si $h' \in \mathrm{SDP}_n$ a les mêmes valeurs propres (avec multiplicité) que h, alors $h' \in H$.

ii) On suppose dans cette question que $n = 2$.

(a) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la matrice $h_\lambda := \lambda D_{1,1}$ soit dans H.

32. Le groupe spécial correspondant $\mathrm{SO}(3,1)$ admet $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ pour revêtement universel.

33. Par la même méthode on peut montrer aussi que le groupe fondamental $\pi_1(\mathrm{SO}(n))$ est un groupe d'ordre 2, pour $n \geqslant 3$. Le revêtement universel $\mathrm{Spin}(n)$ de $\mathrm{SO}(n)$ est appelé groupe spinoriel.

(b) Soit $u_\theta \in \mathrm{SO}(2)$ la matrice de la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\|u_\theta \cdot h_\lambda \cdot u_\theta^{-1} \cdot h_\lambda\| \supset [1, \lambda^2]$.

(c) En déduire que, pour tout $\mu \in [1, \lambda^4]$, la matrice $\mu D_{1,1}$ est dans H.

(d) Conclure que $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

iii) On suppose le résultat démontré pour $n \geqslant 2$ et on identifie $\mathrm{SL}_n \mathbb{R}$ avec le sous-groupe de $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ des matrices dont la dernière colonne est $(0, \dots, 0, 1)$.

(a) Démontrer qu'il existe un sous-groupe H' de H tel que $\mathrm{SO}(n) \subset H' \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et tel que $H' \setminus \mathrm{SO}(n) \neq \emptyset$.

(b) En déduire que $H \supset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ puis conclure que $H = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ (on pourra utiliser que $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection, c'est à dire celle de la forme $\mathbf{I}_n + E_{i,j}$ $(i \neq j)$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont le seul coefficient non-nul vaut 1 est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j).

Lorsque la signature est $(n, 0)$, la forme quadratique $\Phi(v, v)$ est définie positive et $\mathrm{O}(\Phi)$ est le groupe d'isométries de l'espace euclidien (V, Φ). Plus généralement, soit V un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un Banach dont la norme provient d'un produit scalaire. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(V)$ est le groupe des isométries de V, c'est-à-dire des automorphismes $\mathbb{K}$-linéaires g de V tels que $||g(v)|| = ||v||$ pour tout $v \in V$, ou encore tels que $g.g^* = g^*.g = id_V$, où g^* désigne l'adjoint de g pour le produit scalaire. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$.

1.3.4 *Groupes unitaires.* Ici $K = \mathbb{C}$. Soit donc V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\Psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme sesquilinéaire *hermitienne* non dégénérée. On pose

$$\mathrm{U}(\Psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{C}),\ \Psi(gv, gw) = \Psi(v, w), \forall v, w \in V\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ appelé groupe unitaire de Ψ.

Comme dans le cas réel, deux formes hermitiennes équivalentes ont des groupes unitaires isomorphes. Ici aussi, les formes hermitiennes sont classifiées par leur *signature* : le théorème de Sylvester affirme l'existence d'un entier $p \leqslant n$ et d'une base $e_1, \cdots, e_n$ dans laquelle

$$\Psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i \overline{y}_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

Ainsi, posant $q = n - p$, le groupe topologique $\mathrm{U}(\Psi)$ est isomorphe au groupe matriciel

$$\mathrm{U}(p, q) := \left\{M \in \mathrm{M}_{p+q}(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{M}.D_{p,q}.M = D_{p,q}\right\}$$

Pour $pq = 0$, on retrouve le groupe unitaire habituel $\mathrm{U}(n, 0) = \mathrm{U}(n)$ qui, comme on l'a vu, est compact. Il faut faire attention à *ne pas le confondre* avec $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$. Les autres groupes unitaires ne sont pas compacts. On a $\mathrm{U}(p, q) = \mathrm{U}(q, p)$ et on montre que les $\mathrm{U}(p, q)$ pour $q \leqslant p$ sont deux à deux non isomorphes.

Exercice. – Comme dans le paragraphe précédent, la décomposition polaire de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$ induit un homéomorphisme

$$\mathrm{U}(p, q) \simeq \mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \times (\mathrm{U}(p, q) \cap \mathrm{HDP}_{p+q}),$$

que l'on peut utiliser pour ramener l'étude topologique des $\mathrm{U}(p, q)$ à celle des $\mathrm{U}(n)$.

Remarque. – Les groupes $\mathrm{U}(1, n-1)$ jouent un rôle prépondérant dans des problèmes actuels de théorie des nombres.

De même que précédemment, on a le groupe spécial unitaire

$$\mathrm{SU}(p,q) := \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Exercice. – Vérifier que l'action naturelle de $\mathrm{U}(n)$ sur la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ est continue. Puis utiliser la proposition 1.1.11 pour trouver un homéomorphisme $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) \xrightarrow{\sim} S^{2n-1}$. En déduire par récurrence la connexité [34] de $\mathrm{U}(n)$ et celle de $\mathrm{SU}(n)$.

Exercice. – Déterminer les centres de $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$.

En dimension infinie, on définit le groupe unitaire d'un espace de Hilbert V comme le groupe d'isométrie du produit scalaire, qui est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$, comme dans le cas réel.

1.3.5 *Groupe symplectique.* À nouveau, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère cette fois un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie V muni d'une forme bilinéaire $\psi : V \times V \longrightarrow K$, *alternée* et non dégénérée (aussi appelée "forme symplectique"). L'existence d'une telle forme sur V implique que la dimension de V est paire, disons $\dim(V) = 2n$. On définit alors

$$\mathrm{Sp}(\psi) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K}),\ \psi(gv, gw) = \psi(v,w), \forall v, w \in V\}.$$

Comme plus haut, ce groupe ne dépend, à isomorphisme près, que de la classe d'équivalence de ψ. Or, on sait que toutes les formes symplectiques sont équivalentes. En particulier, il existe une base $e_1, \cdots, e_{2n}$ de V dans laquelle on a

$$\psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

En d'autres termes, la matrice de ψ dans cette base est la matrice antisymétrique $J = J_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0_n \end{pmatrix}$. On voit alors que $\mathrm{Sp}(\psi)$ est isomorphe au *groupe symplectique*

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K}), {}^t M J M = J\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. Plus généralement, on démontre que le déterminant d'une matrice symplectique vaut toujours 1, de sorte que pour tout n, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$ est un sous-groupe fermé, non compact, de $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{K})$.

Exercice. – Montrer que la partie réelle (resp. imaginaire) d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel $V/\mathbb{C}$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique (resp. alternée) sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent $\tilde{V}$. En déduire que dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), P^{-1} J_2 P = J_2\} \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

34. Par la même méthode on prouve la simple connexité de $\mathrm{SU}(n)$ et on montre que le groupe fondamental de $\mathrm{U}(n)$ est isomorphe à $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$.

1.3.6 *Quaternions.* Soient $\mathbb{H}$ le corps des *quaternions* de Hamilton, qui en tant que $\mathbb{R}$ espace vectoriel est engendré librement par 4 vecteurs noté 1, i, j, k. Le vecteur 1 est l'unité de la multiplication qui est définie par les relations additionnelles $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ [35]. On vérifie que cette multiplication fait de $\mathbb{H}$ un corps gauche [36]. On a une identification triviale de $\mathbb{C}$ avec la sous-algèbre de H engendrée par 1 et i.

Soit σ l'anti-involution de $\mathbb{H}$ définie par $\sigma(x + yi + zj + tk) = x - yi - zj - tk$, de sorte que $||u|| := \sqrt{\sigma(u).u}$ définit une structure d'espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, et U le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$ formé par les quaternions de norme 1. Par définition U n'est autre que la sphère (unité) S^3 de dimension 3. On peut voir $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j \simeq \mathbb{C}^2$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 , et $||.||$ comme un produit hermitien. Alors, l'application $\rho : U \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ qui attache à $u \in U$ l'automorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathbb{H} : h \to \rho(u)(h) := hu^{-1}$ est un homomorphisme de groupes injectif. Comme $||hu|| = ||h||.||u|| = ||h||$ pour tout $h \in \mathbb{H}$, son image est contenue dans le groupe unitaire U(2). En fait, pour $u^{-1} = \alpha + \beta j \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$ de norme $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$, la matrice représentative de $\rho(u)$ dans la base $\{1, j\}$ de $\mathbb{H}$ est donnée par $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1}$, de sorte que ρ établit un isomorphisme $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{SU}(2)$. En particulier $S^3 \cong U$ est donc un groupe de Lie linéaire.

L'espace $\mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ des quaternions purs, muni de $||.||$, s'identifie à l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$. Pour tout $u \in U$, l'application $Int(u) : h \mapsto uhu^{-1}$ de $\mathbb{H}$ induit une isométrie de $\mathbb{R}^3$, d'où un homomorphisme de groupe $\pi : U \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, appliquant u sur $\pi(u) = (Int(u))|_{\mathbb{R}^3}$, de noyau $U \cap Z(\mathbb{H}^*) = \{\pm 1\}$. On montrera plus tard que π est surjective, de sorte que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathbf{1}_2\}$. [37]

Dans le même ordre d'idée, considérons $\mathbb{H}^n$ comme un espace vectoriel à droite sur $\mathbb{H}$, et soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ le groupe des automorphismes $\mathbb{H}$-linéaires de $\mathbb{H}^n$. Avec l'identification $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n + j\mathbb{C}^n$, on a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \{P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}), PJ_{2n} = J_{2n}\overline{P}\}$. Son sous-groupe $\mathrm{U}_n(\mathbb{H}) = \mathrm{U}(2n) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ coïncide avec $U \simeq \mathrm{SU}(2)$ pour $n = 1$, mais c'est en général un nouveau groupe (compact, connexe [38]).

1.3.7 *Groupes triangulaires.* Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Un *drapeau complet* dans V est une suite strictement croissante

$$\mathcal{V} = (\{0\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{V}_n = V)$$

de $\mathbb{K}$-sev de V. En particulier, on a $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_i) = i$ pour $i = 0, \cdots, n$. Par exemple, pour $V = \mathbb{K}^n$, on a le drapeau complet $\mathcal{V}_i := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique. On pose

$$\mathrm{B}(\mathcal{V}/\mathbb{K}) := \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K}),\, g(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \forall i = 0, \cdots, n\}.$$

et son sous-groupe

$$\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/\mathbb{K}) := \{g \in \mathrm{B}(\mathcal{V}/\mathbb{K}),\, (g - \mathrm{id}_V)(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

On vérifie facilement que ce sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ et que $\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ est distingué dans $\mathrm{B}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$.

35. en particulier $ij = -ji$, $ik = -ki$, $jk = -kj$.
36. ce qu'on appelle aussi une algèbre à division ou corps non-commutatif.
37. En d'autre termes, le groupe simplement connexe SU(2) est le revêtement universel Spin(3) de SO(3).
38. et même simplement connexe.

Exercice. – Montrer qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de V telle que pour tout i, on ait $\mathcal{V}_i = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i)$. En déduire que

i) si $\mathcal{V}'$ est un autre drapeau, $\mathrm{B}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ et $\mathrm{B}(\mathcal{V}'/\mathbb{K})$ sont conjugués.

ii) $\mathrm{B}(V/\mathbb{K}) \simeq \mathrm{B}_n(\mathbb{K}) = \{\text{matrices triangulaires supérieures}\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

iii) $\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/\mathbb{K}) \simeq \mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K}) = \{\text{matrices triangulaires sup. unipotentes }\} \subset \mathrm{B}_n(\mathbb{K})$. On vérifiera à cette occasion qu'une matrice triangulaire est unipotente si et seulement si ses termes diagonaux valent 1.

Réciproquement, nous verrons plus tard que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ formé de matrices unipotentes est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K})$; en d'autres termes, un tel sous-groupe est "triangularisable".

Notons que le choix de la lettre B plutôt que la lettre T (triangulaire) pour noter ces groupes est une tradition et un hommage à A. Borel, qui a beaucoup contribué à la théorie moderne des groupes de Lie.

Exercice. – Déterminer les composantes neutres de ces groupes, ainsi que leurs centres.

Remarque. – Soit H le quotient de $\mathrm{B}_3^{\mathrm{unip}}(\mathbb{R})$ par le sous-groupe discret, isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par l'élément $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de son centre. H est le *groupe de Heisenberg* de dimension 3. Il ne peut se plonger dans aucun groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1.3.8 *Le groupe additif* $(\mathbb{K}, +)$ *est un groupe de Lie linéaire.*

On peut vérifier que l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{K}$ sur le groupe matriciel $\mathrm{B}_2^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K})$. On en déduit que le groupe topologique sous-jacent à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie est un groupe de Lie linéaire, isomorphe au produit $(\mathrm{B}_2^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K}))^{\dim(V)}$.

1.3.9 *Le groupe multiplicatif* $(\mathbb{K}, \times)$. Bien entendu le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^\times$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_1(\mathbb{K})$ et donc est un groupe de Lie linéaire.

1.3.10 *Tores.* Le cercle unité S^1 s'identifie au groupe topologique $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, qui est isomorphe au groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sa puissance n-ième $(S^1)^n := T^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ s'appelle le tore de dimension n. C'est un groupe abélien connexe compact [39]

On prendra garde, pour $n > 1$, à ne pas confondre T^n avec la sphère S^n (= bord de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$), ni S^n avec l'espace projectif $\mathbf{P}_n(\mathbb{R})$. On a néanmoins les homéomorphismes : $S^1 \simeq SO(2) \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{R}), S^2 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{C}), S^3 \simeq SU(2), S^4 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbb{H})$.

1.3.11 *Décompositions de Jordan.* En guise d'exercice, le lecteur pourra vérifier que tous les sous-groupes fermés $G \subset \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ que nous avons décrits ci-dessus sont *stables par décomposition de Jordan.* Cela signifie que si $g \in G$, et si $g = g_u g_s$ est la décomposition de Jordan de g, alors $g_u \in G$ et $g_s \in G$.

On peut démontrer que tout sous-groupe "algébrique" (*i.e.* défini par des équations algébriques) de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ est stable par décomposition de Jordan. Mais on peut aussi exhiber des

39. de revêtement universel $\mathbb{R}^n$, avec $\pi_1(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ qui ne le sont pas.

Remarque culturelle. (Revêtement universel d'un groupe de Lie) – Quand G est un groupe de Lie (linéaire ou non) (et même un groupe topologique connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$), on peut mesurer l'obstruction au problème du prolongement de tous les homomorphismes locaux (cf 1.1.18) de source G grâce au groupe fondamental $\pi_1(G)$ de G. Ce dernier est le groupe des classes d'homotopie de lacets sur G de base e ; cf. cours de topologie algébrique (c'est aussi le groupe des automorphismes du revêtement universel de G). On dit que G est *simplement connexe* si $\pi_1(G) = \{0\}$; c'est en particulier le cas si G est contractile. On montre alors :

THÉORÈME. – *Soient G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, et G' un groupe topologique. Tout homomorphisme local de G vers G' se prolonge de façon unique en un homomorphisme (automatiquement continu) de G vers G'.*

De plus, pour tout groupe de Lie connexe G, il existe un couple $(\tilde{G}, \tilde{\pi})$ unique à isomorphisme près, formé d'un groupe de Lie $\tilde{G}$ connexe et simplement connexe et d'un morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{G} \to G$ de groupes topologiques qui soit un isomorphisme local. En particulier,

PROPOSITION. – *Le revêtement universel $(\tilde{G}, \tilde{\pi})$ d'un groupe de Lie G est munie d'une (unique à isomorphisme près) structure de groupe de Lie (non nécessairement linéaire en général) telle que le morphisme de revêtement $\tilde{\pi} : \tilde{G} \to G$ soit un morphisme de groupe de Lie.*

Le sous-groupe $Ker(\tilde{\pi})$ de $\tilde{G}$, qui est discret (donc contenu dans le centre de G, d'après le lemme 1.1.17), est isomorphe à $\pi_1(G)$, qui est donc toujours un groupe abélien, et *les groupes de Lie $\tilde{G}/\pi_1(G)$ et G sont isomorphes.* *(Fin de la remarque)*

2 Des groupes de Lie aux algèbres de Lie

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord montrer comment associer à un groupe de Lie, un objet algébrique appelé algèbre de Lie, qui est un espace vectoriel [40] muni d'une opération encodant la structure du groupe. Ce passage est essentiellement réalisé par l'exponentielle 1.2.4, nous en avons en fait déjà vu des exemples.

2.1 Compléments sur l'exponentielle

La proposition 1.2.6 ramène un voisinage de l'identité d'un groupe de Lie linéaire à un sous-espace d'un voisinage de 0 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant traduire ce que devient la structure de groupe au travers de cet homéomorphisme. Ceci est réalisé par le :

2.1.1 *Crochet de Lie.* Soit V de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Pour $u, v \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ on pose

$$[u, v] := u \circ v - v \circ u,$$

et on l'appelle *"crochet de Lie*[41] *" de u et v*. En notation matricielle, cela donne $[X, Y] = XY - YX$ pour $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1.2 Proposition.– *Soient X et Y deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$. Alors,*

i) $\lim_{k\to+\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k}))^k = \exp(X + Y)$ *;*

ii) $\lim_{k\to+\infty} (\exp(\frac{X}{k})\exp(\frac{Y}{k})(\exp(\frac{-X}{k})\exp(\frac{-Y}{k}))^{k^2} = \exp([X, Y])$.

La proposition (ainsi que sa preuve) est en fait vrai pour X, Y des endomorphismes linéaires continus quelconques d'un espace de Banach V. On remarque que le lemme est trivial si X et Y commutent (par l'identité (1.2.4.1)).

Démonstration. i) Un développement limité fournit l'estimée

$$\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right) = \mathbf{I}_n + \frac{(X + Y)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En particulier, pour k suffisamment grand, on peut prendre le logarithme et obtenir

$$k \cdot \log\left(\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\right) = X + Y + O(\frac{1}{k}).$$

ii) On procède de la même manière en passant par l'estimée

$$\exp\left(\frac{X}{k}\right)\exp\left(\frac{Y}{k}\right)\exp\left(\frac{-X}{k}\right)\exp\left(\frac{-Y}{k}\right) = \mathbf{I}_n + \frac{[X, Y]}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

□

40. en d'autres termes on linéarise les groupes de Lie, c'est à dire qu'on leur associe des espaces vectoriels et à tout morphisme de groupe, on associera des applications linéaires, qui sont, en général, plus faciles à étudier

41. le crochet de Lie est donc donné par le commutateur des endomorphismes. On verra en 2.2.2 que, pour un groupe de Lie linéaire G, ce commutateur ne dépend en fait *pas* du choix d'un V tel que $G \subset \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$. Il est donc intrinsèque et mérite à ce titre son nom à lui de crochet de Lie.

La proposition a pour conséquence l'important résultat suivant pour les groupes de Lie linéaires :

Corollaire. – *Soit G un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *L'ensemble*

$$\mathfrak{g} := \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tX) \in G\}$$

est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*, stable par le crochet de Lie.*

Démonstration. Établissons d'abord que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel. Il est clair que 0 est dans $\mathfrak{g}$. Par définition, $\mathfrak{g}$ est stable par multiplication par $\mathbb{R}$. Montrons qu'il est stable par addition. Si X, Y sont dans $\mathfrak{g}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, nous avons que $\exp\left(\frac{tX}{k}\right)$ et $\exp\left(\frac{tY}{k}\right)$ sont dans G. Puisque G est stable par multiplication, $\left(\exp(\frac{tX}{k})\exp(\frac{tY}{k})\right)^k \in G$. Comme G est fermé, la formule i) du lemme montre que $\exp(t(X+Y))$ est donc dans G. Ainsi $\mathfrak{g}$ est stable par addition. Nous avons montré que c'est bien un $\mathbb{R}$-sev. De la même façon, la formule ii) montre la stabilité par crochet de Lie. □

Mise en garde : Lorsque $K = \mathbb{C}$, on prendra garde au fait que $\mathfrak{g}$ n'est pas nécessairement un $\mathbb{C}$-sev de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, mais seulement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en général. Par exemple :

Exercice. – Montrer que si $G = \mathrm{U}(n)$, alors $\mathfrak{g}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En revanche, montrer que si $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathfrak{g}$ est bien un $\mathbb{C}$-sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. (On pourra se reporter au paragraphe 2.3.)

La définition de $\mathfrak{g}$ dans le Corollaire, ainsi que celle du crochet de Lie, dépendent a priori pas que du groupe G, mais aussi du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ duquel il est un sous-groupe (et en particulier de la façon dont G est plongé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$). On va voir qu'il n'en est rien, mais pour cela nous avons besoin d'identifier $\mathfrak{g}$ en termes de

2.1.3 *Sous-groupes à un paramètre.*

2.1.4 Définition.– *Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe topologique G est un morphisme de groupes topologiques $\lambda : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$.*

Comme tX et $t'X$ commutent pour tout réels t, t', il est clair que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (avec les notations du Corollaire 2.1.1), l'application $t \mapsto \exp(tX)$ est un homomorphisme de groupes topologiques, donc détermine un sous-groupe à un paramètre de G. Tous les sous-groupes à un paramètre sont en fait de cette forme :

2.1.5 Théorème.– *Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soit $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ un sous-groupe à un paramètre. Alors il existe un unique endomorphisme $x \in \mathcal{L}(V/\mathbb{K})$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \exp(tx).$$

En particulier, λ est C^∞ et déterminé par sa dérivée [42] $x = \lambda'(0)$.

42. autrement dit, c'est l'unique solution de l'équation différentielle $y'(t) = X \cdot y(t)$, $y(0) = 1$. Cette caractérisation s'étend à tout groupe de Lie abstrait.

Démonstration. Montrons d'abord que λ est dérivable. Par continuité de λ, on peut trouver une fonction $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact et normalisée par $\int_\mathbb{R} \theta(t)dt = 1$, vérifiant la condition

$$\int_\mathbb{R} \theta(t)||\lambda(-t) - \mathrm{id}_V\,||dt < 1.$$

Sous cette condition, l'endomorphisme $y = \int_\mathbb{R} \theta(t)\lambda(-t)dt$ est inversible car il vérifie l'inégalité $||y - \mathrm{id}_V\,|| < 1$. Posons alors

$$\kappa(t) := \int_\mathbb{R} \theta(t-s)\lambda(s).$$

La fonction $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ est C^∞ (dérivation sous le signe somme...), et un changement de variable montre que

$$\kappa(t) = \int_\mathbb{R} \theta(u)\lambda(t-u)du = \lambda(t)\cdot y.$$

Donc λ est de classe C^∞. Mais alors la différentielle λ' est donnée par $\lambda'(t) = \lambda(t)\lambda'(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(\exp(-t\lambda'(0))\lambda(t)) = 0$, puis par intégration $\lambda(t) = \exp(tX)$ avec $X = \lambda'(0)$. □

2.2 L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

2.2.1 Définition.– *Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ un sous-groupe fermé. L'ensemble $\mathfrak{g}$ défini au corollaire 2.1.1 est appelé* algèbre de Lie *de G, et est parfois aussi noté* $\mathrm{Lie}(G)$.

Par exemple $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (Exercice : le montrer !). Nous énumérons des exemples classiques d'algèbres de Lie dans le paragraphe 2.3 ci-dessous.

Avant cela, et avant d'étudier la notion abstraite d'algèbre de Lie, explicitons les liens ténus entre G et son algèbre de Lie.

2.2.2 $\mathrm{Lie}(G)$ *est canonique.* Tel que nous l'avons défini, $\mathfrak{g}$ semble dépendre non seulement de G mais aussi du $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans lequel on voit G. Or, en vertu du théorème 2.1.5 et de la proposition 2.1.2, nous avons

Corollaire. – *L'espace vectoriel* $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ *du corollaire 2.1.1 s'interprète comme l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G. De plus, la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathfrak{g}$ et le crochet sont donnés par les formules*
- $(r.\lambda)(t) = \lambda(rt)$ *pour* $r \in \mathbb{R}$,
- $(\lambda + \mu)(t) = \lim\limits_{k\to\infty} (\lambda(t/k)\mu(t/k))^k$,
- $[\lambda, \mu](t) = \lim\limits_{k\to\infty} (\lambda(1/k)\mu(t/k)\lambda(-1/k)\mu(-t/k))^{k^2}$.

Le corollaire donne une définition *intrinsèque* de $\mathrm{Lie}(G)$. Les formules montrent que l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de son crochet est *canoniquement* attaché à G. En particulier, il ne dépend pas du plongement de G dans un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Par ailleurs, il en découle que l'algèbre de Lie ne dépend que du voisinage de l'élément neutre 1 dans G (puisque un sous-groupe à un paramètre est déterminé par sa dérivée en 0).

Notons cependant que ces formules n'ont pas nécessairement de sens pour un groupe topologique quelconque.

2.2.3 *Changement de groupe.* L'avantage de voir Lie(G) comme ensemble des sous-groupes à un paramètre est qu'on en déduit immédiatement que tout morphisme de groupes topologiques $G \xrightarrow{\varphi} H$ entre deux groupes de Lie linéaires induit une application

$$\begin{array}{rccc} d\varphi: & \mathrm{Lie}(G) & \to & \mathrm{Lie}(H) \\ & \lambda & \mapsto & d\varphi(\lambda) := \varphi \circ \lambda \end{array}$$

Vu les définitions de la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur Lie(G) et Lie(H),

2.2.4 LEMME.– *L'application $d\varphi$ est $\mathbb{R}$-linéaire et compatible*[43] *aux crochets :*

$$[d\varphi(x), d\varphi(y)] = d\varphi([x, y]).$$

Par ailleurs $d\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$ et $d(\varphi \circ \psi) = d\varphi \circ d\psi$.

Remarque culturelle. – Le lemme établit que $G \mapsto \mathrm{Lie}(G)$ est un foncteur de la catégorie des groupes de Lie (linéaires) dans celle des algèbres de Lie. Sous des hypothèses de simple connexité, ce foncteur est pleinement fidèle. (Fin de la remarque culturelle).

Exercice. – Si le noyau de φ est discret, montrer que $d\varphi$ est injective. Nous allons voir ci-dessous que la réciproque est vraie.

Remarque. – Si l'on fixe des plongements $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ et que l'on identifie Lie(G), resp. Lie(H), à des espaces de matrices $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h} \subset M_m(\mathbb{R})$, l'application $d\varphi$ est donnée par

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ d\varphi(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(t \mapsto \varphi(\exp(tX))). \tag{2.2.4.1}$$

C'est une conséquence du théorème 2.1.5, qui assure que un sous-groupe à un paramètre est déterminé de manière unique par sa dérivée en 0.

2.2.5 *L'exponentielle de G.* Soit G un groupe de Lie linéaire, vu comme sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Par définition, l'application exp définie au paragraphe 1.2.4 pour le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ envoie $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ dans G. On note parfois

$$\exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

la restriction de l'exponentielle à Lie(G). Encore une fois, $\exp_G$ est intrinsèque[44] puisque, en termes de sous-groupes à un paramètre, elle est simplement donnée par $\lambda \mapsto \lambda(1)$. Cette formulation nous montre d'ailleurs immédiatement que

2.2.6 LEMME.– *Si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes topologiques entre deux groupes de Lie linéaires, alors on a :*

$$\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ d\varphi.$$

La restriction $\exp_G$ de l'exponentielle nous donne le raffinement suivant de la proposition 1.2.6.

43. c'est donc un morphisme d'algèbres de Lie au sens du chapitre III

44. c'est à dire indépendant de la façon de plonger G

2.2.7 THÉORÈME.– *Soit G un groupe de Lie linéaire. L'application exponentielle* $\exp_G$ *établit un homéomorphisme local d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ *sur un voisinage de* 1 *dans G.*

Démonstration. L'application $\exp_G$ est évidemment continue. Puisque c'est la restriction de exp qui est localement injective, elle est elle-même localement injective. Ce qui n'est pas évident par contre, c'est pourquoi elle est localement surjective (ou plus précisément, pourquoi il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que la restriction de $\exp_G$ à $\mathcal{V}$ soit ouverte). Dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ nous avions pu utiliser le logarithme. Mais ici, on ne sait pas a priori [45] si $\log(B(\mathrm{id}_V, 1) \cap G) \subset \mathfrak{g}$.

Soit E un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, et considérons l'application

$$F:\ \mathfrak{g} \times E \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ (X, Y) \mapsto \exp(X)\exp(Y).$$

Sa différentielle en $(0, 0)$ est inversible, donc il existe des voisinages $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) de 0 (resp. 1) dans $\mathfrak{g}$, E (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) tels que F induise un difféomorphisme de $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$. Admettons un instant que

(*) : il existe un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de 0 *dans E tel que exp$(\mathcal{V}') \cap G = \{\mathbf{I}_n\}$.*

Posons alors $\mathcal{W}' = F(\mathcal{U} \times \mathcal{V}')$. Pour tout $g \in \mathcal{W}' \cap G$, il existe $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}'$ tels que $g = F(X, Y)$. Mais alors, $\exp(Y) = \exp(-X)g \in \exp(\mathcal{V}') \cap G = \{\mathbf{I}_n\}$, d'où $g = \exp(X)$. Il s'ensuit que exp induit un homéomorphisme $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{W}' \cap G$, comme voulu.

Reste à prouver *(*)*. Supposons le contraire. On peut alors trouver une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments *non nuls* de E tendant vers 0, telle que $\exp(Y_n) \in G$ pour tout n. Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que la suite $(Y_n/||Y_n||)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite Y dans E (compacité de la sphère). Notons que $Y \neq 0$. Nous allons montrer que $Y \in \mathfrak{g}$, ce qui contredira le fait que $\mathfrak{g} \cap E = \{0\}$. Pour cela nous devons prouver que $\exp(tY) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons $[x]$ la partie entière d'un réel x, et écrivons

$$\exp(t/||Y_n|| \cdot Y_n) = \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \cdot \exp((t/||Y_n|| - [t/||Y_n||])Y_n).$$

Comme le terme $\exp((t/||Y_n|| - [t/||Y_n||])Y_n)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que

$$\exp(tY) = \lim_{n\to+\infty} \exp(Y_n)^{[t/||Y_n||]} \in G.$$

□

On déduit de ce théorème que G est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, où $d = dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$

2.2.8 DÉFINITION.– *On appelle la dimension du groupe de Lie G, la dimension $d = dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Nous déterminerons plus loin les dimensions des groupes de Lie classiques. La dimension est bien définie puisque l'algèbre de Lie peut être définie de manière intrinséque.

45. il existe de fait des contre-exemples, qui seront éventuellement vu en TD

Remarque culturelle. – Comme $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension finie, le théorème combiné au fait que les multiplications par des éléments de G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont des difféomorphismes, donne l'existence de cartes locales pour tout groupe de Lie linéaire, d'où on déduit la structure de variété (compatible avec la structure de groupe) de G. En utilisant le le lemme 2.2.6 (et le fait que $d\phi$ est lisse), on obtient alors que tout morphisme de groupes de Lie entre G et H est différentiable, de classe C^∞.

On peut montrer facilement que

PROPOSITION. – *L'algèbre de Lie de G est isomorphe à l'espace tangent T_eG en l'élément neutre de G.*

Par ailleurs, une preuve similaire à celle du théorème assure que

PROPOSITION. – *Un sous-groupe H d'un groupe de Lie (abstrait) G est une sous-variété si et seulement si H est fermé dans G.*

(Fin de la remarque culturelle)

Combiné avec le lemme 1.1.10, le théorème 2.2.7 ci-dessus entraîne le corollaire important suivant.

2.2.9 COROLLAIRE.– *La composante neutre G^0 de G est engendrée (comme sous-groupe fermé) par l'image de $\exp_G$. En particulier, si deux sous-groupes fermés G_1 et G_2 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ont la même*[46] *algèbre de Lie, leurs composantes neutres coïncident.*

Notons que par définition[47], on a

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G^0)$$

pour tout sous-groupe fermé G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Par exemple, $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{K}))$.

Le corollaire exprime donc que si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$G^0 \text{est } \textit{le} \text{ sous-groupe fermé de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ engendré par } \exp(\mathrm{Lie}(G)).$$

En particulier, très souvent, un résultat général sur les (sous-)algèbres de Lie aura une traduction pour les (sous-)groupes *connexes*.

Par exemple, si G est un groupe de Lie linéaire connexe, un morphisme de groupes de Lie $\varphi : G \to H$ est complétement déterminé[48] par le morphisme $d\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ induit sur les algèbres de Lie (puisque le lemme 2.2.6 définit ϕ sur l'image de l'exponentielle et que cette dernière engendre G en vertu du corollaire). Ce dernier est plus simple à comprendre puisque il est linéaire.

L'exercice suivant donne des relations assez élémentaires entre morphismes de groupes de Lie et morphismes induits sur les algèbres de Lie des groupes.

Exercice. – Soit $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme continu de groupes de Lie linéaires.

i) Si $d\varphi$ est injective, montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est discret.

46. vue en tant que sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

47. en effet, l'image d'un sous-groupe à un paramètre est connexe et contient l'élément neutre, donc est contenue dans G^0.

48. si G est en outre simplement connexe, alors, le “ deuxième théorème de Lie” dit que toute application linéaire $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ compatible au crochet, c'est à dire tout morphisme d'algèbres de Lie, induit un unique morphisme de groupe de Lie $\phi : G \to H$ tel que $d\varphi = f$.

ii) Si $d\varphi$ est surjective, montrer que $\operatorname{Coker}\varphi$ est discret. En particulier, si H est connexe et $d\varphi$ est surjective, alors φ est surjective.

De ces exercices et d'un exercice précédent on déduit :

2.2.10 LEMME.– *Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie linéaires. Alors,* $\operatorname{Ker}\varphi$ *est discret si et seulement si* $d\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ *est injective.*

La dernière question de l'exercice est essentiellement équivalente à l'exercice suivant, dont le résultat est aussi intéressant.

Exercice. – Soit G un groupe de Lie (linéaire). Démontrer que sa composante neutre G^0 est ouverte et que G est une réunion disjointes $G = \coprod_{g\in G} g\cdot G^0$ de sous-espaces homéomorphes à G^0, en particulier à la fois ouverts et fermés dans G .

Exemple. – Nous pouvons maintenant (presque) terminer de prouver que l'homomorphisme $\mathrm{SU}(2)/\{\pm 1\} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SO}(3)$ construit à l'aide des quaternions est un homéomorphisme. On a déjà vu qu'il est injectif et continu. L'application $d\varphi$ est injective d'après un exercice plus haut. En admettant que $\mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(2))$ et $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ ont même dimension (ce que nous vérifierons plus loin), il s'ensuit que $d\varphi$ est surjective. Mais puisque $\mathrm{SO}(3)$ est connexe et que φ est non-constante, φ est surjective et donc bijective. Enfin, puisque $\mathrm{SU}(2)$ est compact, φ est aussi ouverte et c'est donc un homéomorphisme.

On utilise maintenant le Théorème pour relier des propriétés d'un sous-groupe à celle de son algèbre de Lie.

COROLLAIRE. – *Soient G un sous-groupe fermé connexe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, et H un sous-groupe fermé connexe de G, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$*. Alors,*

i) $H \subset Z(G)$ si et seulement si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = 0$*.*

ii) H est distingué dans G si et seulement si on a $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ *(on dit alors que* $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*).*

Démonstration. i) Supposons H central. Le ii) du lemme 2.1.2 montre que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\exp(t[X,Y]) = 1$. Prenant t assez petit, il vient $[X,Y] = 0$. Réciproquement, supposons $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = 0$. Alors pour $X \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{g}$, on a $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$. On en déduit l'existence d'un voisinage V de 1 dans G, resp. U de 1 dans H tel que tout élément de V centralise tout élément de U. Mais alors le groupe engendré par V centralise le groupe engendré par U, donc G centralise H.

ii) Supposons H distingué dans G. Alors le ii) du lemme 2.1.2 et le fait que H est fermé montrent que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Réciproquement, supposons $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Comme on suppose H connexe, il suffit de montrer que pour tout $g \in G$, on a $\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) = \mathrm{Lie}(H)$, *i.e.* $g\mathfrak{h}g^{-1} = \mathfrak{h}$ (voir ci-dessous). Comme on suppose aussi G connexe, il suffit de prouver ceci pour g dans un voisinage de l'identité de 1 dans G. On peut donc supposer $g = \exp(X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Mais alors, on montre que pour tout $Y \in \mathfrak{h}$, on a

$$(*) \qquad \exp(X)Y\exp(-X) = \exp(\mathrm{ad}_X)(Y)$$

où $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{L}(M_n(\mathbb{R})/\mathbb{R})$ est l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathrm{ad}_X(Y) := [X,Y]$. Ceci est une utile propriété des groupes de Lie, voir le lemme 2.2.13. Or puisque $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$, on a aussi $\exp(\mathrm{ad}_X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ et par conséquent $\exp(X)Y\exp(-X) \in \mathfrak{h}$ comme voulu. □

L'égalité (*) utilisée dans la preuve, et plus généralement l'utilisation des actions adjointes (cf 1.1.2.iv) se généralise comme suit.

2.2.11 *Action adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie.* Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie.

La conjugaison par un élément de G dans $M_n(\mathbb{R})$ stabilise $\mathfrak{g}$ (grâce à l'identité (1.2.4.2)) et définit un homomorphisme continu de groupes topologiques [49]

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Ad}: & \mathrm{G} & \to & \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R}) \\ & g & \mapsto & \mathrm{Ad}_g : X \mapsto gXg^{-1}. \end{array}$$

Par définition, Ad est une représentation continue de G dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Encore une fois la définition de Ad *est intrinsèque*. En effet, en terme de sous-groupes à un paramètre, Ad_g est l'application $\lambda \mapsto (t \mapsto g\lambda(t)g^{-1})$.

2.2.12 LEMME.– *Le morphisme* Ad *vérifie la propriété* [50] *suivante :*

$$[\mathrm{Ad}_g(X), \mathrm{Ad}_g(Y)] = \mathrm{Ad}_g([X,Y]).$$

Exemple. – Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie linéaire G. L'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(H)$ est naturellement une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}(G)$ (elle même identifiée à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $g \in G$, on a le sous-groupe $\mathrm{Ad}_g(H) := gHg^{-1}$ qui est aussi fermé. De $\exp(tgXg^{-1}) = g\exp(tX)g^{-1}$, on déduit que $g\mathrm{Lie}(H)g^{-1} \subset \mathrm{Lie}(gHg^{-1})$. Par égalité des dimensions (ou en remplaçant H par $g^{-1}Hg$), on obtient alors

$$\mathrm{Lie}(gHg^{-1}) \ = \ g \cdot \mathrm{Lie}(H) \cdot g^{-1}$$

comme énoncé dans la preuve du corollaire.

Comme Ad est un morphisme de groupes de Lie, il induit le morphisme $d\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})$ au niveau des algèbres de Lie associées.

2.2.13 LEMME.– *Le morphisme* $d\mathrm{Ad}$ *est l'application*

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ad}: & \mathfrak{g} & \to & \mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{R}) \\ & Y & \mapsto & \mathrm{ad}_Y : X \mapsto [Y,X]. \end{array}$$

En particulier, $\mathrm{Ad} \circ \exp_G = \exp_{\mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})} \circ \mathrm{ad}$.

Démonstration. On peut supposer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Le morphisme $d\mathrm{Ad}$ est le morphisme qui envoie le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tX)$ (pour $X \in \mathrm{Lie}(G)$) sur le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}$. Il nous suffit donc de montrer que ce dernier est égal au sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(t\mathrm{ad}_X)$ de $\mathrm{GL}(M_n(\mathbb{R})/\mathbb{R})$. Par le théorème 2.1.5, il suffit de vérifier qu'ils ont même différentielle en $t = 0$. Ceci est exactement la formule ii énoncée dans l'exercice suivant. □

Exercice. – i) Démontrer que $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})$ est bien définie et vérifier les propriétés énoncés ci-dessus, y compris le lemme 2.2.12.

49. donc un morphisme de groupes de Lie linéaires.

50. cette propriété signifie que Ad_g est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Ainsi, Ad est un morphisme de groupe topologiques de G dans le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

ii) Démontrer la formule

$$d\mathrm{Ad}_Y(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(t \mapsto \exp(tY)X\exp(-tY)) = [Y, X]$$

Remarque. – Un sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ stable par crochet (ou même un idéal) n'est pas nécessairement l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de G (considérer comme d'habitude une droite $\mathfrak{h}$ de pente irrationnelle dans l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^2 \simeq \mathrm{Lie}((S^1)^2)$.)

2.3 Exemples classiques

Il est de coutume de noter avec des lettres gothiques les algèbres de Lie des groupes classiques. Par exemple

2.3.1 Notation. $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ se note $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et le crochet est donné par le commutateur $[X, Y] = XY - YX$. Ainsi lorsque l'on utilise la notation $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, cela veut dire que l'on pense l'espace vectoriel des matrices comme muni de sa structure d'algèbre de Lie (c'est à dire muni du crochet) et pas comme une algèbre associative.

De même, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel [51] $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ muni de son crochet. Plus généralement, si V est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on note

$$\mathfrak{gl}(V/\mathbb{K}) := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})) = \mathrm{L}(V/\mathbb{K}), \text{ muni du crochet } [u, v] := u \circ v - v \circ u.$$

Tous les groupes classiques sont définis dans un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ou un $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ convenable, et le crochet de leur algèbre de Lie est induit par celui de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ou de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ (le choix précis du groupe linéaire importe peu en vertu du Corollaire 2.2.2). Il nous suffit donc de décrire les conditions qui définissent les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels sous-jacents [52] à leurs algèbres de Lie (Définition 2.2.1).

Par exemple, le premier exercice du paragraphe 1.2.4 nous dit que

$$\mathfrak{sl}(V/\mathbb{K}) := \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(V/\mathbb{K}) = \{u \in \mathcal{L}(V/\mathbb{K}), \mathrm{tr}(u) = 0\}.$$

Remarquons que c'est toujours un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel. En particulier, le crochet de Lie est $\mathbb{K}$-linéaire. En termes matriciels, cela donne

i) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (matrices de trace nulle). Sa dimension est $n^2 - 1$.

ii) $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Sa dimension réelle est $2n^2 - 2$.

Supposons maintenant que $G = \{g \in \mathrm{GL}(V/\mathbb{K}), \Psi(gv, gw), \forall v, w \in V\}$ est défini par une forme bilinéaire ou sesquilinéaire *non dégénérée* Ψ (qu'elle soit symétrique, alternée ou hermitienne). Si g^* désigne l'adjoint [53] de g pour Ψ, on a alors

$$G = \{g \in G, \, g^*g = \mathrm{id}_V\}$$

(puisque $\Psi(gv, gw) = \Psi(g^*g(v), w)$ pour tout $v, w \in V$ et que Ψ est non-dégénérée). On peut vérifier que $\exp(u)^* = \exp(u^*)$ (par passage à la limite), et on en déduit que

51. on rappelle que les algèbres de Lie des groupes de Lie linéaires sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On peut remarquer que dans le cas de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, cette structure réelle provient d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

52. ceci est un des bénéfices appréciables résultant du fait que l'on étudie des groupes de Lie linéaires

53. qui a du sens car Ψ est non-dégénérée et est défini par la relation $\Psi(g^*(x), y) = \Psi(x, g(y))$, valable pour tout $x, y \in V$. Relation qui implique au passage que $(g^*)^n = (g^n)^*$.

2.3.2 LEMME.– *Soit Ψ une forme bilinéaire ou sesquilinéaire non-dégénérée et $G = \{g \in G,\ g^* g = \mathrm{id}_V\}$ son groupe d'isométries. On a*

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) = \{u \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K}),\ u + u^* = 0\}.$$

Notons d'ailleurs que, dans le cas symétrique ou alterné, c'est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En revanche, dans le cas unitaire (ou hermitien) avec $K = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$ n'est qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. Pour déterminer l'algèbre de Lie de G, on retourne à la définition : $X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exp(tX) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque un sous-groupe à un paramètre est déterminé par sa dérivée en 0, on dérive cette dernière identité en 0 pour déterminer une condition sur X. Précisément, on a donc (puisque $\exp(u)^* = \exp(u^*)$) :

$$X \in \mathfrak{g} \iff \exp(tX^*)\exp(tX) = \mathrm{id}_V\,.$$

En dérivant en $t = 0$, puisque $\exp(0) = \mathrm{id}_V$, on obtient $X^* + X = 0$. Ainsi $\mathfrak{g} \subset \{u \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K}),\ u + u^* = 0\}$. L'inclusion réciproque est aisée : en effet, si $u^* = -u$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, tu^* et tu commutent et donc

$$\exp(tu^*)\exp(tu) = \exp(tu^* + tu) = \exp(0) = \mathrm{id}_V$$

ce qui assure que $\exp(tu) \in G$ et donc $u \in \mathfrak{g}$. □

En termes de sous-groupes classiques matriciels, cela nous donne :

iii) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), X + {}^tX = 0\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques. Sa dimension est $n(n-1)/2$.

iv) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n,\mathbb{C})) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^tX = 0\}$. Sa dimension réelle est $n(n-1)$.

v) $\mathfrak{u}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}(n)) = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), X + {}^t\overline{X} = 0\}$. Par exemple, $\mathfrak{u}_1 = i\mathbb{R} \subset \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Sa dimension est n^2.

vi) $\mathfrak{su}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(n)) = \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Sa dimension est $n^2 - 1$.

vii) $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n}(K)) = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{K}), {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = 0\}$. Sa dimension est $n(n+1)/2$.

Enfin, si $\mathcal{V}$ est un drapeau complet dans $V/\mathbb{K}$, on vérifie que

$$\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K}) := \mathrm{Lie}(\mathrm{B}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = \{u \in \mathcal{L}(V/\mathbb{K}),\ u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i, \forall i = 0, \cdots, n\}$$

tandis que

$$\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K}) := \mathrm{Lie}(\mathrm{B}^{\mathrm{unip}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = \{u \in \mathcal{L}(V/\mathbb{K}),\ u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-1}, \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

En termes matriciels, cela donne :

viii) $\mathfrak{b}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{B}_n(\mathbb{K})) = \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \forall i > j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures).

ix) $\mathrm{Lie}(\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K}) := \mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}(\mathbb{K}) = \{X = (x_{i,j}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \forall i \geqslant j, x_{i,j} = 0\}$ (matrices triangulaires supérieures nilpotentes).

Enfin, on vérifie que :

x) $\mathrm{Lie}((\mathbb{K},+)) \cong \mathfrak{b}_1^{\mathrm{nilp}}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ est une algèbre de Lie abélienne. De même $\mathrm{Lie}((\mathbb{K}^*,\times)) \cong \mathfrak{gl}_1(\mathbb{K})$ est abélienne, de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

xi) $\mathrm{Lie}((S^1)^n) = (i\mathbb{R})^n \simeq \mathbb{R}^n$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie abélienne[54]. Le "i" rappelle qu'on la voit comme une sous-algèbre de Lie réelle de l'algèbre de Lie abélienne complexe $\mathrm{Lie}((\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n$ formée par les matrices diagonales de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. On a alors que $\mathrm{Lie}((S^1)^n)$ s'identifie très précisément à la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ formée des matrices diagonales dont les coefficients sont des nombres imaginaires purs.

Remarque et mise en garde. - Du point x) ci-dessus, nous voyons que les algèbres de Lie de $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$ et S^1 sont isomorphes. En revanche ces trois groupes de Lie linéaires ne sont évidemment pas isomorphes entre eux ! (Exercice : le démontrer). Ce sont bien tous les trois des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mais leurs sous-algèbres de Lie sont *distinctes*[55] dans $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ (bien qu'isomorphes). En particulier, on voit ainsi qu'il n'est pas superflu, dans le corollaire 2.2.9 que les algèbres de Lie de G_1 et G_2 soient les mêmes et pas juste isomorphes pour que le résultat soit vrai (en effet, le premier et le troisième de ces groupes sont de plus connexes).

Exercice. – Démontrer que les algèbres de Lie des groupes classiques donnés ci-dessus sont bien celles décrites et calculer (ou vérifier) leur dimension.

Exercice. – Montrer que l'exponentielle exp induit un homéomorphisme de $\mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{B}_n^{\mathrm{unip}}(\mathbb{K})$.

2.3.3 *Une remarque sur les morphismes surjectifs de groupes de Lie.* Soient G, H des groupes de Lie (linéaires) et $f : G \to H$ un morphisme *surjectif* de groupes topologiques. On a alors que $K := \mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de Lie distingué de G et un morphisme de groupes bijectif canonique $\overline{f} : G/K \to H$. Comme la topologie de G H est celle d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on peut appliquer le théorème "culturel" 1.1.15 pour montrer que

2.3.4 PROPOSITION.– *Le morphisme $\overline{f} : G/K \to H$ est un isomorphisme de groupes topologiques. En particulier G/K est un groupe de Lie linéaire (isomorphe à H).*

Exercice. – Démontrer la proposition précédente en utilisant directement l'exponentielle des groupes de Lie, c'est à dire le Théorème 2.2.7. On pourra aussi utiliser qu'il suffit de démontrer que la réciproque de $\overline{f}$ est continue en e.

On verra en TD de nombreux exemples de cette nature, en particulier lorsque K est discret. Plutôt que d'utiliser ce résultat qui est plutôt de nature culturelle, on en donnera une démonstration similaire à celle de l'exercice précédent et qui est tout aussi instructive que le résultat.

2.3.5 *Hors programme : la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.* Ce paragraphe s'intéresse à la question réciproque du passage de l'algèbre de Lie, munie de son crochet, au groupe de Lie. Il est *hors-programme* et on ne s'en servira pas dans le reste du cours.

54. c'est à dire pour laquelle le crochet est nul (ce qui revient à dire que si $u, v \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ sont dans l'algèbre de Lie, on a $uv = vu$, c'est à dire u et v commutent

55. la première de ces algèbres de Lie est constituée de matrices triangulaires supérieures, la deuxième des matrices diagonales ayant un 0 comme deuxième coefficient diagonal et la troisième des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ via le plongement usuel de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Soit G un groupe de Lie linéaire, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$. Pour X, Y dans $\mathfrak{g}$, on peut se demander si l'on peut calculer le produit $\exp_G(X)\exp_G(Y) \in G^0 \subset G$ à l'aide seulement de la connaissance de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La proposition 2.1.2 donne une indication en ce sens, lorsque X, Y sont dans un voisinage de 0, tout comme le théorème 2.2.7.

La réponse est oui, pour X, Y de norme suffisamment petite. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne une formule exprimant ce produit en fonction d'une série qui ne dépend que de X, Y et de leur crochets itérés. Considérons la fonction

$$\Phi(z) = \frac{z\log(z)}{z-1} = z\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}(z-1)^i$$

où la dernière égalité est valide pour $|z-1| < 1$. Rappelons le morphisme $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})$, défini par $\mathrm{ad}_Y : X \mapsto [Y, X]$ (cf. lemme 2.2.12). En prenant son exponentielle, nous obtenons $\exp(\mathrm{ad}_X) \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})$.

Théorème. (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff) – *Supposons que $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ soit fermé. Si $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$, alors, on a la formule suivante*

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + \int_0^1 \Phi\Big(\exp(\mathrm{ad}_X)\exp(t\mathrm{ad}_Y)\Big)Y\,dt\right)$$

qui est équivalent à la formule

$$\log\Big(\exp(X)\exp(Y)\Big) = X + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\sum_{I_i}\frac{(\mathrm{ad}_X)^{p_1}(\mathrm{ad}_Y)^{q_1}\cdots(\mathrm{ad}_X)^{p_i}(\mathrm{ad}_Y)^{q_i}(\mathrm{ad}_X)^n}{p_1!q_1!\cdots p_i!q_i!n!\,(q_1+\cdots+q_i+1)}\,Y$$

où $I_0 = \{n \in \mathbb{N}\}$ et pour $i > 0$, $I_i := \{p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_i, n \in \mathbb{N} /\, p_k + q_k > 0$ pour $k = 1 \ldots i\}$.

Les hypothèses sur la norme de X, Y servent à garantir la convergence des séries. Si les matrices X, Y sont nilpotentes, alors les séries sont convergentes et la formule est vérifiée. Cette formule s'étend en particulier à des algèbres de Lie nilpotentes, même sur un corps différent de $\mathbb{R}$ pourvu qu'il soit de caractéristique nulle.

En écrivant explicitement les premiers termes de la formule, on obtient, par exemple à l'ordre 3, que

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{[X,Y]}{2} + \frac{[X,[X,Y]]}{12} + \frac{[Y,[Y,X]]}{12} + R_4(X,Y)\right)$$

où $R_4(X,Y)$ ne contient que des termes de degré (en les variables X, Y) supérieur ou égal à 4.

Étant donné qu'un groupe à un paramètre est complètement déterminé par sa dérivée en 0, il n'est pas étonnant qu'un ingrédient essentiel (et intéressant indépendamment) dans la preuve du théorème soit le calcul de la différentielle de l'exponentielle de matrice. Pour cela on a la proposition suivante :

2.3.6 Proposition.– *L'exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est de classe C^∞ (et même analytique). Sa différentielle $d\exp_A : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ en toute matrice A vaut :*

$$d\exp_A = \exp(A)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}(-\mathrm{ad}_A)^k = \exp(A)\left(\frac{\mathbf{I}_n - \exp(-\mathrm{ad}_A)}{\mathrm{ad}_A}\right).$$

En particulier, pour tout A*,* B *dans* $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$\left(\frac{d\exp(A+tB)}{dt}\right)_{t=0} = \exp(A)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}(\,-\operatorname{ad}_A)^k(B) = \exp(A)\left(\frac{\mathbf{I}_n-\exp(-\operatorname{ad}_A)}{\operatorname{ad}_A}\right)(B).$$

Exercice. – On note $L_A \in \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})/\mathbb{K})$ et $R_A \in \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})/\mathbb{K})$ les translations par A à gauche et à droite, *i.e.* $L_A : X \mapsto AX$ et $R_A : X \mapsto XA$.

i) Montrer que l'exponentielle de matrice est de classe C^∞.

ii) Montrer que la différentielle en A de l'exponentielle est donnée par

$$d\exp_A = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n-1} L_A^l R_A^{n-1-l}.$$

iii) En déduire la proposition ci-dessus. (On pourra commencer par établir la formule

$$(-\operatorname{ad} A)^k H \quad = \quad \sum_{p+q=k}\frac{(-1)^p(k+1)!}{p!(q+1)!}A^p\sum_{l=0}^{q} L_A^l R_A^{q-l} H,$$

par exemple par récurrence.)

iv) Montrer que la différentielle $d\exp_A$ est inversible si et seulement si la différence entre 2 valeurs propres (sur $\mathbb{C}$) quelconques de A n'est jamais égales à $2ik\pi$ avec $k \neq 0$.

v) La proposition 2.3.6 est elle encore valide sur $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ avec V Banach en lieu et place de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$?

Esquisse de preuve de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. On commence par vérifier [56] que l'hypothèse $\|X\|, \|Y\| < \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ assure la convergence normale, pour $|t| < 1$, des séries

$$\Phi\Big(\exp(\operatorname{ad}_X)\exp(t\operatorname{ad}_Y)\Big), \quad L(t) = \log\Big(\exp(X)\exp(tY)\Big), \ \text{ et même } \Phi\Big(\operatorname{ad}_{L(t)}\Big).$$

Il suffit alors de montrer que $L'(t) = \Phi\Big(\exp(\operatorname{ad}_X)\exp(t\operatorname{ad}_Y)\Big)Y$ pour établir la première formule. Or ceci est une conséquence de la formule (de la deuxième formule) de la Proposition 2.3.6.

Pour la deuxième formule, on remarque d'abord que, pour tout X, Y, on a

$$\Big(\exp(X)\exp(Y)-\mathbf{I}_n\Big)^k\exp(X) = \sum_{I_k}\frac{A^{p_1}B^{q_1}\cdots A^{p_i}B^{q_i}A^n}{p_1!q_1!\cdots p_i!q_i!n!\,(q_1+\cdots+q_i+1)}.$$

La formule cherchée découle alors, après une simple intégration, de la précédente et des identités :

$$\begin{aligned}\Phi\Big(\exp(\operatorname{ad}_X)\exp(t\operatorname{ad}_Y)-\mathbf{I}_n\Big)Y &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i+1}\Big(\exp(\operatorname{ad}_X)\exp(t\operatorname{ad}_Y)-\mathbf{I}_n\Big)^i\exp(\operatorname{ad}_X)\exp(t\operatorname{ad}_Y)(Y)\\ \exp(t\operatorname{ad}_Y)(Y) &= 0\end{aligned}$$

la dernière ligne provenant de $\operatorname{ad}_Y(Y) = [Y,Y] = 0$. □

56. ce qui demande un petit peu de travail.

3 Structure des algèbres de Lie

Le fait qu'un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ soit déterminé par son "algèbre de Lie", qui est un objet d'algèbre linéaire a priori plus simple que le groupe lui-même, est une motivation pour étudier ces nouveaux objets, après en avoir donné un fondement axiomatique. Il y a bien d'autres motivations. Par exemple, il existe des algèbres de Lie qui apparaissent naturellement en physique mathématiques et en géométrie ; via la théorie des groupes quantiques, les algèbres de Kac-Moody, les théories des champs, les structures symplectiques par exemple. Les algèbres de Lie abstraites apparaissent également en topologie et géométrie algébrique. Dans ce chapitre, nous commençons à étudier la théorie générale des algèbres de Lie.

3.1 Algèbres de Lie "abstraites". Exemples.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque.

3.1.1 DÉFINITION.– *Une* algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel muni d'une loi de composition interne* $[\,,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}:(X,Y)\mapsto[X,Y]$ *qui est* $\mathbb{K}$*-bilinéaire, alternée (*$[X,X]=0$*, donc* $[X,Y]=-[Y,X]$*), et qui vérifie l'identité de Jacobi*

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}\ ,\ \ [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0. \qquad (3.1.1.1)$$

Si $K=\mathbb{R}$*, on dira simplement "algèbre de Lie". La loi* $[\,,]$ *s'appelle le crochet de Lie.*

Un morphisme *entre deux algèbres de Lie est un homomorphisme* f *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels sous-jacents respectant leurs lois d'algèbres de Lie :* $f([X,Y])=[f(X),f(Y)]$*.*

En tenant compte de l'anti-symétrie du crochet, l'identité de Jacobi peut aussi s'écrire sous la forme équivalente [57]

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}\ ,\ \ [X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]. \qquad (3.1.1.2)$$

Pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, on note [58] $\mathrm{ad}_X\in\mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$ l'endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}:Y\mapsto\mathrm{ad}_X(Y):=[X,Y]$. La deuxième forme de l'identité de Jacobi se lit donc

$$\mathrm{ad}_X([Y,Z])=[\mathrm{ad}_X(Y),Z]+[Y,\mathrm{ad}_X(Z)]. \qquad (3.1.1.3)$$

qui exprime que ad_X est une *dérivation* de $\mathfrak{g}$ (mais *pas* un morphisme d'algèbre de Lie).

3.1.2 *Première classe d'exemples : algèbre de Lie associée à une algèbre associative.* Soit A une algèbre associative. Munissons A du crochet $[a,b]:=ab-ba$.

3.1.3 PROPOSITION.– *La paire* $(A,[\,,])$ *est une algèbre de Lie.*

Exercice. – Démontrer la proposition.

Nous avons déjà vu un exemple de cette construction en fait, dans la partie 2.1.1. En effet, prenons $A=\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$. La proposition précédente montre que *ce que nous avons appelé*

57. attention, si on ne suppose pas le crochet antisymétrique, ces 2 relations ne sont pas équivalentes ! La relation (3.1.1.2) est parfois dite relation de Leibniz ; et donne lieu à la notion d'algèbre de Leibniz.

58. tout comme dans le lemme 2.2.13.

jusqu'ici "algèbre de Lie" d'un groupe de Lie linéaire G est bien une algèbre de Lie au sens de la définition 3.1.1 précédente. Par contre, pour G différent de $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ne provient pas nécessairement d'une algèbre associative.

3.1.4 DÉFINITION.– *Un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé :*
— *Une* sous-algèbre de Lie *de $\mathfrak{g}$ s'il est stable sous le crochet de Lie,* i.e. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$*, ou encore* $\forall X, Y \in \mathfrak{h}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$.
— *Un idéal de $\mathfrak{g}$ s'il vérifie* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$*, c'est-à-dire* $\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Exercice. – i) Si $\mathfrak{h}$ est un idéal, l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie. Plus précisément, montrer que si $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ admet une structure d'algèbre de Lie telle que l'application quotient $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit un morphisme d'algèbres de Lie si et seulement si $\mathfrak{h}$ est un idéal.

ii) Si $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$ est un autre idéal de $\mathfrak{g}$, montrer que l'image $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et on a l'isomorphisme canonique "habituel" $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}' \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{h}'/\mathfrak{h})$.

iii) Par ailleurs, lorsque $\mathfrak{h}'$ n'est plus contenu dans $\mathfrak{h}$, montrer que la *somme*

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{h}' := \{X + Y, X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}'\}$$

est un idéal de $\mathfrak{g}$, et que l'on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{h}'/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}') \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{h}' + \mathfrak{h})/\mathfrak{h}$.

Exercice. – Montrer que, pour tout morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, le noyau $\mathfrak{h} = \mathrm{Ker}(f)$ de f est un idéal de $\mathfrak{g}$, l'image $\mathfrak{h}' = \mathrm{Im}(f)$ de f est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, et f induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}'$.

3.1.5 *Centre d'une algèbre de Lie.* On appelle centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'idéal

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{K}))$$

de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie *abélienne* si $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, c'est-à-dire, si le crochet de $\mathfrak{g}$ est *nul*[59]. C'est le cas des algèbres de Lie asociées à une algèbre commutative (au sens de S 3.1.2).

On peut remarquer que si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'ensemble des matrices A qui commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, l'espace vectoriel

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] := \mathrm{Vect}_K \left(\{[X, Y], X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}'\}\right)$$

est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}'$, et appelé *produit* de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}'$.

Exercice. – Montrer que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}]$ et $[\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']] \supset [\mathfrak{h}', [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]]$[60].

Exercice. – Montrer que *l'algèbre dérivée* $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est le plus petit idéal de $\mathfrak{g}$ (pour l'inclusion) tel que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie abélienne. On notera l'analogie avec la notion de *groupe dérivé.*

59. il est immédiat que, réciproquement, tout espace vectoriel muni du crochet nul est une algèbre de Lie
60. en revanche, on a pas égalité comme le montre l'exemple $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{b}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h}$ est l'idéal abélien des matrices diagonales.

Remarque culturelle. (language des opérades) – L'analogie avec le vocabulaire plus familier des $\mathbb{K}$-algèbres associatives commutatives (idéaux, quotients, centre...) n'est évidemment pas fortuite. Les axiomes définissant ces deux structures sont essentiellement les mêmes, sauf que l'axiome de commutativité $xy = yx$ est remplacé par un axiome d'anticommutativité $[X, Y] = -[Y, X]$, et celui d'*associativité* $x(yz) = (xy)z$ est remplacé par l'identité de Jacobi. Il existe une théorie abstraite, appelée *théorie des opérades*, qui permet de construire beaucoup d'autres notions d'"algèbre" qui interviennent dans divers domaines des mathématiques ou de la physique mathématique. Bien-sûr, toutes ces notions ne sont pas toujours aussi importantes que les algèbres associatives, commutatives ou de Lie. Quelques exemples importants recouverts par la théorie des opérades sont donnés par les algèbres de Leibniz, de Jordan, de Poisson, de Steenrod, de Batalin-Vilkoviski, de Gerstenhaber, dendriformes,les E_n-algèbres .... Par ailleurs la théorie des opérades permet de comparer et de relier différents types de structures algébriques. Ainsi, le fait qu'une algèbre associative donne lieu à une algèbre de Lie se traduit par l'existence d'un morphisme d'opérades entre celle des algèbres de Lie et celle des algèbres associatives. (Fin de la remarque).

Donnons maintenant une autre manière de définir des algèbres de Lie.

3.1.6 *Dérivations d'une algèbre.* Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative. Une *dérivation* ∂ de A est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibniz : $\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b)$. L'ensemble $\mathrm{Der}(A)$ des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(A/\mathbb{K})$. Le composé $\partial\partial'$ de deux dérivations ∂, ∂' n'est en général pas une dérivation (autrement dit, $\mathrm{Der}(A)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\mathrm{L}(A/\mathbb{K})$), mais $[\partial, \partial'] := \partial\partial' - \partial'\partial$ est encore une dérivation de A. On en déduit :

3.1.7 PROPOSITION.– *La paire* $(\mathrm{Der}(A), [-,-])$ *est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(A/\mathbb{K})$.[61]

Exercice. – Démontrer la proposition.

De même, on définit *une dérivation d'une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ comme un élément ∂ de $\mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$ vérifiant $\partial([X, Y]) = [\partial X, Y] + [X, \partial Y]$. On remarque que la formule (3.1.1.3) –qui traduit l'identité de Jacobi– signifie finalement que pour tout $X \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}_X \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{K}).$$

3.1.8 DÉFINITION. (Représentations d'une algèbre de Lie)– *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie. Une représentation de* $\mathfrak{g}$ *est une paire* (V, ρ) *composée d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* V *de dimension finie et d'un morphisme d'algèbres de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K}).$$

Exemple. (*Représentation adjointe*) – La représentation adjointe Ad des groupes de Lie (*cf.* paragraphe 2.2.11) a un analogue pour les algèbres de Lie abstraites.

Considérons l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$, $X \mapsto \mathrm{ad}_X$. La formule de Jacobi s'écrit

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) &= [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(Z)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(Z)) \\ &= (\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X)(Z) = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z), \end{aligned}$$

61. Un exemple standard provient de la géométrie différentielle : soit M une variété différentiable et $C^\infty(M)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions différentiables sur M. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(M, TM)$ des champs de vecteurs sur M, muni du crochet de Lie, est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$.

ce dernier crochet étant celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$ attachée à $\mathrm{L}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$, de sorte que $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$. En d'autres termes, $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad})$ est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, d'espace de représentation $V = \mathfrak{g}$ elle-même. On l'appelle la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. Elle est d'autant plus intéressante que le centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ de $\mathfrak{g}$ est petit.

Une représentation (V, ρ) se note souvent abusivement simplement V. On sous-entend ρ en notant $X.v$ pour $\rho(X)(v)$.

Un $\mathbb{K}$-sev W de V est dit *stable par* $\mathfrak{g}$ si $\forall X \in \mathfrak{g},\ X.(W) \subseteq W$. Le morphisme ρ induit donc un morphisme d'algèbres de Lie, toujours noté $\rho :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W/\mathbb{K})$. On appelle la représentation (W, ρ) ainsi obtenue une *sous-représentation* de (V, ρ). De plus, ρ induit un morphisme $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}((V/W)/\mathbb{K})$ et la représentation $(V/W, \rho)$ obtenue est appelée *représentation quotient.*

Notons que, par définition, on a une équivalence :

$\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *si et seulement si* $\mathfrak{h}$ *est un sous-espace stable de la représentation adjointe.*

Exemple. – Si (V, ρ) est une représentation de $\mathfrak{g}$, le $\mathbb{K}$-sev

$$V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ X.v := \rho(X)(v) = 0\}$$

est stable par $\mathfrak{g}$. L'action de $\mathfrak{g}$ sur $V^{\mathfrak{g}}$ est triviale[62]. Plus généralement, si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, le $\mathbb{K}$-sev $V^{\mathfrak{h}}$ est stable par $\mathfrak{g}$. En effet, si $X \in \mathfrak{g}$, on a pour tout $Y \in \mathfrak{h}$ et tout $v \in V^{\mathfrak{h}}$ l'égalité

$$Y.(X.v) = Y.(X.v) - X.(Y.v) = [Y, X].v = 0$$

puisque $[Y, X] \in \mathfrak{h}$. Noter que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $V^{\mathfrak{h}}$ se factorise par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Remarque culturelle. – Un joli théorème d'Ado assure que toute algèbre de Lie de dimension finie admet une représentation fidèle, c'est à dire telle que $\rho :\ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W/\mathbb{K})$ soit injective.

THÉORÈME. (Ado) – *Toute algèbre de Lie de dimension finie est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ *(pour un* n *assez grand).*

Il ne faut cependant pas croire que toute algèbre de Lie de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un *groupe de Lie linéaire*. Il existe en effet des algèbres de Lie de dimension finie (à part en dimension 1 et 2) qui ne sont l'algèbre de Lie de aucun sous-groupe *fermé* d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Cependant toute algèbre de Lie peut être "intégrée", c'est à dire :

THÉORÈME. ($3^{\text{ième}}$ théorème de Lie) – *Toute* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie abstrait (qui est unique si on le suppose en outre connexe et simplement connexe).*

(Fin de la remarque culturelle)

Dans un soucis de classification des algèbres de Lie, nous allons introduire deux suites descendantes d'idéaux associés à une algèbre de Lie : il s'agit de la suite centrale (associée aux algèbres de Lie nilpotentes) et de la suite dérivée (associée aux algèbres de lie résolubles). Nous verrons que toute algèbre de Lie est la somme directe d'une algèbre de Lie résoluble et d'une algèbre de Lie semi-simple (*cf.* la section 3.4).

62. On a là un analogue des vecteurs fixes dans une représentation d'un groupe

3.2 Algèbres de Lie nilpotentes

Dans cette section nous étudions la suite centrale caractérisant les algèbres de Lie nilpotentes.

3.2.1 DÉFINITION.– *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* $\mathbb{K}$. *La* suite centrale descendante *de* $\mathfrak{g}$ *est la suite décroissante (au sens large) d'idéaux de* G *définie par*

$$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \ \textit{et} \ C^n(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})], \forall n > 1.$$

On dit que $\mathfrak{g}$ *est* nilpotente [63] *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $C^n(\mathfrak{g}) = 0$.

En d'autres termes, $C^n(\mathfrak{g})$ est le $\mathbb{K}$-sev de $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}) &= \mathrm{Vect}_K\left(\{[X_n, [X_{n-1}, \cdots, [X_2, X_1]\cdots]], \ \text{avec } X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{g}\}\right). \\ &= \mathrm{Vect}_K\left(\{\mathrm{ad}(X_n)\mathrm{ad}(X_{n-1})\cdots\mathrm{ad}(X_2)(X_1), \ \text{avec } X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{g}\}\right). \end{aligned}$$

Exercice. – Vérifier par récurrence que $[C^r(\mathfrak{g}), C^s(\mathfrak{g})] \subset C^{r+s}(\mathfrak{g})$, pour $r, s \in \mathbb{N}$ et en particulier que $C^i(\mathfrak{g})$ est bien un idéal de $\mathfrak{g}$. On notera que le plus grand i tel que $C^i(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$; ainsi une algèbre de Lie nilpotente non-nulle a un centre non-trivial.

Le lemme suivant donne une autre caractérisation pratique des algèbres de Lie nilpotentes.

3.2.2 LEMME.– *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente si et seulement si elle vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

i) Il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{h}_n = 0$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ *pour tout* i.

ii) Pour n *assez grand et pout tout* n*-uple* $X_1, \cdots, X_n$ *d'éléments de* $\mathfrak{g}$,

$$\mathrm{ad}(X_n)\mathrm{ad}(X_{n-1})\cdots\mathrm{ad}(X_2)(X_1) = 0.$$

Démonstration. Laissée au lecteur ou au chargé de TD. □

Cette dernière caractérisation implique en particulier que, si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors l'application linéaire $\mathrm{ad}(X)$ est nilpotente pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

3.2.3 Exemple. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente. En particulier, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}))$ (constitué des matrices diagonales) est une algèbre de Lie nilpotente. Un exemple moins trivial est donné ci-dessous, paragraphe 3.2.4.

Exercice. – Déduire du lemme précédent que toute sous-algèbre de Lie (resp. tout quotient) d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente.

3.2.4 *Exemple et contre-exemple clé : les matrices triangulaires.* Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit $\mathcal{V}$ un drapeau complet dans V, comme dans le paragraphe 1.3.7. On dispose des algèbres de Lie $\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ (les endomorphismes "triangulaires supérieurs") et $\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ (des endomorphismes "triangulaires supérieurs stricts"). On montre que $[\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K}), \mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})] = \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$, et plus généralement que

$$C^k(\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K}), \ \forall k \geqslant 2$$

63. on pourra noter l'analogie avec la notion de groupe (abstrait) nilpotent

Exercice. – Démontrer la formule ci-dessus.

En particulier, si $\dim(V) \geqslant 2$, on en déduit que $C^k(\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) \neq 0$ et donc que

l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ n'est pas nilpotente (quand $\dim(V) \geqslant 2$).

En revanche, on a [64]

$$C^k(\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = \{u \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K}),\ u(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_{i-k},\ \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

Exercice. – Démontrer la formule ci-dessus.

En particulier $C^{\dim(V)}(\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = 0$ et donc

l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ est une algèbre de Lie nilpotente.

L'important théorème suivant est pratique pour identifier des algèbres de Lie nilpotentes.

3.2.5 THÉORÈME. (Engel)– *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ telle que tout élément X de $\mathfrak{g}$ soit un endomorphisme nilpotent de V. Alors, il existe un drapeau $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$. En particulier, $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

[Autrement dit : si tous les éléments de $\mathfrak{g}$ sont trigonalisables et à valeurs propres toutes nulles, ils sont simultanément trigonalisables [65].]

Démonstration. Supposons que l'on ait déjà prouvé l'énoncé suivant :

(*) Pour $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ formée d'éléments nilpotents, on a $V^{\mathfrak{g}} \neq 0$.

Alors le théorème en découle par récurrence sur $\dim(V)$. En effet, soit $v \in V^{\mathfrak{g}}$ non nul. Posons $\mathcal{V}_1 := K.v$ et notons $p : V \twoheadrightarrow V' := V/\mathcal{V}_1$ la projection de V sur son quotient par la droite $K.v = \mathcal{V}_1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation quotient $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V'/\mathbb{K})$. Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $\mathcal{V}'$ dans V' tel que $\mathfrak{g}'$ soit contenue dans $\mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}'/\mathbb{K})$. Rappelons que ceci signifie simplement que $\mathfrak{g}'.\mathcal{V}'_i \subset \mathcal{V}'_{i-1}$ pour tout $i > 0$. Posons alors $\mathcal{V}_i := p^{-1}(\mathcal{V}_{i+1})$. On a bien $\mathfrak{g}.\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_{i-1}$ pour $i > 1$, et on a aussi $\mathfrak{g}\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 = \{0\}$ par construction de $\mathcal{V}_1$. On a donc $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ comme voulu.

Il faut maintentant prouver l'énoncé *(*)*. Nous le ferons par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, on a $V^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ker}(X)$ pour tout X non nul de $\mathfrak{g}$. Comme un tel X est supposé nilpotent, son noyau est non nul, comme voulu. Supposons maintenant $\dim(\mathfrak{g}) > 1$, et supposons que l'on dispose d'un idéal $\mathfrak{h}$ non trivial, *i.e.* distinct de $\{0\}$ et de $\mathfrak{g}$. Alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ nous dit que $V^{\mathfrak{h}} \neq \{0\}$. De plus, $V^{\mathfrak{h}}$ est stable par l'action de $\mathfrak{g}$, laquelle se factorise par $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ainsi l'hypothèse de récurrence appliquée à l'image de $\mathfrak{g}$ par la sous-représentation $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^{\mathfrak{h}})$ nous dit que $(V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \neq 0$. Or, on a $V^{\mathfrak{g}} = (V^{\mathfrak{h}})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

64. on notera que $\mathcal{V}_{i\leqslant 0} = \{0\}$ par convention

65. on prendra bien garde ici que le résultat est vrai car $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie, donc stable par commutateur ! Le résultat n'est pas vrai sans cette hypothèse : par exemple, engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ sont nilpotentes mais ne sont *pas* simultanément trigonalisables.

Il reste donc à prouver l'existence d'un idéal $\mathfrak{h}$ non trivial. Choisissons pour cela une sous-algèbre de Lie propre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale [66] ; nous allons montrer que c'est nécéssairement un idéal. La représentation adjointe ad de $\mathfrak{g}$ restreinte à $\mathfrak{h}$ induit une représentation de $\mathfrak{h}$ sur le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'image de $\mathfrak{h}$ par cette représentation est formée d'endomorphismes nilpotents. En effet, d'après l'exercice ci-dessous, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme ad_X de $\mathfrak{g}$ est nilpotent. On peut donc appliquer notre hypothèse de récurrence pour en déduire l'existence d'un élément $\overline{X} \neq 0$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ annulé par l'action de $\mathfrak{h}$. Soit $X \in \mathfrak{g}$ au-dessus de $\overline{X}$. On a donc $X \notin \mathfrak{h}$ et $[\mathfrak{h}, X] = \mathrm{ad}(\mathfrak{h})(X) \subseteq \mathfrak{h}$. Ceci implique que $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}.X$ est une algèbre de Lie contenant $\mathfrak{h}$ comme idéal. Mais par maximalité de $\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}.X = \mathfrak{g}$. Ainsi, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1. □

Exercice. – Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative et $\mathrm{ad}_X(y) = [x, y] := xy - yx$ pour $x, y \in A$. Montrer que $\mathrm{ad}_X^n(y) \in \mathrm{Vect}_K\{x^k y x^{n-k}, k = 0, \cdots, n\}$.

En déduire le lemme suivant :

3.2.6 Lemme.– *Soit $X \in \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors ad_X est aussi nilpotent.*

Voici une amélioration de la caractérisation ii) du lemme 3.2.2.

3.2.7 Corollaire.– *Une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si pour tout X dans $\mathfrak{g}$, ad_X est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. La condition est nécessaire, vu la caractérisation ii) du lemme 3.2.2. Le fait que la condition soit suffisante est plus surprenant. Il découle du théorème précédent appliqué à l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe ad : $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$. En effet, ce théorème assure l'existence d'un drapeau $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_{i-1}$. Posons $\mathfrak{h}_i := \mathcal{V}_{\dim(V)-i}$. Alors, les $\mathfrak{h}_i$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i] = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$, et on applique le point i) du lemme 3.2.2.

□

Attention !!! : le théorème et son corollaire ne signifient *pas* qu'une sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ est formée d'endomorphismes nilpotents. C'est l'action adjointe par les éléments de $\mathfrak{g}$ qui l'est ! Par exemple, on a vu que le centre de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ est nilpotent puisqu'abélien, mais il est constitué d'endomorphismes *tous* non-nilpotents (à l'exception de l'endomorphisme nul bien sûr).

Il ne faut donc pas confondre l'action adjointe de X sur $\mathfrak{g}$ (qui est nilpotente) avec celle de X sur V (qui ne l'est pas forcément en général) !

3.3 Algèbres de Lie résolubles.

Dans cette partie, nous nous intéressons à la suite dérivée caractérisant les algèbres de Lie résolubles.

3.3.1 Définition.– *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$. La* suite dérivée *de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante (au sens large) de sous-algèbres de Lie de G définie par*

$$D^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \ \ et \ \ D^n(\mathfrak{g}) := [D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})], \forall n > 1.$$

66. cela existe car tout vecteur non nul de $\mathfrak{g}$ définit une sous-algèbre de Lie (abélienne).

On dit que $\mathfrak{g}$ *est* résoluble [67] *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $D^n(\mathfrak{g}) = 0$.

On voit facilement, par récurrence, que $D^k(\mathfrak{g}) \subset C^k(\mathfrak{g})$ pour tout k [68], de sorte que

toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble.

On constate aussi par récurrence [69] que *la suite* $D^k(\mathfrak{g})$ *est une suite d'idéaux de* $\mathfrak{g}$. Toujours par récurrence, on voit que pour tout $i \geqslant 1$, $D^k(D^i(\mathfrak{g})) = D^{i+k-1}(\mathfrak{g})$. En particulier, pour vérifier que $\mathfrak{g}$ est résoluble, il suffit de vérifier que $D^i(\mathfrak{g})$ l'est pour n'importe quel $i \geqslant 1$. On prendra garde que la propriété analogue est *fausse* pour les nilpotentes comme le démontre l'exemple de $\mathfrak{b}_{n\geqslant 2}(\mathbb{K})$.

On dispose de la caractérisation alternative suivante.

3.3.2 Lemme.– *Montrer que* $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si on a l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

i) il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ *de* $\mathfrak{g}$ *tels que* $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ *pour tout* i.

ii) il existe une suite de sous-algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset .... \supset \mathfrak{h}_n = 0$ *de* $\mathfrak{g}$ *telles que pour* $i = 1, ..., n-1$, $\mathfrak{h}_{i+1}$ *est un idéal de* $\mathfrak{h}_i$ *à quotient* $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ *abélien.*

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

Exercice. – i) Déduire du lemme que si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ le sont.

ii) Montrer que le résultat précédent est faux pour les algèbres de Lie nilpotentes (Indication on pourra considérer $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}(\mathbb{R})$).

Remarque. – i) Si $\mathfrak{g} = D^1(\mathfrak{g}) \supset D^2(\mathfrak{g}) \supset .... \supset D^{n-1}(\mathfrak{g}) \supset D^n(\mathfrak{g}) = 0$ est résoluble non-nulle, alors le plus petit $D^i(\mathfrak{g})$ non-nul est abélien. En particulier, une algèbre de Lie résoluble non-nulle contient un idéal abélien non-trivial.

ii) Si il existe k tel que $D^{k+1}(\mathfrak{g}) = D^k(\mathfrak{g})$, alors, on montre par récurrence que, pour tout $i \geqslant k$, on a $D^i(\mathfrak{g}) = D^k(\mathfrak{g})$. En particulier, dans une algèbre de Lie résoluble, la suite dérivée est strictement décroissante (la réciproque est vraie si l'algèbre de Lie est de dimension finie).

Exercice. – On dit qu'un groupe de Lie G est résoluble s'il admet une suite de sous-groupes normaux fermés à quotients successifs abéliens. Montrer qu'un groupe de Lie connexe G est résoluble si et seulement si $\mathrm{Lie}(G)$ est une algèbre de Lie résoluble.

3.3.3 Exemple (Exemple clé). Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{V}$ un drapeau complet de V. Les calculs faits dans le paragraphe 3.2.4 donne $D^2(\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})) = \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ puis que

$\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ *est une algèbre de Lie résoluble.*

C'est donc (pour $\dim(V) \geqslant 2$) une algèbre de Lie résoluble non-nilpotente.

67. on notera l'analogie avec la notion de groupe (abstrait) résoluble.
68. on a $D^2(\mathfrak{g}) = C^2(\mathfrak{g})$ par définition, mais pour $k \geqslant 3$, on a en général que $D^k(\mathfrak{g})$ est strictement inclus dans $C^k(\mathfrak{g})$.
69. en utilisant que si $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ sont des idéaux, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ est un idéal comme on l'a vu précédement

Dans la suite de cette section, nous supposons $K = \mathbb{C}$. On pourrait plus généralement supposer $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique nulle : le point important est que sur un tel corps, tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admet un vecteur propre.

Le théorème ci-dessous montre que dans ce cas, les algèbres de Lie résolubles sont des sous-algèbres de $\mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$.

3.3.4 Théorème. (Lie)– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-sous-algèbre de Lie*[70] *résoluble de $\mathfrak{gl}(V/\mathbb{C})$. Il existe un drapeau $\mathcal{V}$ de V tel que $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}(\mathcal{V}/\mathbb{C})$.*

Remarque. – Ce théorème est une généralisation du fait qu'une famille d'endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie qui commutent deux à deux est simultanément trigonalisable. En effet, le $\mathbb{C}$-ev engendré par une telle famille est une algèbre de Lie abélienne, donc résoluble.

Démonstration. Supposons que l'on ait déjà prouvé l'énoncé suivant[71] :

(*) Pour $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ résoluble, il existe un $v \in V$ vecteur propre de tous les $X \in \mathfrak{g}$.

Alors le théorème en découle par récurrence sur $\dim(V)$. En effet, soit v un tel vecteur propre. Posons $\mathcal{V}_1 := K.v$ et notons $p : V \twoheadrightarrow V' := V/\mathcal{V}_1$ la projection de V sur son quotient par la droite $K.v = \mathcal{V}_1$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'image de $\mathfrak{g}$ par la représentation quotient $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V'/\mathbb{K})$. Par le premier exercice ci-dessus, $\mathfrak{g}'$ est résoluble. Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $\mathcal{V}'$ dans V' tel que $\mathfrak{g}'$ soit contenue dans $\mathfrak{b}(\mathcal{V}'/\mathbb{K})$, ce qui signifie simplement que $\mathfrak{g}'.\mathcal{V}'_i \subset \mathcal{V}'_i$ pour tout $i \geqslant 0$. Posons alors $\mathcal{V}_i := p^{-1}(\mathcal{V}_{i+1})$. On a bien $\mathfrak{g}.\mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}_i$ pour $i > 0$, et on a aussi $\mathfrak{g}\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1$ par construction de $\mathcal{V}_1$. On a donc $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}^{\mathrm{nilp}}(\mathcal{V}/\mathbb{K})$ comme voulu

Il nous faut maintenant prouver *(*)*, ce que nous ferons par récurrence sur $\dim(\mathfrak{g})$. Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, le résultat est clair puisque tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie possède un vecteur propre. Supposons $\dim(\mathfrak{g}) > 1$, et supposons l'assertion *(*)* établie pour toutes les algèbres de Lie résolubles de dimension $< \dim(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{h}$ un hyperplan de $\mathfrak{g}$ contenant $D\mathfrak{g}$ (noter[72] que $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g} \neq 0$). Alors, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et l'hypothèse de récurrence fournit un vecteur propre v de V commun à tous les éléments de $\mathfrak{h}$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par $X.v = \lambda(X)v$ pour tout X dans $\mathfrak{h}$. Posons

$$V_\lambda := \{v \in V, \forall X \in \mathfrak{h}, X.v = \lambda(X)v\},$$

le sous-espace "λ-propre" de V sous l'action de $\mathfrak{h}$, qui est donc non nul. Admettons un instant que V_λ est stable par $\mathfrak{g}$. Soit Y un générateur d'une droite supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, Y admet un vecteur propre $v' \in V_\lambda$. Alors, v', qui est propre pour $\mathfrak{h}$, l'est pour $\mathfrak{g}$ toute entière, et le théorème est démontré.

Il reste à prouver que V_λ est stable par $\mathfrak{g}$. Par l'égalité

$$X.Y.v = Y.X.v + [X,Y].v = \lambda(X)Y.v + \lambda([X,Y])v$$

valable pour tout X, Y, v dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}, V_\lambda$, on est ramené à prouver que $\lambda([X,Y]) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$. *Cette dernière propriété est un fait général pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, idéal*

70. le théorème est vrai pourn'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle. En revanche, il n'est pas vrai pour $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{F}_2})$.

71. Cette première étape est la même que dans le théorème de Engel.

72. Si $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble ; ce n'est donc pas le cas ici !

$\mathfrak{h}$, représentation de dimension finie V de $\mathfrak{g}$ et vecteur $v \in V \setminus \{0\}$ qui est propre pour tout $X \in \mathfrak{h}$.

Pour démontrer cela, fixons un vecteur $w \neq 0$ de V_λ, et notons W le sous-espace de V engendré par les images de w sous tous les itérés $Y^{\cdot k}$ de Y ; il est évidemment stable par Y. On va montrer qu'il est stable par $\mathfrak{h}$ également. Notons que W a un drapeau canonique donné par $\mathcal{W}_1 = \mathbb{K}w$,$\mathcal{W}_2 = \mathbb{K}w \oplus \mathbb{K}Y.w$, ...,$\mathcal{W}_{\dim(W)} = \mathbb{K}w \oplus \mathbb{K}Y.w \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}Y^{\dim(W)-1}.w$. La formule $X.Y^{\cdot k}.w = Y.X.Y^{\cdot(k-1)}w + [X,Y].Y^{\cdot(k-1)}w$ montre par récurrence que W est stable sous $\mathfrak{h}$ et que $X.Y^{\cdot k}.w \equiv \lambda(X)Y^{\cdot k}.w$ modulo le sous-espace engendré par les $Y^{\cdot k'}.w, k' < k$. C'est à dire que $\mathfrak{h}$ agit comme des endomorphismes triangulaires supérieurs sur la base canonique de W, autrement dit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\mathcal{W}/\mathbb{K})$.

Donc $\mathrm{tr}(X_{|W}) = \dim(W).\lambda(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$. Mais X et Y agissent sur W, donc $\dim(W).\lambda([X,Y]) = \mathrm{tr}([X_{|W}, Y_{|W}]) = 0$. □

On en déduit une caractérisation de la résolubilité en termes de représentations. On dit qu'une représentation (V, ρ) est *irréductible* si ses seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et V.

3.3.5 Corollaire.– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est de dimension* 1.

Ce corollaire ne reste vrai pour les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie que si l'on se limite aux $\mathbb{C}$-représentations. Mais en général, il existe des $\mathbb{R}$-représentations irréductibles de dimension 2.

Exercice. – Montrer que la représentation "standard" $\mathfrak{so}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ est irréductible.

Les deux résultats qui suivent sont, eux, encore valables pour les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Cela résulte de l'exercice suivant :

Exercice. – Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, et soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexifiée.

i) Montrer que $D^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = D^i(\mathfrak{g})_\mathbb{C}$.

ii) En déduire que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'est.

3.3.6 Corollaire.– *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si son algèbre de Lie dérivée $D\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. La condition est en effet suffisante d'après le premier exercice du paragraphe. Pour montrer qu'elle est nécessaire, on peut supposer $K = \mathbb{C}$. On applique alors le théorème à la sous-algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{C})$. Le drapeau d'idéaux $\{\mathfrak{h}_i\}$ qu'il fournit vérifie pour tout $X \in D\mathfrak{g}$: $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_{i+1}$ car $\mathfrak{gl}((\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1})/\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ est une algèbre de Lie abélienne (une autre façon de le dire est que $\mathrm{ad}_{D(\mathfrak{g})} \subset D(\mathrm{ad}_\mathfrak{g})$ est dans $\mathfrak{b}^{nil}$ du drapeau par les calculs de la section précédente). Ainsi, ad_X agit de façon nilpotente sur $\mathfrak{g}$, donc aussi sur $D\mathfrak{g}$, et on conclut par le corollaire 3.2.7. □

3.3.7 Corollaire. (Critère de Cartan 1)– *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(XY) = 0$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

Démonstration. En vertu du corollaire précédent et du théorème de Engel, il suffit de voir que tout élément X de $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est nilpotent, autrement dit, que ses valeurs propres sont nulles, ou encore, si $\overline{D}$ désigne l'endomorphisme de $V = \mathbb{C}^n$ donné, dans une base de V

diagonalisant la partie semi-simple X_s de X, par la matrice complexe conjuguée de $D = X_s$, que $\mathrm{tr}(\overline{D}.X) = 0$. Comme $X \in D\mathfrak{g}$ est une combinaison linéaire de $[Y, Z]$, et que

$$\mathrm{tr}(\overline{D}[Y, Z]) = \mathrm{tr}([\overline{D}, Y]Z),$$

il suffit de montrer que $\mathrm{ad}(\overline{D})$ laisse stable $\mathfrak{g}$. Mais, comme $\overline{D}$ est diagonale, $\mathrm{ad}(\overline{D})$ s'exprime comme un polynôme en $\mathrm{ad}(D) = \mathrm{ad}(X_s)$, lequel vaut $(\mathrm{ad}_X)_s$, qui est lui même un polynôme en ad_X. Comme ad_X est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ laissant stable $\mathfrak{g}$, c'est terminé. $\square$

Remarque. – On a utilisé le fait que si $X = X_s + X_u$ est la décomposition de Jordan d'un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire d'un $\mathbb{K}$-ev V, alors $\mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}(X_s) + \mathrm{ad}(X_u)$ est la décomposition de Jordan de l'endomorphisme ad_X de $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$. En effet, on a déjà remarqué que $\mathrm{ad}(X_u)$ est nilpotent et il est clair que $\mathrm{ad}(X_s)$ et $\mathrm{ad}(X_u)$ commutent. Il reste donc à vérifier que $\mathrm{ad}(X_s)$ est semi-simple. Pour cela, on peut supposer $K = \mathbb{C}$ et choisir une base $e_1, \cdots, e_n$ de V telle que $X_s e_i = \lambda_i e_i$. Soit alors $E_{ij} = e_j^* e_i$ la base de $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$ correspondante. On calcule $\mathrm{ad}(X_s)(E_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$ et on en déduit que $\mathrm{ad}(X_s)$ est diagonalisable.

3.4 Algèbres de Lie semi-simples.

On va s'intéresser ici aux analogues pour les algèbres de Lie des groupes (semi-)simples. Ces algèbres de Lie ont une classification bien comprise (qui dépasse cependant le cadre de ce cours), *cf.* Remarque 3.4.9.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. D'après le premier exercice du paragraphe précédent, la somme de deux idéaux résolubles de $\mathfrak{g}$ est résoluble, et on peut donc parler du *plus grand idéal résoluble* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, qu'on appelle le *radical* de $\mathfrak{g}$.

3.4.1 Définition.– *On dit que* $\mathfrak{g}$ *est* semi-simple *si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes.*

i) $\mathfrak{g}$ *n'admet pas d'idéal abélien non nul.*

ii) le radical de $\mathfrak{g}$ *est nul.*

En particulier, une algèbre de Lie semi-simple a un centre trivial, de sorte que sa représentation adjointe est fidèle (c'est-à-dire : injective) [73].

3.4.2 Définition.– *On dit que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est simple si elle n'a pas d'idéal propre (c'est-à-dire distinct de* 0 *ou* $\mathfrak{g}$*) et si elle n'est pas abélienne.*

La dernière condition n'est là que pour éviter l'algèbre de Lie "triviale" $\mathbb{K}$; on pourrait la remplacer par la condition $dim(\mathfrak{g}) > 1$. Elle implique aussi qu'une algèbre de Lie simple est semi-simple.

Remarque. – On peut montrer (voir TD) qu'une algèbre de Lie simple est de dimension au moins 3. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est la seule algèbre de Lie complexe simple de dimension 3, tandis que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2$ sont les seules algèbres de Lie réelles simples de dimension 3.

Exercice. – — Montrer qu'une somme directe d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple ;

73. en particulier, une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathbb{K})$.

— Montrer que si $\mathfrak{g}$ est simple, alors $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$.

3.4.3 DÉFINITION.– *Soit* $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$*. On note* B_π *la forme* $\mathbb{K}$*-bilinéaire symétrique sur* $\mathfrak{g}$

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B_\pi(X, Y) := \mathrm{tr}(\pi(X)\pi(Y))$$

On vérifie aisément la propriété suivante, parfois appelée “associativité”

$$B_\pi([X, Y], Z) = B_\pi(X, [Y, Z]), \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Il s'ensuit que l'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ relativement à B_π d'un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En particulier, le radical (ou “noyau”) $\mathfrak{r}_{B_\pi} = \mathfrak{g}^\perp$ de B_π est un idéal.

3.4.4 DÉFINITION.– *La* forme de Killing *de* $\mathfrak{g}$ *est la forme la forme* $B_{\mathrm{ad}} = B$:

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto B(X, Y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$$

associée à représentation adjointe $\pi = \mathrm{ad}$*.*

Les exemples suivants sont laissés en exercice.
Exemples : i) la forme de Killing de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est $B(X, Y) = 2n \,\mathrm{tr}(XY) - 2(\mathrm{tr}\, X)(\mathrm{tr}\, Y)$. On utilise ici le fait que $\mathrm{tr}(A \mapsto XAY) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(Y)$.

ii) les formes de Killing de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ sont respectivement données par $B(X, Y) = c\,\mathrm{tr}(XY)$, avec $c = 2n, n-2, 2n+2$;

iii) si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est la restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

3.4.5 PROPOSITION. (Critère de Cartan 2)– *Une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$*, de forme de Killing* B*, est résoluble si et seulement si* $B(\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$*.*

Démonstration. La CN découle du théorème de Lie et du fait que $\mathfrak{b}_n.\mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}} \subset \mathfrak{b}_n^{\mathrm{nilp}}$. Réciproquement, supposons seulement que $B(D\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}) = 0$. Par Cartan 1, $\mathrm{ad}(D\mathfrak{g})$ est alors une sous-algèbre de Lie résoluble de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Comme $Ker(\mathrm{ad})$ est abélienne, $D\mathfrak{g}$ est donc résoluble, donc $\mathfrak{g}$ également. □

Le théorème suivant caractérise les algèbres de Lie semi-simples en fonction de leur forme de Killing.

3.4.6 THÉORÈME. (É. Cartan)– *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre de Lie, de forme de Killing* B*, de centre* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

ii) B *est une forme bilinéaire non dégénérée.*

iii) $\mathfrak{g}$ *est une somme directe d'idéaux, qui sont des algèbres de Lie simples.*

iv) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$*, et la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *est somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. D'après Cartan 1, l'image par ad de l'orthogonal $\mathfrak{g}^\perp$ de $\mathfrak{g}$ relativement à B est résoluble, donc $\mathfrak{g}^\perp$ l'est aussi. Puisque $\mathfrak{g}$ est supposée semi-simple, l'idéal résoluble $\mathfrak{g}^\perp$ doit être nul. Or $\mathfrak{g}^\perp$ est le noyau de B, donc B est non dégénérée.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ L'orthogonal $\mathfrak{h}^\perp$ de tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est un idéal, qui, sous (ii), a pour dimension la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après Cartan 1, $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$ est résoluble. Supposons que $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$ sont non nul et soit $\mathfrak{r} = D^k(\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h})$ le dernier membre non nul de la suite dérivée de $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h}$. C'est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, donc pour $X \in \mathfrak{r}$, et tout $Y \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y$ de $\mathfrak{g}$ envoie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}$ dans 0, donc est de carré nul, et en particulier de trace nulle. Ainsi $X \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$, ce qui contredit la non nullité de $\mathfrak{r}$ et montre que l'hypothèse $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \{0\}$ était absurde. Il s'ensuit que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp$. De plus, la forme de Killing de $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, car c'est la restriction de B à $\mathfrak{h}$, qui ne rencontre $\mathfrak{h}^\perp$ qu'en 0. Idem pour $\mathfrak{h}^\perp$. En itérant, on obtient donc une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{h}_s$ en somme directe orthogonale d'idéaux de $\mathfrak{g}$ qui n'admettent pas d'idéaux propres, et qui ne peuvent être de dimension 1 (car un facteur de dimension 1 serait contenu dans $\mathfrak{g}^\perp$) ; ce sont donc des algèbres de Lie simples.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sous (iii), $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \oplus_i \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_i)$ est nul puisque les $\mathfrak{h}_i$ sont des algèbres de Lie simples ; comme ce sont des idéaux de $\mathfrak{g}$, ce sont des sous-représentations de ad, et comme aucune n'a d'idéal propre, c'en sont des sous-représentations irréductibles.

$iv) \Rightarrow i)$ Comme une sous-représentation de ad est un idéal de $\mathfrak{g}$, et est irréductible si et seulement si c'est un idéal simple ou de dimension 1, (iv) implique que $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples. Comme une somme directe d'algèbres de Lie semi-simples est semi-simple, on conclut que $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

□

Comme une algèbre de Lie simple coïncide avec son idéal dérivé, on déduit de (iii)

3.4.7 LEMME.– *Si* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, alors* $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$.

Il existe cependant des algèbres de Lie vérifiant cette propriété sans être semi-simples.

3.4.8 *Algèbres de Lie réductives.* En adaptant les arguments du théorème de Cartan, on peut montrer l'équivalence des propriétés suivantes pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

i) Le radical $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ est réduit à son centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
ii) $D\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.
iii) $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples ou abéliens.
iv) La représentation adjointe est somme directe de sous-représentations irréductibles.

Une algèbre de Lie qui vérifie ces propriétés est dite *réductive.* Leur principale vertue est de décomposer l'algèbre de Lie en une partie semi-simple et une partie abélienne.

Exercice. – Démontrer l'équivalence entre les propriétés précédentes.

Nous verrons ci-dessous que toutes les algèbres de Lie des groupes compacts sont réductives. Un exemple non-compact est donné $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ (cf un exercice ci-dessous ou le TD).

3.4.9 Remarque (Classification). Le quotient d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par son radical $\mathfrak{r} = rad(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie semi-simple, et on peut montrer (théorème de Levi) qu'il existe une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ (qui n'est en général pas un idéal de $\mathfrak{g}$) supplémentaire de $\mathfrak{r}$ dans $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = rad(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}.$$

Attention, la somme directe est une somme d'espaces vectoriels *pas* d'algèbres de Lie ! Elle exhibe cependant $\mathfrak{g}$ comme le produit semi-direct de son radical $rad(\mathfrak{g})$ par $\mathfrak{h}$ (puisque $rad(\mathfrak{g})$ est un idéal).

Le théorème de Cartan ramène donc essentiellement l'étude des algèbres de Lie à celle des algèbres de Lie simples. Pour $K = \mathbb{C}$, celles-ci ont été entièrement classifiées :

THÉORÈME. – *A cinq exceptions près*[74]*, toute algèbre de Lie complexe simple est du type* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), n \geqslant 2$, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), n \geqslant 3, n \neq 4$, *ou* $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$.

On dispose d'une classification similaire, mais bien sûr plus longue[75], pour $K = \mathbb{R}$.

Exercice. – Démontrer que $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ est réductive (on pourra utiliser que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est simple).

Exercice. – Montrer que la représentation adjointe d'une algèbre de Lie simple est irréductible.

3.4.10 Remarque (Lien avec les groupes). La terminologie que nous avons introduite pour les algèbres de Lie en induit une pour les groupes de Lie *connexes.* On dit que G est nilpotent, résoluble, semi-simple, simple, réductif (cf. ci-desssous) si $\mathrm{Lie}(G)$ l'est. Cette nomenclature ne suffit pas tout à fait pour obtenir une classification des groupes de Lie linéaires, car plusieurs groupes de Lie connexes partagent la même algèbre de Lie (par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Cependant, on montre que toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un *unique* groupe de Lie connexe et *simplement connexe* (pas nécessairement linéaire, cependant), d'où une classification pour ce type de groupes. Voici un exemple frappant de lien entre les propriétés du groupe et celles de son algèbre de Lie (non démontré ici).

3.4.11 THÉORÈME.– *Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{g}$. Si G est compact, $\mathfrak{g}$ est réductive et la forme de Killing de $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est définie négative.*

Réciproquement, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple et si sa forme de Killing est définie (négative ou positive), G est compact.

En particulier si G est un groupe de Lie compact, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la somme directe $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$.

Dans la même veine, on peut montrer que les algèbres de Lie semi-simples s'intégrent en un groupe de Lie linéaire. Notons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{f \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R}),\ f([x, y]) = [f(x), f(y)]\}$ le groupe des isomorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.

3.4.12 THÉORÈME.– *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple (sur $\mathbb{R}$).*

i) Alors $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathbb{R})$ *et de plus,* $\mathfrak{g} \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ *; autrement dit $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

ii) Si la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est définie (négative ou positive), alors $\mathrm{Aut}(G)$ *est compact.*

Démonstration. Ce théorème sera démontré en TD. Les points importants sont les lemmes suivants

i) Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{O}(B)$ le groupe orthogonal de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

74. donnant lieu aux algèbres de Lie dîtes exceptionnelles appelées E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2

75. par exemple, $\mathfrak{su}(n)$ aussi est simple

ii) L'algèbre de Lie des dérivations $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie est l'algèbre de Lie

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$$

du groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

iii) Rappelons que le morphisme ad se factorise au travers de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, le morphisme d'algèbre de Lie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

En particulier, si B est définie, alors $\mathrm{O}(B) \cong \mathrm{O}(n)$ est compact et donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ aussi. □

Exercice. – Soit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{s}$ une algèbre de Lie de dimension finie avec $\mathfrak{a}$ abélienne et $\mathfrak{s}$ semi-simple.

i) Montrer qu'il existe un groupe de Lie compact, connexe A tel que $\mathrm{Lie}(A) = \mathfrak{a}$.

ii) En déduire qu'il existe un groupe de Lie connexe $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, qu'on peut de plus prendre compact si on suppose la forme de Killing de $\mathfrak{s}$ définie (on pourra utiliser l'exercice précédent).

De même que pour les algèbres de Lie résolubles, on peut caractériser les algèbres de Lie semi-simples par leurs représentations. On ainsi la propriété remarquable de "complète réductibilité" suivante :

3.4.13 Théorème. (H. Weyl)– *Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration. Soit V une représentation de $\mathfrak{g}$ et W une sous-représentation. On veut trouver un sous-espace supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W. Pour cela, il suffit de trouver un $\mathfrak{g}$-morphisme $p : V \longrightarrow W$ qui soit un projecteur sur W, *i.e.* $p^2 = p$ dans $\mathrm{L}(V/\mathbb{K})$, ou encore $p_{|W} = \mathrm{id}_W$. En effet on prendra $\mathrm{Ker}\, p$ comme supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W.

Munissons $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ de l'action de $\mathfrak{g}$ donnée par $X.\varphi := X \circ \varphi - \varphi \circ X$. Par définition, une application linéaire $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est un $\mathfrak{g}$-morphisme si et seulement si elle appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)^{\mathfrak{g}}$. Considérons le sous-espace $A \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ formé des φ tels que $\varphi_{|W} \in \mathbb{K}\,\mathrm{id}_W$ et le sous-espace $B \subset A$ des φ tels que $\varphi_{|W} = 0$. Ce que l'on veut montrer est :

$$A^{\mathfrak{g}} \setminus B \neq \emptyset.$$

En effet si $\varphi \in A^{\mathfrak{g}} \setminus B$, il existe $a \in \mathbb{K}^{\times}$ tel que $\varphi_{|W} = a\,\mathrm{id}_W$ et $p := a^{-1}\varphi$ est alors un projecteur $\mathfrak{g}$-équivariant sur W, comme voulu.

On constate facilement que $\mathfrak{g}A \subset B$, de sorte que A et B sont des sous-représentations de $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ dont le quotient A/B est la représentation triviale de dimension 1 de $\mathfrak{g}$. Il nous suffira donc de trouver une $\mathbb{K}$-droite $\mathfrak{g}$-stable L, supplémentaire de B dans A, puisqu'alors on aura $L \setminus \{0\} \subset A^{\mathfrak{g}} \setminus B$.

En d'autres termes, on est ramené au problème initial sauf que maintenant W est de codimension 1 dans V.

Le problème se simplifie en vertu du lemme 3.4.14 puisque toute représentation de dimension 1 est triviale.

Par récurrence sur $\dim_K(V)$, on peut supposer que W *est irréductible*. En effet, sinon on choisit $0 \neq W' \subsetneq W$, on applique l'hypothèse de récurrence à $W/W' \subset V/W'$, d'où une droite

$\mathfrak{g}$-stable L' supplémentaire de W/W' dans V/W', puis, notant V' la préimage de L' dans V (de sorte que $L' = V'/W'$), on applique à nouveau l'hypothèse de récurrence à $W' \subset V'$ pour trouver une droite $\mathfrak{g}$-stable $L \subset V'$, complémentaire de W' dans V', et donc complémentaire de W dans V.

Il nous reste donc à traiter le cas : *W irréductible de codimension 1 dans V*. Remarquons que jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $\mathfrak{g}$ semi-simple ! Quitte à remplacer $\mathfrak{g}$ par un de ses quotients (nécessairement semi-simple), on peut supposer que V est une représentation *fidèle*, *i.e.* que $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est injective. Alors le même raisonnement que pour l'implication *i)* $\Rightarrow$ *ii)* du théorème de Cartan vu précédemment montre que la forme bilinéaire B_π sur $\mathfrak{g}$ est non dégénérée. Choisissons une base $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ et notons $Y_1, \cdots, Y_n$ la base duale pour B_π. On appelle *opérateur de Casimir* de (V, π) l'endomorphisme suivant :

$$C_\pi := \sum_{i=1}^{n} \pi(X_i)\pi(Y_i) \in \mathrm{L}(V/\mathbb{K}).$$

Notons que sa trace est donnée par $\mathrm{tr}(C_\pi) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\pi(X_i)\pi(Y_i)) = \sum_{i=1}^n B_\pi(X_i, Y_i) = n$. D'après le lemme 3.4.15 ci-dessous, C_π est un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V. Comme $\pi(\mathfrak{g})V \subset W$, on a aussi $C_\pi V \subset W$, et en particulier W est stable par C_π. Puisque W est irréductible, le lemme de Schur nous dit que $C_{\pi|W}$ est soit nul, soit inversible. Comme $\mathrm{tr}(C_\pi) = \mathrm{tr}(C_{\pi|W}) = n \neq 0$, on voit que $C_{\pi|W}$ est inversible. Mais alors $\mathrm{Ker}(C_\pi)$ est le supplémentaire $\mathfrak{g}$-stable de W cherché. □

3.4.14 LEMME.– *Si $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$ (en particulier si $\mathfrak{g}$ est semi-simple), toute représentation de dimension* 1 *de $\mathfrak{g}$ est triviale.*

Démonstration. Si V est de dimension 1, et $X, Y \in \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$, alors $[X, Y](V) = 0$. Comme $\mathfrak{g}$ est engendré par les commutateurs, le lemme suit. □

3.4.15 LEMME.– *C_π est un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V.*

L'élément C_π s'appelle traditionnellement le *Casimir* de la représentation π.

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On calcule

$$\begin{aligned}
[\pi(X), C_\pi] &= \sum_{i=1}^{n} [\pi(X), \pi(X_i)\pi(Y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\pi(X), \pi(X_i)]\pi(Y_i) + \sum_{i=1}^{n} \pi(X_i)[\pi(X), \pi(Y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi([X, X_i])\pi(Y_i) + \sum_{i=1}^{n} \pi(X_i)\pi([X, Y_i]) \\
&= \sum_{i,j} B_\pi([X, X_i], Y_j)\pi(X_j)\pi(Y_i) + \sum_{i,j} B_\pi([X, Y_i], X_j)\pi(X_i)\pi(Y_j)
\end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que $B_\pi([X, X_i], Y_j) + B_\pi([X, Y_j], X_i) = 0$ pour tous i, j (associativité de B_π). □

3.5 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

On a vu que les représentations irréductibles d'une algèbre de Lie résoluble sont toutes de dimension 1. Néanmoins il en existe une infinité non dénombrable. Par exemple pour $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}$, engendrée par un élément X, se donner une représentation (V, π) revient à se donner un endomorphisme $\pi(X)$ de V. Lorsque V est de dimension 1 c'est simplement la multiplication par un $\lambda \in \mathbb{C}$. Il y a donc autant d'irréductibles que de nombres complexes...

La situation est très différente pour les algèbres de Lie semi-simples. On sait en général classifier leurs représentations irréductibles, et on montre qu'il n'y en a qu'un nombre *fini*, à *dimension fixée.*

On étudie ici l'exemple de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Celle-ci est de dimension 3, et en voici une base pratique :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le crochet y est donnée par les relations

$$[H, X] = 2X \ , \ [H, Y] = -2Y \ , \ [X, Y] = H \qquad (*).$$

La forme de Killing $(x, y) \mapsto 4\,\mathrm{tr}(xy)$ est non dégénérée, donnée par

$$B(H, X) = B(H, Y) = 0,\ B(X, Y) = 4, \ \text{ et } B(H, H) = 8.$$

On connait déjà 3 représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$. La triviale (de dimension 1), la standard (*i.e.* l'inclusion $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$, de dimension 2), et la représentation adjointe, de dimension 3 (qui est irréductible car $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est simple).

3.5.1 THÉORÈME.– *Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe une représentation irréductible (V_m, π_m) de dimension $m + 1$, et celle-ci est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Soit $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V/\mathbb{C})$ une représentation irréductible, λ_0 une valeur propre de $\pi(H)$, de partie réelle *minimale*, et v_0 un des vecteurs propres correspondant. De la relation

$$H(X.v_0) = X(H.v_0) + [H, X].v_0 = X(\lambda_0 v_0) + 2X(v_0) = (\lambda_0 + 2)X.v_0,$$

on déduit que si si $v_1 = X.v_0$ n'est pas nul, c'est un vecteur propre pour H, de valeur propre $\lambda_1 = \lambda_0 + 2$. En itérant, on obtient une suite $\{v_j, j = 0, ..., m\}$ de vecteurs propres à valeurs propres distinctes, où m désigne le plus grand entier tel que $v_m \neq 0$. Alors, le sous-espace vectoriel W engendré par les v_j est stable sous H et X, mais aussi sous Y car

$$H(Y.v_0) = Y(H.v_0) + [H, Y].v_0 = (\lambda_0 - 2)Y.v_0,$$

donc $Y.v_0 = 0$ par minimalité de λ_0, tandis qu'on vérifie par récurrence sur j, à partir de la relation $YX = XY - H$, que $Y.v_j = -j(\lambda_0 + j - 1)v_{j-1}$. Par conséquent, $W = V$. De plus, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = D\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, donc $\mathrm{tr}(\pi(H)) = 0$, d'où $\lambda_0 = -m$, et π est finalement donnée dans la base $\{v_j\}$ de V par

$$\pi(H)(v_j) = (2j - m)v_j \ , \ \pi(X)(v_j) = v_{j+1} \ , \ \pi(Y)(v_j) = j(m - j + 1)v_{j-1} \ ,$$

ou encore, dans la base $\{w_j = v_j/[m(m-1)...(m-j+1)]\}$ par

$$\pi(H)(w_j) = (2j-m)w_j \ , \ \pi(X)(w_j) = (m-j)w_{j+1} \ , \ \pi(Y)(w_j) = jw_{j-1} \ .(*)$$

Ceci montre l'unicité. Pour l'existence, il faut d'abord vérifier que les relations ci-dessus définissent bien une représentation (*i.e.* $\pi([x,y]) = [\pi(x),\pi(y)]$ pour tous x,y) ce qui est élémentaire. Il faut ensuite vérifier que cette représentation est bien irréductible. Or toute sous-représentation non nulle $W \subset V$ doit contenir un vecteur propre pour H, *i.e.* l'un des v_j. Mais alors les actions de X et Y montrent que W contient tous les v_j. □

Remarque. – Nous mentionnerons au chapitre suivant un modèle plus conceptuel pour ces représentations (V_m,π_m), en termes de dérivations de l'espace des polynômes homogènes à 2 variables de degré m. On peut aussi montrer que π_m est la représentations "puissance symétrique m-ème" de la représentation standard π_1. Plus précisément, on définit une représentation de $\mathfrak{g}$ sur le produit tensoriel $V_1 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$ (m facteurs) en posant $\dot{X}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) := \sum_{i=1}^n v_1 \otimes \cdots \otimes Xv_i \otimes \cdots \otimes v_m$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ agit par permutation des facteurs, et les invariants $(V_1 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_1)^{\mathfrak{S}_m}$ sont stables sous $\mathfrak{g}$ et forment une sous-représentation irréductible isomorphe à (V_m,π_m). Vu le Théorème de complète réductibilité de Weyl, on peut finalement énoncer : *toute représentation complexe de dimension finie de* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *est isomorphe à une somme directe de puissances symétriques de la représentation standard.*

Remarque. – $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ possède aussi des représentations irréductibles de dimension infinie, dont la classification est aussi connue. De telles représentations ne sont pas des objets si exotiques, et ont leur importance en physique et en théorie des nombres.

4 Retour aux groupes : représentations et analyse harmonique

4.1 Représentations (généralités)

4.1.1 DÉFINITION.– *Soit G un groupe topologique. Une* représentation [76] continue *de G est une paire (V, ρ) formée d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach V et d'un homomorphisme de groupes topologiques $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$.*

Lorsque V est de dimension finie [77], se donner ρ revient à se se donner une action continue $G \times V \longrightarrow V$ telle que pour tout g, l'application $\rho(g) : v \mapsto gv$ soit $\mathbb{K}$-linéaire.

Sous-entendant ρ, on dit souvent que V est une représentation de G, et on écrit l'action de G que ρ induit sur V sous la forme $\rho(g)(v) = \rho(g)v = g.v = gv$.

4.1.2 *Vocabulaire de base.* Un vecteur v de V est dit *invariant* si $gv = v$ pour tout g dans G ; notation : $v \in V^G$.

Un $\mathbb{C}$-ss-ev W de V est dit *stable sous G* si gw appartient à W pour tout $(g, w) \in G \times W$. Lorsque W est fermé dans V (automatique si V est de dimension finie), on dit que (W, ρ) est une *sous-représentation* de (V, ρ). Dans ce cas le quotient V/W est naturellement muni d'une action linéaire continue de G que l'on appelle *représentation quotient.*

On dit que ρ est *irréductible* (parfois on précise *topologiquement irréductible*) s'il n'existe aucun sous-espace *fermé* W de V stable sous G et distinct de $\{0\}$ et de V.

Si V et W sont deux représentations continues de G, leur somme directe est la représentation $V \oplus W$ définie par $g.(v \oplus w) = gv \oplus gw$. Si une représentation V est somme directe de deux sous-représentations propres, on dit qu'elle est *décomposable.* Noter qu'une représentation indécomposable n'est pas forcément irréductible [78].

Exercice. – On considère la représentation standard de $\mathrm{B}_n^{nil}(\mathbb{K})$, c'est à dire celle induite par l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$. Démontrer que cette représentation est indécomposable, mais pas irréductible.

Un *morphisme* entre deux représentations V et W de G est un homomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire continu $\varphi : V \to W$ tel que $\varphi(g.v) = g.\varphi(v)$ pour tout $(g, v) \in G \times V$. On dit aussi que φ est G-linéaire, ou que c'est un G-morphisme, ou encore que φ entrelace V et W. Les représentations V et W sont dites *équivalentes* (ou simplement *isomorphes*) s'il existe un G-isomorphisme bi-continu de l'une vers l'autre (son inverse est encore un G-morphisme).

4.1.3 *Représentations unitaires.* Si V est un espace de Hilbert on dit que ρ est *unitaire* si $\rho(G)$ est contenu dans $\mathrm{U}(V)$. Plus généralement, une représentation continue est dite *unitarisable* si elle est équivalente à une représentation unitaire.

Exemple. – Si G est fini, toute représentation (V, ρ) de dimension finie de G est unitarisable. En effet, il nous faut trouver un produit scalaire hermitien $\Psi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ qui soit G-invariant, *i.e.* tel que $\rho(G) \subset \mathrm{U}(\Psi)$, ou encore tel que $\Psi(gv, gw) = \Psi(v, w)$ pour tous $g \in G$

76. sous-entendue linéaire

77. en dimension infinie, une application continue $G \times V \longrightarrow V$ telle que $v \mapsto gv$ soit linéaire définit bien une application de G dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$. Mais cette application n'est a priori continue que si on munit $\mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ de la topologie compacte-ouverte, qui, comme V n'est plus localement compact, n'est pas celle de la convergence en norme. Nous verrons que cela suffit cependant dans le cas L^2 pour définir des représentations intéressantes.

78. nous verrons que c'est cependant le cas pour des représentations de groupes semi-simples

et $v, w \in V$. Or, si Φ est un produit scalaire hermitien quelconque, la forme sesquilinéaire Ψ définie par $\Psi(v,w) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi(gv,gw)$ est un produit hermitien G-invariant comme voulu.

Nous généraliserons ceci aux groupes compacts plus loin. En attendant, un des intérêts des représentations unitaires est le lemme suivant

4.1.4 LEMME.– *Soit (V,ρ) une représentation unitaire d'un groupe de Lie G. Si $W \subset V$ est un sous-espace fermé*[79] *et stable, alors $W^\perp$ est fermé stable et on a $V = W \oplus W^\perp$. En particulier,* tout sous-espace fermé stable admet un supplémentaire fermé stable.

Démonstration. Exercice. □

On en déduit qu'une représentation unitaire est indécomposable si et seulement si elle est irréductible. Une représentation unitaire de dimension finie est alors *complètement réductible* (*i.e.* somme directe de sous-représentations irréductibles).

4.2 Représentations de dimension finie et représentations de l'algèbre de Lie

Comme on peut s'y attendre, la théorie est plus commode en dimension finie. On a notamment le

LEMME. (Lemme de Schur) – *Soient V et W deux représentations complexes irréductibles de dimension finie d'un groupe quelconque G, et φ un G-morphisme non identiquement nul de V vers W . Alors,*
i) φ est un isomorphisme ;
ii) si $V = W$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\varphi = \lambda.id_V$.

Démonstration. Le noyau (resp. l'image) de φ est un sous-espaces invariant de V (resp. W). L'irréductibilité de ces représentations entraîne la première assertion. Sous les hypothèses de la seconde, φ admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ (qui est algébriquement clos), et il suffit d'appliquer la première assertion au G-morphisme $\varphi - \lambda id_V$. □

Remarque. (Représentations réelles) – On peut noter que la première assertion dans le lemme de Schur est encore vraie pour les représentations irréductibles *réelles.* Dans ce cas, le sous-espace des G-morphismes d'une représentation irréductible (ρ, V) sur elle-même n'est pas nécéssairement réduit aux homothéties :

Exercice. – Notons $\mathrm{Hom}_G(\rho_1,\rho_2)$ le sous-espace des G-morphismes d'une représentation *réelle* irréductible (ρ_1, V_1) sur une représentation *réelle* irréductible (ρ_2, V_2).

i) Montrer que $\mathrm{Hom}_G(\rho_1,\rho_2) \neq 0$ si et seulement si V_1 et V_2 sont équivalentes, puis montrer que $\mathrm{Hom}_G(\rho_1,\rho_1)$ est un corps (non-commutatif).

ii) Montrer que $\rho : \theta \mapsto \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$ est une représentation irréductible $\mathbb{R}$-linéaire de dimension 2 de S^1. Montrer que $\mathrm{Hom}_{S^1}(\rho,\rho)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$.

iii) On prend $G = \mathrm{SU}(2) \subset GL(2,\mathbb{C})$. Soit H le sous espace vectoriel réel $\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{bmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^4$. On fait agir $\mathrm{SU}(2)$ sur H par multiplication à gauche. Montrer que cette représentation est irréductible et calculer $\mathrm{Hom}_{SU(2)}(H,H)$.

79. c'est automatique en dimension finie

4.2.1 *Représentations dérivées.* Supposons que G est un groupe de Lie linéaire, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. D'après le paragraphe 2.2.3, toute représentation continue ρ comme ci-dessus induit une représentation $d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V/\mathbb{K})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. De manière explicite, on a la formule

$$d\rho(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (t \mapsto \rho(\exp(tX)))\,.$$

La théorie des représentations de G et celle de $\mathfrak{g}$ s'éclairent mutuellement. Pour les groupes connexes, elles sont mêmes étroitement reliées. On a par exemple le lemme suivant :

Lemme. – *Supposons G connexe. Alors*

i) un sous-espace W de V est stable par $\rho(G)$ si et seulement si il est stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. En particulier, (V,ρ) est irréductible si et seulement si $(V, d\rho)$ est irréductible.

ii) un sous-espace W de V stable par $\rho(G)$ admet un supplémentaire stable par $\rho(G)$ si et seulement si il en admet un stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. En particulier, (V,ρ) est indécomposable si et seulement si $(V, d\rho)$ est indécomposable.

Démonstration. i) Le sens $\Rightarrow$ découle de la définition de $d\rho$. Réciproquement, supposons W stable par $d\rho(\mathfrak{g})$. Alors l'égalité $\rho \circ \exp_G = \exp_{\mathrm{GL}(V)} \circ\, d\rho$ montre que W est stable par $\rho(\exp_G(\mathfrak{g}))$. Mais puisque G est connexe, il est engendré par l'image de $\exp_G$, et W est donc stable par $\rho(G)$. ii) découle de i). $\square$

Voici un corollaire remarquable.

Corollaire. – *Si G est un groupe semi-simple, toute représentation de dimension finie de G est complètement réductible.*

Démonstration. Vu le lemme précédent, cela découle du théorème de complète réductibilité de Weyl pour les algèbres de Lie semi-simples. $\square$

Notons que cela s'applique en particulier aux groupes "classiques" (spéciaux linéaires, symplectiques, spéciaux unitaires, spéciaux orthogonaux). Dans le même ordre d'idées, voici un résultat utile dans un but de classification :

Lemme. – *Si $(V_1,\rho_1), (V_2,\rho_2)$ sont deux représentations de dimension finie d'un groupe de Lie connexe G, alors ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes si et seulement si les représentations $d\rho_1$ et $d\rho_2$ (de l'algèbre de Lie associée) le sont.*

En particulier, une représentation ρ d'un groupe connexe G est irréductible si et seulement si $d\rho$ l'est. Ces dernières sont souvent plus faciles à déterminer.

Démonstration. Par définition un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ est une équivalence de ρ_1 sur ρ_2 si pour tout $g \in G$ on a $\rho_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho_1(g)$, et une équivalence de $d\rho_1$ sur $d\rho_2$ si pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a $d\rho_2(X) \circ \varphi = \varphi \circ d\rho_1(X)$. Par le yoga maintenant habituel de l'exponentielle, ces deux conditions sont équivalentes. $\square$

En guise d'application, nous allons revisiter les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et en déduire une classification des représentations continues irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

4.2.2 *Classification des représentations irréducibles de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *et groupes affiliés.* Soient m un entier $\geqslant 0$ et V_m l'espace des polynômes homogènes de degré m en deux variables, à coefficients dans $\mathbb{C}$. Comme tout sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, le groupe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ admet une représentation naturelle ρ_m sur V_m, donnée, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G et $P = P(x,y)$ dans V_m par

$$\rho_m(g)(P) = g.P, \text{ avec } (g.P)(x,y) = P(ax+cy, bx+dy).$$

Autrement dit $g.P(x,y) = P({}^tg.(x,y))$ où $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}^2$ de manière standard (la transposée ${}^tg$ dans la formule est utilisée ici pour garder une action à gauche ; on aurait aussi pu prendre l'invese de g). Si on regarde des actions à droite, alors on peut utilisr la formule $(P.g)(x,y) = P(g.(x,y)) = P(ax+by, cx+dy)$.

Notons que V_m est de dimension $m+1$.

Théorème. – *Les représentations $\rho_m, m \in \mathbb{N}$ sont irréductibles, deux à deux non isomorphes, et toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *est isomorphe à l'une d'elles.*

Démonstration. Soit $d\rho_m : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V_m/\mathbb{C})$ la représentation dérivée de ρ_m. Reprenons la base (H,X,Y) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Par définition de ρ_m, on a les formules $\rho_m(e^{tH})(P(x,y)) = P(e^tx, e^{-t}y)$, $\rho_m(e^{tX})(P(x,y)) = P(x;tx+y)$ et $\rho_m(e^{tY})(P(x,y)) = P(x+ty,y)$, de sorte que

$$d\rho_m(H)(P) = (x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y})(P),\ d\rho_m(X)(P) = x\frac{\partial}{\partial y}(P),\ d\rho_m(Y)(P) = y\frac{\partial}{\partial x}(P).$$

Dans la base $\{P_j(x,y) = x^jy^{m-j}, j = 0,...,m\}$ de V_m, on a donc :

$$d\rho_m(H)(P_j) = (2j-m)P_j\ ,\ d\rho_m(X)(P_j) = (m-j)P_{j+1}\ ,\ d\rho_m(Y)(P_j) = jP_{j-1} \quad (**).$$

On reconnait là les formules donnant l'action de $\mathfrak{g}$ sur la représentation π_m du théorème 3.5.1. On en déduit l'irréductibilité de $d\rho_m$ et donc celle de ρ_m. Réciproquement, si (V,ρ) est une représentation irréducible de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, alors d'après le théorème 3.5.1, il existe m tel que $d\rho \simeq \pi_m = d\rho_m$. D'après le lemme ci-dessus, cela implique que $\rho \simeq \rho_m$. □

Notons que V_0 est la représentation triviale, V_1 la représentation standard, et V_2 la représentation adjointe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Remarquons enfin que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, tout comme $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, possède aussi des représentations irréductibles de dimension infinie. Il n'y a néanmoins pas de relation aussi simple entre les représentations de dimension infinie du groupe et celles de son algèbre de Lie.

Considérons maintenant le quotient $G' = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ de $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par son centre $\{\pm I_2\}$. (Noter que contrairement à G, G' n'est pas simplement connexe.) Une représentation irréductible $\rho' : G' \to \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ de G' fournit par composition une représentation, encore irréductible, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ de G telle que $\rho(-I_2) = \mathrm{id}_V$. Inversement, une telle représentation de G passe au quotient par $\{\pm I_2\}$, et définit une représentation ρ' de G'. Comme $\rho_m(-I_2) = \mathrm{id}_{V_m}$ si et seulement si m est pair. On en déduit :

Corollaire. – *Toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $G' = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ *est isomorphe à une (et une seule) des représentations* $\rho'_{2m}, m \in \mathbb{N}$.

Passons aux sous-groupes fermés connexes $G = SU_2(\mathbb{C})$ et $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Le premier est compact et simplement connexe, le second ni l'un ni l'autre, mais on va les traiter de la même manière, car leurs algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ *engendrent chacune* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *sur* $\mathbb{C}$. Si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V/\mathbb{C})$ est une représentation complexe irréductible de G, sa représentation dérivée $d\rho$ s'étend par $\mathbb{C}$-linéarité en une représentation $\pi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V/\mathbb{C})$ encore irréductible, car si W est un $\mathbb{C}$-sous-espace de V stable sous π, il sera a fortiori stable sous $d\rho$, donc aussi sous ρ. D'après le théorème 3.5.1, $d\rho$ est donc isomorphe à la restriction à $\mathfrak{g}$ d'une des représentations $\pi_m = d\rho_m$. Ainsi, $d\rho = d(\rho_{m|G})$, et par connexité de G, ρ est isomorphe à la restriction à G de ρ_m. On a donc obtenu

Corollaire. – *Toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $G = \mathrm{SU}(2)$ *ou* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *est isomorphe à une (et une seule) des représentations* $(\rho_m)_{|G}, m \in \mathbb{N}$.

Terminons par le groupe $G' = SO_3(\mathbb{R})$. On a déjà exhibé un isomorphisme $\mathrm{SU}_2/\{\pm I_2\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, d'où un plongement $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. On en déduit

Corollaire. – *Toute représentation continue irréductible de dimension finie de* $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *est isomorphe à une (et une seule) des représentations* $(\rho'_{2m})_{|G}, m \in \mathbb{N}$.

4.3 Mesures de Haar

Dans cette partie, nous donnons quelques notions élémentaires sur les mesures de Haar, qui permettent de ramener l'étude des représentations des groupes compacts à celle des représentations unitaires. Les seuls résultats dont nous aurons vraiment besoin sont donnés dans le paragraphe suivant.

4.3.1 *Notions de Mesures de Haar.* Soit X un espace localement compact, métrisable. Notons $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à support compact, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Une *mesure* sur X est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ qui est positive sur les fonctions positives ; elle est alors automatiquement continue : c'est en particulier une *distribution* sur X. Il est d'usage de noter l'évaluation d'une mesure μ sur une fonction f de l'une des manières suivantes :

$$\mu(f) = \langle \mu, f \rangle = \int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Si un groupe G agit sur X, il agit sur les fonctions par la formule $(g.f)(x) := f(g^{-1}x)$, et dualement sur les formes linéaires et les mesures par la formule $g\mu(f) := \mu(g^{-1}f)$, ce que l'on peut aussi noter

$$g\mu(f) = \langle g\mu, f \rangle = \langle \mu, g^{-1}f \rangle = \int_X g^{-1} f d\mu = \int_X f(gx) d\mu(x).$$

Comme d'habitude, on dit que la mesure μ est invariante par G si $\mu = g\mu$ pour tout $g \in G$. Il n'existe pas toujours de mesure invariante sur X, et lorsqu'il en existe elles sont rarement uniques. Mais voici un cas particulier très utile.

4.3.2 Théorème.– *Supposons* $X = G$*, l'action étant la multiplication à gauche. Alors il existe une mesure* G*-invariante sur* X*, et elle est unique à multiplication par un réel positif près.*

Nous admettrons ce résultat dans le cas général (nous donnons une preuve dans le cas compact dans le paragraphe 4.3.9). On peut l'obtenir comme conséquence d'un théorème de point fixe d'analyse fonctionnelle, dû à Markov et Kakutani. Dans le cas d'un groupe de Lie, on peut utiliser des techniques de géométrie différentielle qui relient mesures sur une variété et sections du fibré des formes différentielles de degré maximal, il reste alors à voir que ce dernier fibré est trivialisable dans le cas d'un groupe de Lie, voir la remarque culturelle 4.3.1.

Une mesure comme dans le théorème est appelée *mesure de Haar à gauche* sur G. De même il existe des mesures de Haar *à droite* (relatives à l'action de G sur lui-même par multiplication à droite), qui sont toutes égales à un facteur près. En général, une mesure de Haar à gauche ne l'est pas à droite. Voici cependant un résultat notable (la preuve n'est pas au programme mais ses grandes lignes en sont données dans le paragraphe 4.3.5) :

4.3.3 Théorème.– *Si G est compact, ou si G est un groupe de Lie réductif, toute mesure de Haar à gauche est aussi mesure de Haar à droite et est de plus invariante par passage à l'inverse.*

Dans le cas où G est compact, il est d'usage de normaliser la mesure de Haar de sorte que $\mu(G) := \mu(1_G) = 1$.

Exemple. – Voici quelques exemples de mesures de Haar.
— pour le groupe additif $G = \mathbb{R}^n$, la mesure de Lebesgue $dx_1 \cdots dx_n$;
— pour le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*)^n$, la mesure $\mu = \frac{dx_1}{x_1}\frac{dx_2}{x_2}\cdots\frac{dx_n}{x_n}$
— pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ni x = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la mesure $\mu = \det(x)^{-1}dx_{11}dx_{12}\cdots dx_{nn}$
— pour G fini, $\mu = |G|^{-1}\Sigma_{x\in G}\delta_x$, où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x ;
— pour $G = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\right\}$, $\mu = \frac{d\theta}{2\pi}$.

Remarque culturelle. (Existence d'une mesure de Haar pour un groupe de Lie linéaire) – Si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est fermé, c'est une variété lisse et la multiplication et l'inverse sont de classe C^∞, *cf.* la remarque culturelle consécutive au théorème 2.2.7. On a alors que l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G)$ s'identifie à l'espace tangent T_eG du groupe en l'identité (l'identification est encore une fois donnée par l'exponentielle $t \mapsto \exp(tX)$). Il suit

4.3.4 Lemme.– *Il y a un isomorphisme entre l'algèbre de Lie* $\mathrm{Lie}(G)$ *est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G, donné par*

$$\mathrm{Lie}(G) \ni X \mapsto \big(\xi_X : g \mapsto \xi_X(g) = g\cdot X\big).$$

De même une forme différentielle ω G-invariante à gauche vérifie

$$\omega_g(\xi_{X_1},\ldots,\xi_{X_k}) = \omega_e(X_1,\ldots,X_k)$$

et est entiérement déterminée par sa valeur en l'élément neutre e. Réciproquement, la formule ci-dessus étant toute forme linéaire $\omega : \mathrm{Lie}(G) \to \mathbb{R}$ en une forme différentielle invariante à gauche.

Proposition. – *Soit une forme différentielle ω de degré* $\dim(G)$*, invariante à gauche et non-nulle. Alors $|\omega|$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur G.*

Démonstration. En effet, $\gamma_g^*(\omega) = \omega$ (où γ_g est l'opérateur de translation à gauche, cf exemple 1.1.2). D'où

$$\int_G f(gx)|\omega|dx = \int_G f(x)|\omega|dx$$

pour toue finction continue à support compact sur G. En coordonnées locales, en notant $d := \dim(G)$, on vérifie que l'on peut prendre $|\omega|dx = |\mathrm{Jac}(\gamma_x)|^{-1}dx_1 \ldots dx_d$ où $\mathrm{Jac}(\gamma_\mathrm{x})$ désigne la matrice Jacobienne de l'opérateur de multiplication à gauche et $x_1, \ldots, x_d$ les coordonnées dans $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathbb{R}^d$. □

(*Fin de la remarque culturelle*)

4.3.5 *Module d'une mesure de Haar. Attention : ce paragraphe est hors-programme !*
Soit μ une mesure de Haar invariante à gauche sur G. Pour tout $g \in G$, on obtient la forme linéaire

$$f \mapsto \int_G f \circ \mathrm{Ad}_g(x)\mu(dx)$$

qui est également une mesure invariante à gauche (puisque μ l'est). Il suit du théorème 4.3.2 qu'il existe un unique nombre réel positif $\chi(g)$ tel que

$$\int_G f \circ \mathrm{Ad}_g(x)\mu(dx) = \chi(g) \int_G f(x)\mu(dx). \tag{4.3.5.1}$$

On montre

4.3.6 LEMME.– *On a $\int_G f \circ (xg^{-1})\mu(dx) = \chi(g) \int_G f(x)\mu(dx)$ et de plus $\chi : G \to]0, +\infty[$ est un morphisme de groupes continus, appelé le module de G.*

Démonstration. La première égalité découle de la définition de $\chi(g)$ et du fait que la mesure est de Haar à gauche. La multiplicativité découle du fait que $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$. Pour la continuité de χ, on utilise qu'il existe f continue à support compact, de mesure égale à 1, donc telle que $\chi(g) = \int_G f(xg^{-1})\mu(dx)$. Comme f est continue à support compact, elle est uniformément continue et il en résulte que χ est continue. □

La première égalité du Lemme indique que le module mesure le défaut pour une mesure de Haar à gauche pour être également une mesure de Haar à droite (c'est à dire invariante pour l'action de G donnée par la multiplication à droite par g^{-1}). En fait, on peut montrer $\chi(x^{-1})\mu(dx)$ est une mesure de Haar à droite (si $\mu(dx)$ est de Haar à gauche) :

4.3.7 LEMME.– *La mesure $\chi(x^{-1})\mu(dx)$ est une mesure de Haar invariante à droite pour G et de plus, pour toute application continue f à support compact, on a*

$$\int_G f(x^{-1})\mu(dx) = \int_G f(x)\chi(x^{-1})\mu(dx).$$

Démonstration. Exercice. □

Par ailleurs, l'image du module χ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Remarque. (Unicité d'une mesure de Haar) – Si on ne suppose l'unicité d'une mesure de Haar (mais juste son existence), et que l'on prend f positive, à support compact, de mesure 1, la formule (4.3.5.1) permet encore de définir le module $\chi(g) \in \mathbb{R}_+^*$. Ce nombre dépend à priori de f. En utilisant que la mesure est de Haar et des arguments similaires à ceux du Lemme 4.3.6, on peut montrer que la formule (4.3.5.1) est alors vraie pour toute fonction mesurable h (et donc que le module est indépendant de la fonction f choisie pour le définir). On peut alors utiliser le Lemme 4.3.6 pour démontrer l'unicité d'une mesure de Haar, c'est à dire l'unicité dans le Théorème 4.3.2.

4.3.8 LEMME.– *Si G est un groupe de Lie compact ou semi-simple ou bien encore à la fois connexe et nilpotent, alors $\chi(g) = 1$ (pour tout $g \in G$). Un tel groupe est dit unimodulaire (puisque son module est constant).*

La première formule du lemme 4.3.6 garantit donc que si G est unimodulaire, la mesure de Haar invariante à gauche est aussi invariante à droite.

Démonstration. Si G est compact, son image par χ est un sous-groupe compact de $]0, +\infty[$, donc réduit au neutre $\{1\}$.

Soit G un groupe de Lie, alors la formule pour la mesure de Haar donnée dans la remarque 4.3.1 assure que

$$\chi(g) = |\det(\mathrm{Ad}_{g^{-1}})|$$

qui résulte essentiellement du fait que $\mathrm{Ad}_g^*(\omega) = \det(\mathrm{Ad}_g)\omega$ pour toute forme différentielle de degré $\dim(G)$.

Comme la forme de Killing de G est Ad-invariante, lorsque G est semi-simple, $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{O}(B)$ est orthogonal, donc $|\mathrm{Ad}_g| = 1$ et le résultat en découle.

Enfin, si G est nilpotent, $\mathrm{Ad}_{(\exp(X))} = \mathrm{id}$. Il suit que l'ensemble des éléments x de G qui vérifient $\mathrm{Ad}_x = \mathrm{id}$ est ouvert et fermé dans G, qui est connexe. □

Il suit que si G est unimodulaire (par exemple compact), la mesure de Haar sur G est invariante par passage à l'inverse (ce qui est la dernière affirmation dans le théorème 4.3.3). Cette dernière remarque conclut notre digression hors-programme sur le module d'un groupe localement compact.

4.3.9 *Une démonstration du théorème 4.3.2 dans le cas compact.. Attention : ce paragraphe est hors-programme !* On suppose dans ce paragraphe que G est compact, métrisable.

Pour un groupe fini, il est facile de construire une mesure de Haar en prenant la moyenne des mesures de Dirac. Cette idée (comme nombre d'idées ou phénomènes de type point fixe pour des groupes finis) peut s'adapter au cas compact comme suit.

Premièrement, il convient de donner un sens à moyenne, ce que l'on fait en considérant des suites de familles finies de cardinal de plus en plus grand. On note encore γ_g et δ_h les actions respectivement à gauche et à droite de G sur les fonctions $\mathcal{C}(G, \mathbb{R}) = \mathcal{C}_c(G, \mathbb{R})$ (induites par celles de G sur lui-même). Ainsi $(\gamma_g.f)x = f(g^{-1}.x)$ et $(\delta_g f)(x) = f(xg)$. Soit $I_n = (g_1, \ldots, g_n)$ une suite finie d'éléments de G. On peut prendre la moyenne de ces éléments par rapport aux actions à droite et à gauche de G sur les . On obtient les opérateurs :

$$\gamma_{I_n} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_{g_i} : \mathcal{C}(G, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(G, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \delta_{I_n} : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{g_i} : \mathcal{C}(G, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(G, \mathbb{R}).$$

Par définition, $\|\gamma_{I_n}(f)\| = \|f\| = \|\delta_{I_n}(f)\|$ pour toute famille finie, et de plus $\gamma_{I_n} \circ \delta_{J_m} = \delta_{J_m} \circ \gamma_{I_n}$ pour toute paire de familles finies. Comme G est compact, toute fonction continue f a un minimum et un maximum. Notons

$$\mathrm{diam}(f) = \max(f) - \min(f)$$

l'écart maximal entre deux valeurs possibles de f. Par définition, pour toute famille finie I_n, nous avons les inégalités :

$$\min(f) \leqslant \min(\delta_{I_n}(f)) \leqslant \max(\delta_{I_n}(f)) \leqslant \max(f), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{diam}(\delta_{I_n}(f)) \leqslant \mathrm{diam}(f). \tag{4.3.9.1}$$

Le même résultat est valide avec l'action à gauche bien entendu.

4.3.10 LEMME.– *Pour toute fonction continue $f : G \to \mathbb{R}$, on a*

$$\inf_{I_n} (\mathrm{diam}(\delta_{I_n}(f))) = 0 = \inf_{I_n} (\mathrm{diam}(\gamma_{I_n}(f))).$$

Les bornes inférieures sont prises sur l'ensemble des parties finies de G.

Démonstration. Comme les opérateurs de translation γ_{I_n}, δ_{J_m} sont des isométries et qu'une fonction continue sur G est par ailleurs bornée et uniformément continue, on a que la famille $\{\gamma_{J_m}(f),\ J_m \text{ finie dans } G\}$ est équicontinue, bornée. Elle est donc d'adhérence compacte par le théorème d'Ascoli. Il suit qu'on peut extraire une suite $(\gamma_{I_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (dans $\mathcal{C}(G,\mathbb{R})$, disons vers une certaine fonction ℓ) telle que $\mathrm{diam}(\gamma_{I_n}(f)) \longrightarrow \inf_J (\mathrm{diam}(\gamma_J(f)))$. En particulier $\mathrm{diam}(\ell) = \inf_J (\mathrm{diam}(\gamma_J(f)))$. Des inégalités (4.3.9.1) et de la définition de l'inf, on déduit alors que pour toute partie finie $J_m = (x_1 \dots, x_m)$, on a

$$\mathrm{diam}(\gamma_{J_m}(\ell)) = \mathrm{diam}(\ell) \quad \text{et} \quad \max(\gamma_{J_m}(\ell)) = \max(\ell).$$

Par suite, si ℓ atteint son maximum en $x \in G$, il l'atteint alors en tout $x_i^{-1}.x$ pour $x_i \in J_m$. En prenant une suite $(x_n)_{n\in NM}$ dense dans G, on en déduit que ℓ est constante. En particulier $\mathrm{diam}(\ell) = 0$. $\square$

La preuve du lemme nous donne, pour toute $f \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R})$, l'existence d'une suite I_n telle que $\gamma_{I_n}(f)$ converge vers une fonction constante $g \mapsto \lambda_f \in \mathbb{R}$ et de même une suite $(J_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\delta_{J_m}(f)$ converge vers une fonction constante $\beta_f \in \mathbb{R}$. Les constantes ne dépendent en fait pas des suites I_n, J_m choisies et sont en fait égales :

4.3.11 LEMME.– *Soient (I_n) et (J_m) des suites quelconques telles que $\gamma_{I_n}(f) \to \lambda_{f,(I_n)}$, $\delta_{J_m}(f) \to \beta_{f,(J_m)}$ où $\lambda_{f,(I_n)}, \beta_{f,(J_m)} \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R})$ sont des fonctions constantes. Alors*

$$\lambda_{f,(I_n)} = \beta_{f,(J_m)}.$$

Démonstration. On remarque que si c est une fonction constante, alors $\gamma_{I_n}(c) = c = \delta_{J_m}(c)$ pour toutes familles finies I_n, J_m. Par commutativité de γ_{I_n} et δ_{J_m} (et continuité des opérateurs, γ et δ), on a alors

$$\lambda_{f,(I_n)} = \lim \Big(\delta_{J_m} \circ \gamma_{I_n}(f)\Big) = \lim \Big(\gamma_{I_n} \circ \delta_{J_m}(f)\Big) = \beta_{f,(J_m)}.$$

$\square$

Comme il existe effectivement des telles suites, on obtient en particulier (en fixant par exemple une suite J_m) que les valeurs possibles pour $\lambda_{f,(I_n)}$ sont les mêmes pour toutes les suites I_n faisant converger $\gamma_{I_n}(f)$ sur une fonction constante.

On note $\mu(f)$ la valeur commune $\lambda_{f,(I_n)}$ de toutes les suites (I_n) telle que $\gamma_{I_n}(f)$ converge vers une fonction constante.

La proposition suivante démontre le théorème 4.3.2 dans le cas où G est compact, métrisable.

4.3.12 Proposition.– *On a que $f \mapsto \mu(f)$ est une mesure de Haar à gauche, normalisée*[80]*. De plus toute mesure de Haar à gauche sur G est égale à cette dernière à un multiple réel strictement positif près.*

Démonstration. Pour l'unicité, il suffit de vérifier que toute mesure de Haar normalisée ν est égale à μ. Pour une telle mesure, on a que $\nu(c) = c$ pour toute fonction constante. Si la mesure est de Haar à gauche, alors $\nu(\gamma_{I_n}(f)) = \nu(f)$ pour toute suite (I_n) de parties finies de G. En choisissant une telle que $\gamma_{I_n}(f) \to \mu(f)$, on obtient alors

$$\mu(f) = \nu(\mu(f)) = \lim\left(\nu(\gamma_{I_n}(f))\right) = \nu(f).$$

Vérifions que μ est bien une mesure de Haar à gauche. La preuve du lemme précédent montre immédiatement que pour toutes familles finies I, J :

$$\mu(\gamma_I(f) = \mu(f) = \mu(\delta_J(f)).$$

Ainsi μ est bien invariante par l'action de G. On a bien que μ est positive car si f est positive, les $\gamma_{J_m}(f)$ sont positives. Par un simple passage à la limite, on voit que $f \mapsto \mu(f)$ est stable par multiplication par un scalaire. Elle est additive car si $\mu(f) = \lim\left(\gamma_{J_m}(f)\right)$ et $\mu(g) = \lim\left(\gamma_{K_p}(g)\right)$, alors, on a

$$\mu(f) + \mu(g) = \lim(\gamma_{J_m} \circ \gamma_{K_p}(f)) + \lim(\gamma_{J_m} \circ \gamma_{K_p}(g)) = \lim(\gamma_{J_m} \circ \gamma_{K_p}(f+g)) = \mu(f+g)$$

car la suite $\gamma_{J_m} \circ \gamma_{K_p}(f+g)$ converge vers une constante par construction. Ainsi $f \mapsto \mu(f)$ est linéaire. Elle est continue car $\|(\gamma_I(f)\| \leqslant \|f\|$. □

4.4 Représentations des groupes compacts

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques propriétés des représentations des groupes compacts.

On commence par une application cruciale de l'existence d'une mesure de Haar sur un groupe compact.

4.4.1 Corollaire.– *Soit G un groupe compact, et ρ une représentation de G sur un espace de Hilbert V (par exemple sur un espace de dimension finie). Alors il existe un produit scalaire hermitien b sur V tel que $b(gv, gv) = b(v, v)$ pour tout $g \in G, v \in V$, autrement dit tel que ρ soit une représentation unitaire pour ce produit scalaire.*

Démonstration. Si $(,)$ est le produit scalaire initial sur V, alors, la forme sesquilinéaire

$$b(v, w) := \int_G (gv, gw) d\mu(g)$$

répond à la question puisque μ est une mesure de Haar à droite. C'est d'ailleurs une généralisation directe de l'argument déjà rencontré pour les groupes finis. □

Le cas où V est de dimension finie a déjà des conséquences spectaculaires :

Corollaire. – *Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est contenu dans un conjugué de $\mathrm{U}(n)$.*

80. c'est à dire que $\mu(1_G) = 1$.

Démonstration. En effet, tous les produits hermitiens sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalents, et leurs groupes unitaires sont donc conjugués. Ainsi, avec les notations de la preuve précédente, $\mathrm{U}(b)$ est conjugué à $\mathrm{U}(n)$ □

On démontre de même que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans un conjugué de $\mathrm{O}(n)$.

Corollaire. – *Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est complètement réductible.*

Corollaire. – *Si G est un groupe de Lie compact, son algèbre de Lie est réductive.*

Démonstration. Appliquer le corollaire précédent à la représentation adjointe et utiliser l'une des caractérisations des algèbres de Lie réductives, *cf* Exercice 3.4.6. □

Remarque. – Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et V^* le dual conjugué de V, *i.e.* le $\mathbb{C}$-ev des formes semi-linéaires sur V. Tout produit hermitien sur V induit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$ qui envoie v sur la forme semi-linéaire $b(v,-)$. Si maintenant (V,ρ) est une représentation de G, si le produit hermitien est G-invariant, et si l'on munit V^* de la représentation $\rho^*(g)\lambda := \lambda \circ \rho(g^{-1})$, alors l'isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$ est un G-isomorphisme. Par le lemme de Schur, il s'ensuit que *si (V,ρ) est irréductible, alors il y a un seul produit hermitien G-invariant sur V à un facteur près.*

Nous avons étudié le cas des représentations de dimension finie des groupes compacts. Le cas où V est de dimension infinie est aussi très intéressant mais utilise un peu de "théorie spectrale", et plus précisément la théorie des opérateurs autoadjoints d'un espace de Hilbert.

4.4.2 *Application aux représentations unitaires.* Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ de produit scalaire $(\,,\,)$, de norme associée $||.||$. Comme H est isomorphe à son dual topologique, tout opérateur $A \in \mathrm{L}(H/\mathbb{C})$ admet un adjoint $A^* \in \mathrm{L}(H/\mathbb{C})$ uniquement défini par les relations $(Av,w) = (v,A^*w)$ pour tout $v,w \in H$. On dit que A est *autoadjoint* si $A^* = A$. Comme en dimension finie, on vérifie que les valeurs propres d'un opérateur A autoadjoint sont réelles, et que deux sous-espaces propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Ce qui n'est pas clair en revanche, c'est si A possède effectivement des vecteurs propres.

En dimension finie, on sait qu'un endomorphisme autoadjoint (et plus généralement, normal) est diagonalisable dans une base orthonormée. Cela n'est pas vrai en général en dimension infinie. On dit qu'un opérateur A est *compact* si l'image par A de la boule unité de H est d'adhérence compacte.

Lemme. – *Soit A un opérateur* autoadjoint compact *sur un espace de Hilbert H. Alors*

i) l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ *des valeurs propres de A contient* $\pm||A||$.

ii) pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, le sous-espace propre $H(\lambda) := \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{id}_H)$ *est de dimension finie.*

iii) H est somme directe Hilbertienne $H = \widehat{\bigoplus}_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} H(\lambda)$ *des sous-espaces propres de A.*

Le point iii) signifie que la somme directe est orthogonale et dense dans H (le chapeau signifie "complétion"). On peut montrer que $\mathrm{Sp}(A)$ est au plus dénombrable et sans point d'accumulation non nul.

Démonstration. i) Choisissons une suite v_n de points de H de norme 1 tels que $|Av_n|$ tende vers $||A||$ et que Av_n admette une limite, disons w. Alors,

$$|A^2v_n - ||A||^2v_n|^2 = |A^2v_n|^2 - 2||A||^2(A^2v_n, v_n) + ||A||^4 \leqslant ||A||^4 - 2||A||^2|Av_n|^2 + ||A||^4$$

tend vers 0, donc v_n tend vers le vecteur $v := Aw/||A||^2$. On a par passage à la limite $A^2v = ||A||^2v$, ou encore $(A - ||A|| \operatorname{id}_H)(A + ||A|| \operatorname{id}_H)v = 0$, ce qui montre que soit v est vecteur propre de valeur propre $-||A||$, soit $v' := Av + ||A||v$ est vecteur propre de valeur propre $||A||$.

ii) Le sous-espace propre $H(\lambda)$ est fermé, donc un sous-espace de Hilbert de H. Si $\lambda \neq 0$, sa boule unité est égale à son image par $\frac{1}{\lambda}A$, donc est compacte ; il s'ensuit que $H(\lambda)$ est nécessairement de dimension finie.

iii) Soit F l'orthogonal de la somme des espaces propres de A. La restriction de A à F est un opérateur auto-adjoint compact. Si F est non nul, on peut lui appliquer i) d'où une contradiction. Ainsi F est nul, et par suite la somme des sous-espaces propres est dense. □

Proposition. – *Toute représentation unitaire de G se décompose en une somme directe Hilbertienne de représentations irréductibles* de dimension finie.

En particulier, une représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.

Démonstration. Il suffit de montrer que toute représentation unitaire de G contient une sous-représentation de dimension finie. En effet, la proposition suivra en appliquant ceci à l'orthogonal de la somme des sous-représentations de dimension finie (dont on sait déjà qu'elles sont sommes de sous-représentations irréductibles).

Pour le vérifier, construisons un opérateur autoadjoint compact non nul A sur V, invariant sous G, c'est-à-dire tel que $g.A := \rho(g)A\rho(g^{-1}) = A$ pour tout $g \in G$. Pour cela, soit π_v le projecteur orthogonal de V sur un vecteur v de norme 1 : $\pi_v(w) := (w, v)v$. Alors, $A = \int_G g.\pi_v = \int_G g\pi_v g^{-1} d\mu(g)$:

$$w \mapsto A(w) = \int_G (g^{-1}w, v)gvd\mu(g) = \int_G (w, gv)gvd\mu(g)$$

[car $(\,,\,)$ est G-invariant] convient : puisque μ est une mesure de Haar, il est G-invariant, il est, comme π_v, autoadjoint, et on vérifie, en approchant l'application continue $g \mapsto g.\pi_v$ par des applications localement constantes, qu'il est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, donc compact. Soit alors $H(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda \operatorname{id}_V)$ un des sous-espaces propres de A, de dimension finie, fourni par la proposition précédente. Comme les $\rho(g), g \in G$, commutent avec A, W est bien stable sous G. □

La preuve ci-dessus n'utilise pas la continuité de l'action de G. Seulement le fait que les applications $g \mapsto (w, gv)$ sont intégrables. Cette remarque permettra d'appliquer ce résultat de décomposition à la représentation *régulière unitaire.*

4.4.3 *La représentation régulière unitaire.* Soit G un groupe localement compact. Comme on l'a vu précédemment, les espaces de fonctions raisonnables (continues, ou/et bornées, ou/et à support compact, etc...) sur G sont munis de deux actions naturelles de G par translations à gauche $[gf(x) = f(g^{-1}x)]$ ou à droite $[gf(x) = f(xg)]$, parfois appelées représentations "régulières". Maintenant que l'on dispose de mesures invariantes par translation, on peut considérer des variantes L^2 de ces représentations. Par commodité pour la suite, nous choisirons *l'action par translations à droite*. Fixons donc une mesure de Haar *à droite* μ sur G. Sur l'espace $\mathcal{C}_c(G,\mathbb{C})$ des fonctions complexes continues à support compact sur G on dispose d'un produit scalaire hermitien, dit produit L^2, défini par $\langle f_1, f_2\rangle = \int_G f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu(x)$. Comme μ est invariante à droite, on a l'égalité (pour l'action par translations à droite)

$$\langle gf_1, gf_2\rangle = \int_G f_1(xg)\overline{f_2(xg)}d\mu(x) = \int_G f_1(x)\overline{f_2(x)}d\mu(x) = \langle f_1, f_2\rangle.$$

L'espace $\mathcal{C}_c(G,\mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme L^2 (il est simplement "préhilbertien"). On note $L^2(G) = L^2(G,\mathbb{C},\mu)$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion. La formule ci-dessus montre que l'action de G se prolonge à $L^2(G)$ et préserve le produit scalaire. Elle est donc donnée par un homomorphisme $G \longrightarrow \mathrm{U}(L^2(G))$. On prendra garde au fait que cet homomorphisme n'est cependant pas toujours continu, même pour G compact. Nous appellerons $L^2(G)$ la *représentation régulière unitaire (à gauche)* de G.

Exemple. – Pour $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $L^2(G)$ est l'espace L^2 sur le cercle, ou encore celui des "fonctions" 1-périodiques de carré intégrable.

Cet exemple est fondamental pour comprendre les motivations de l'analyse harmonique et de la théorie des représentations.

4.5 Analyse harmonique et décomposition spectrale

4.5.1 *Interprétation de la théorie de Fourier classique et groupes compacts abéliens.* À toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ admettant 1 pour période, on peut attacher son "développement de Fourier" $\Sigma_{r\in\mathbb{Z}} a_r(f)e^{2i\pi rt}$, avec $a_r(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi rt}dt$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Plus généralement, si f est de carré sommable sur $[0,1]$ ($f \in L^2([0,1],\mathbb{C},dx)$), cette série est encore bien définie, et converge vers f en moyenne quadratique (c'est-à-dire pour la norme L^2).

Réinterprétons ces faits bien connus en termes du groupe de Lie compact $G := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1 \simeq \mathrm{SO}(2)$.

— Une fonction continue 1-périodique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ s'identifie à une fonction continue $G \longrightarrow \mathbb{C}$.
— Parmi ces fonctions, celles de la forme $t \to e^{2i\pi rt}$, $r \in \mathbb{Z}$ s'identifient exactement aux *homomorphismes* continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ [Exercice : vérifier que tout homomorphisme continu est bien de cette forme]. Lues sur S^1, elles s'écrivent $\chi_r : S^1 \to \mathbb{C}^* : g \mapsto \chi_r(g) = g^r$.
— La mesure de Lebesgue dt sur $\mathbb{R}$ induit la mesure de Haar normalisée μ de G et on peut identifier $L^2([0,1],\mathbb{C},dx)$ à $L^2(G,\mathbb{C},\mu) = L^2(G)$.
— La variante L^2 de la théorie de Fourier classique nous dit alors : *la famille des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ forme une base hilbertienne de $L^2(G)$.* Le coefficient de Fourier $a_r(f)$ n'est autre que la composante $\langle f, \chi_r\rangle$ de f contre χ_r.

La théorie de Fourier ainsi reformulée se généralise facilement à tout groupe compact commutatif.

On commennce par remarquer :

4.5.2 Lemme.– *Soit G un groupe topologique abélien. Toute représentation ($\mathbb{C}$-linéaire) de G irréductible et de dimension finie est de dimension 1.*

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme de Schur et du fait que des applications $\mathbb{C}$-linéaires admettent des vecteurs propres. On peut aussi utiliser que les $\rho(g)$ sont simultanément trigonalisables (car le groupe est abélien) ce qui exhibe une sous-représentation stable de dimension 1. □

Une représentation irréductible d'un groupe abélien topologique est donc un morphisme de groupe continu de $G \to \mathbb{C}^\times$, c'est ce que l'on appelle un *caractère de G*. Si G est de plus compact, son image est compacte donc ce morphisme de groupe continu se factorise en un morphisme de groupes continus $G \to S^1$.

D'après la proposition 4.4.2 toute représentation (unitaire) du groupe compact abélien G est donc une somme Hilbertienne de caractères (c'est à dire de représentations de la forme $\rho : G \to \mathbb{C}^\times$). En particulier, pour la représentation régulière $L^2(G)$, on obtient :

Proposition. – *Soit G un groupe compact commutatif et $\hat{G}$ l'ensemble des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$. Alors $\hat{G}$ est une base hilbertienne de $L^2(G)$. En d'autres termes, on a*

$$\forall f \in L^2(G),\ f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi.$$

On peut aussi obtenir des énoncés pour les fonctions continues comme par exemple :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{C}),\ f(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) \int_G f(x)\overline{\chi(x)} d\mu(x).$$

Le terme $\langle f, \chi \rangle = \int_G f(x)\overline{\chi(x)} d\mu(x)$ mérite le nom de "coefficient de Fourier". Notons d'ailleurs que, G étant compact, son image par $\chi \in \hat{G}$ est compacte donc contenue dans $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$, et on a donc $\overline{\chi(x)} = \chi(x)^{-1}$ pour tout $g \in G$.

Exercice. – Déterminer une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$. En déduire que toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 1-périodique en chacune de ses variables est la limite

$$f(x) = \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{[0,1]^n} f(t)\exp(-2i\pi m_1 t_1) \ldots \exp(-2i\pi m_n t_n) dt \right) \exp(2i\pi(m_1 x_1 + \ldots m_n x_n))$$

au sens de la norme L^2.

4.5.3 *Cas non-commutatif : caractères.* Pour un groupe G compact mais non commutatif, nous disposons déjà de plusieurs ingrédients de la proposition précédente : mesure de Haar, espace de Hilbert $L^2(G)$ muni de son action de G. On dispose aussi des homomorphismes continus $G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ mais cette fois, il est clair que de tels morphismes ne sont pas suffisamment nombreux pour pouvoir constituer une base de Hilbert de $L^2(G)$. Par exemple dans le cas extrême du groupe simple $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, il n'y a pas de tel homomorphisme non trivial ! Du point de vue de la théorie des représentations, la spécificité des groupes commutatifs parmi les compacts est que *toute représentation irréductible d'un groupe compact commutatif est de dimension* 1 en vertu du Lemme 4.5.2.

L'idée est alors, pour obtenir un analogue de la proposition précédente (qui sera le théorème 4.5.5 ci-dessous) de considérer l'ensemble $\hat{G}$ des *classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de dimension finie de G*. Le problème évident qui surgit est : comment associer une fonction à une représentation. La réponse est

Définition. – *Soit* (V, ρ) *une représentation continue de dimension finie d'un groupe topologique* G*. On appelle caractère de* ρ *la fonction (continue)*

$$\chi_\rho : g \in G \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)) \in \mathbb{C}.$$

L'égalité classique $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ montre qu'un caractère est une fonction *centrale* sur G, *i.e.* qui vérifie $f(ghg^{-1}) = f(h)$ pour tous $g, h \in G$ (on dit aussi "invariante par conjugaison"). Le sous-espace $L^2(G)^G$ des invariants par conjugaison de $L^2(G)$ est fermé, donc un espace de Hilbert. Par ailleurs, la même égalité classique montre que deux représentations équivalentes ont le même caractère. La généralisation souhaitée de la proposition s'énonce alors comme ceci :

4.5.4 Théorème.– *Soit* G *un groupe compact. L'ensemble* $\{\chi_\rho, \rho \in \hat{G}\}$ *des caractères de représentations irréductibles est une base hilbertienne de* $L^2(G)^G$*. En d'autres termes, on a*

$$\forall f \in L^2(G)^G,\ f = \sum_{\rho \in \hat{G}} \langle f, \chi_\rho \rangle \chi_\rho.$$

Il existe aussi des variantes pour les fonctions continues comme :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(G, \mathbb{C})^G,\ f(g) = \sum_{\rho \in \hat{G}} \chi_\rho(g) \int_G f(x) \overline{\chi_\rho(x)} d\mu(x).$$

Ici aussi on voit que $\overline{\chi_\rho(x)} = \chi_\rho(x^{-1})$ (mais $\neq \chi_\rho(x)^{-1}$) car les valeurs propres de $\rho(x)$ sont nécessairement de module 1. Il existe par ailleurs des conditions sur la famille des "coefficients de Fourier" $a_\rho(f) = \int_G f(x)\overline{\chi_\rho(x)} d\mu(x)$ pour que la convergence soit uniforme.

Remarque. – Ce théorème est une motivation claire pour les deux problèmes classiques de théorie des représentations :
— classifier les représentations irréductibles,
— calculer leur caractères.
Pour ces deux questions, les algèbres de Lie sont un auxiliaire très utile.

La partie la plus facile du théorème consiste à prouver que les caractères irréductibles $\chi_\rho, \rho \in \hat{G}$, forment une famille orthonormée de $L^2(G)$.

Lemme. – *Soient* V *et* W *deux représentations irréductibles de dimension finie de* G*.*
i) si W *n'est pas isomorphe à* V *:* $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = 0$ *;*
ii) si W *est isomorphe à* V *:* $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$*.*

Démonstration. Considérons le sous-espace V^G des vecteurs invariants de V. L'endomorphisme $p = \int_G \rho_V(g) d\mu(g)$ de V est un projecteur de V sur V^G. Sa trace vaut donc : $\dim(V^G) = \mathrm{tr}(p) = \int_G \mathrm{tr}(\rho_V(g)) d\mu(g)$, qui est le produit scalaire $\langle \chi_V, 1_G \rangle$. Appliquons ce résultat à la représentation $\mathrm{Hom}(V, W)$ définie par $g\varphi := \rho_W(g) \circ \varphi \circ \rho_V(g^{-1})$. D'après le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}(V, W)^G$ est de dimension 0 (resp. 1) si V et W ne sont pas (resp. sont) isomorphes. Ainsi $(\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}, 1_G) = 0$ ou 1 suivant qu'on est dans le cas i) ou le cas ii). Pour conclure, il ne reste qu'à montrer la formule $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$. Celle-ci est élémentaire (choisir une base de V, une base de W, et calculer dans la base de $\mathrm{Hom}(V, W)$ associée), si l'on ne perd pas de vue que $\overline{\chi_V(x)} = \chi_V(x^{-1})$ pour tout x. □

Le reste du théorème 4.5.4 est une conséquence du théorème de “décomposition spectrale” suivant, qui précise la décomposition Hilbertienne de $L^2(G)$ de la proposition 4.4.2 en affirmant que toute représentation irréductible de G y apparaît avec une multiplicité égale à son degré. Avant de l'énoncer précisément, un peu de terminologie.

DÉFINITION. – *Soit* (V,ρ) *une représentation de dimension finie de* G*. Un* coefficient matriciel *de* ρ *est une fonction de la forme* $c_{v,v^*} : g \mapsto (gv, v^*)$ *où* $v \in V$ *et* $v^* \in V^*$ *(dual de* V*, l'accouplement entre l'espace et son dual est donc noté* (v,v^*)*).*

Un coefficient matriciel est continu donc appartient à $L^2(G)$. Remarquons que le caractère χ_ρ est somme de coefficients matriciels : si $v_1,\cdots,v_n$ est une base de V de base duale $v_1^*,\cdots,v_n^*$, alors $\chi_\rho = \sum_{i=1}^n c_{v_i,v_i^*}$.

Supposons maintenant ρ irréductible, et notons $L^2_\rho(G)$ le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par les coefficients matriciels de ρ. Il est de dimension finie, au plus $\dim(\rho)^2$, puisqu'engendré par les c_{v_i,v_j^*}. Par ailleurs il est stable sous G puisque $g.c_{v,v^*} = c_{gv,v^*}$. Si on fixe j, on obtient une sous-représentation de $L^2_\rho(G)$ dont on peut voir qu'elle est isomorphe à V car (V,ρ) est irréductible ; ce point découle en fait du Théorème suivant et de sa preuve.

4.5.5 THÉORÈME. (Peter-Weyl)– *Soit* G *un groupe compact. Pour tout* ρ*,* $L^2_\rho(G)$ *est* G*-isomorphe à* $V_\rho^{\dim(\rho)}$*, et on a une somme directe hilbertienne*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\rho\in\hat{G}}} L^2_\rho(G)$$

Démonstration. Fixons une représentation irréductible (V,ρ) et choisissons un produit scalaire G-invariant $\langle .,. \rangle_V$. On rappelle qu'un tel produit scalaire existe et est unique à homothétie près. Pour v, v' on notera $c_{v,v'}$ le coefficient matriciel $g \mapsto \langle gv, v'\rangle_V$. L'espace $L^2_\rho(G)$ est donc engendré par ces fonctions.

Soit (W,π) une autre représentation irréductible de G, et $\langle .,. \rangle_W$ un produit scalaire invariant. Fixons $v' \in V$ et $w \in W$. Considèrons l'application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{v',w} : & V & \to & W \\ & v & \mapsto & \int_G \langle gv, v'\rangle_V \, g^{-1}w \, d\mu(g) \end{array}$$

Comme μ est une mesure de Haar, cette application est un G-morphisme.

Premier cas : W *n'est pas isomorphe à* V*.* Dans ce cas, le lemme de Schur nous dit que $\Phi_{v',w} = 0$, donc pour tous $v, v' \in V$ et $w, w' \in W$, on a

$$\begin{aligned} \langle c_{v,v'}, c_{w',w}\rangle &= \int_G \langle gv, v'\rangle_V \overline{\langle gw', w\rangle_W} \, d\mu(g) = \int_G \langle gv, v'\rangle_V \langle w, gw'\rangle_W \, d\mu(g) \\ &= \int_G \langle gv, v'\rangle_V \langle g^{-1}w, w'\rangle_W \, d\mu(g) = \langle \Phi_{v',w}(v), w'\rangle_W = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $L^2_\rho(G)$ et $L^2_\pi(G)$ sont orthogonaux.

Deuxième cas : V *est isomorphe à* W*.* On suppose alors $V = W$, et on sait que $\Phi_{v',w}$ est un scalaire $\lambda_{v',w}$. Par construction, celui-ci dépend linéairement de w et semi-linéairement de v'. Le calcul ci-dessus montre

$$\langle c_{v,v'}, c_{w',w}\rangle = \lambda_{v',w} \langle v, w'\rangle_V.$$

Par symétrie on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\langle c_{v,v'}, c_{w',w}\rangle = \lambda \langle w, v'\rangle_V \langle v, w'\rangle_V.$$

En prenant $v = w'$ et $v' = w$, on constate que $\lambda > 0$ et en particulier λ est non nul. Il s'ensuit que, si $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormée de V, alors les c_{e_i,e_j} pour $i, j = 1, \cdots, n$ forment une base orthogonale de $L^2_\rho(G)$, lequel est donc de dimension $\dim(\rho)^2$. On en déduit que le G-morphisme surjectif

$$\begin{array}{rcl} V_\rho^{\dim(\rho)} & \to & L^2_\rho(G) \\ (v_1, \cdots, v_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n c_{v_i,e_i^*} \end{array}$$

est aussi injectif, ce qui prouve la première assertion du théorème.

On a déjà prouvé que la somme $H_0 := \bigoplus_{\rho\in\hat{G}} L^2_\rho(G)$ est orthogonale. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est dense, autrement dit que l'orthogonal $H_0^\perp$ est nul. Supposons le contraire. Alors puisque $H_0^\perp$ est stable sous G, il contient d'après 4.4.2 une sous-représentation irréductible de dimension finie $\mathcal{V}$. Soit $\rho \in \hat{G}$ la classe d'isomorphisme de $\mathcal{V}$. Pour f non nulle dans $\mathcal{V}$, la fonction

$$F(g) = \int_G f(xg)\overline{f(x)}d\mu(x) = \langle g.f, f\rangle$$

est un coefficient matriciel de $\mathcal{V}$, donc appartient à $L^2_\rho(G)$. Montrons qu'elle lui est orthogonale, donc nulle. En effet, pour $v, v' \in V_\rho$,

$$\begin{array}{rcl} \langle F, c_{v,v'}\rangle & = & \int_G F(g)\overline{\langle gv, v'\rangle_V}d\mu(g) = \int_G\int_G f(gx)\overline{f(x)}.\overline{\langle gv, v'\rangle_V}d\mu(x)d\mu(g) \\ & = & \int_G\int_G f(h)\overline{f(x)}\,\overline{\langle hx^{-1}v, v'\rangle_V}d\mu(x)d\mu(h) \\ & = & \int_G \overline{f(x)}\left(\int_G f(h)\overline{\langle hx^{-1}v, v'\rangle_V}d\mu(h)\right)d\mu(x) \\ & = & \int_G \overline{f(x)}\langle f, c_{x^{-1}v,v'}\rangle d\mu(x) = 0 \end{array}$$

À la deuxième ligne on a fait le changement de variable $gx = h$ grâce à l'invariance de μ, à la troisième ligne on a échangé les deux intégrales, et à la dernière ligne on utilise l'hypothèse $f \in H_0^\perp$. On a donc prouvé que la fonction F est nulle. En particulier $0 = F(e) = \int_G |f(x)|^2 d\mu(x)$, donc f aussi est nulle, contredisant l'hypothèse $H_0^\perp \neq 0$. $\square$

Au cours de la preuve, nous avons exhibé une base orthogonale $(c^\rho_{i,j})_{\rho\in\hat{G},1\leqslant i,j\leqslant\dim(\rho)}$ de $L^2(G)$. Cette base dépend du choix, pour chaque ρ d'une base orthonormée de V_ρ. Nous n'avons pas calculé les normes $||c^\rho_{i,j}||$ mais nous avons montré qu'il existe $\lambda_\rho > 0$ tel que $||c^\rho_{i,j}||^2 = \lambda_\rho$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant \dim(\rho)$. On peut calculer λ_ρ grâce à la relation $||\chi_\rho|| = 1$ déjà prouvée plus haut. En effet, l'égalité $\chi_\rho = \sum_{i=1}^{\dim(\rho)} c^\rho_{i,i}$ donne $\lambda_\rho = \frac{1}{\dim(\rho)}$.

Corollaire. – *La famille* $\left(\sqrt{\dim(\rho)}c^\rho_{i,j}\right)_{\rho\in\hat{G},1\leqslant i,j\leqslant\dim(\rho)}$ *de* $L^2(G)$ *en est une base Hilbertienne.*

4.5.6 *Fin de la preuve du théorème 4.5.4.* On sait déjà que les χ_ρ forment une famille orthonormée. Il reste à voir que toute fonction *centrale* f telle que $(f, \chi_\rho) = 0$ pour toute représentation irréductible (V, ρ) est nulle. Pour une telle V, posons $\varphi_V = \int_G \overline{f(g)}\rho(g)d\mu(g)$.

Comme f est centrale et que μ est également invariante à droite, on voit que φ_V est un G-morphisme de V dans V, donc par Schur, une homothétie. Mais sa trace vaut $\langle f, \chi_V \rangle$, donc est nulle, donc $\varphi_V = 0$. En particulier, les coefficients $\langle f, c_{v,v'} \rangle$ pour $v, v' \in V$ sont tous nuls. Ceci étant valable pour toute ρ irréductible, f est nulle.

Remarque culturelle. – une conséquence amusante du Théorème de Peter-Weyl est que tout groupe de Lie abstrait (c'est à dire variété munie d'une structure de groupe dont la multiplication et l'inverse sont des fonctions lisses) est en fait un sous-groupe fermé d'un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. – *Tout groupe de Lie compact est un groupe de Lie linéaire.*

On peut démontrer cette proposition de la manière suivante. Premièrement, on note le lemme suivant.

4.5.7 Lemme.– *Soit G un groupe de Lie (abstrait) compact. Toute suite décroissante $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes fermés de G est stationnaire, c'est à dire constante à partir d'un certain rang.*

Preuve du lemme. Soit $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$ une suite décroissante de sous-groupes fermés. Par la dernière proposition de la remarque culturelle consécutive au théorème 2.2.7, on a que les G_i sont des sous-groupes de Lie, en particulier des variétés. Considérons l'inclusion $G_i \subset G_{i-1}$. Alors, de deux choses l'une, soit $\dim(G_i) < \dim(G_{i-1})$ soit G_i a strictement moins de composantes connexes que G_{i-1}. En effet, si $\dim(G_i) = \dim(G_{i-1})$, alors, ces 2 groupes ont la même algèbre de Lie (puisque $\mathrm{Lie}(G_i) \subset \mathrm{Lie}(G_{i-1})$ et qu'elles ont même dimension) et donc la même composante connexe de l'identité G_i^0 (corollaire 2.2.9). Le nombre de composantes connexes de G_i est le cardinal du groupe quotient G_i/G_i^0 qui est fini, discret (car le groupe est compact et que G_i^0 est normal) et est un sous-groupe de G_{i-1}/G_i^0, donc de cardinal plus petit.

Par suite, comme la dimension et le nombre de composantes connexes de G sont finies, la suite doit être stationnaire. □

Supposons que $G \neq \{e\}$. Par le théorème de Peter-Weyl, il existe une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$ de G, dont le noyau est un sous-groupe G_1 strictement inclus dans G. Si ce noyau est trivial, la représentation est fidèle et on a fini (comme G est compact, son image est compacte donc fermée dans $\mathrm{GL}(V/\mathbb{K})$). Sinon, prenons un point $g_1 \in G_1$ différent de e et soit $\varphi : G \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\varphi(g_1) \neq \varphi(1)$. Le Théorème de Peter-Weyl, nous donne une autre représentation de G de noyau K_2, de telle sorte dont $G_2 := K_2 \cap G_1$ est inclus strictement dans G_1. En appliquant le lemme la suite G_i stationne, nous fournissant une représentation fidèle donnée par la somme directe de ces représentations. *(Fin de la remarque culturelle)*