

## Série d'exercices N°3

**Exercice 1**

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{si } x \leq 0 \\ &= 1 - e^{-x/2} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \quad \text{si } x > 0. \end{aligned}$$

Montrer que  $F$  est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

**Exercice 2**

Soit  $X$  une v.a. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  (de densité de probabilité  $f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ ). Déterminer la fonction de répartition de la v.a.  $Y = \min(X, a)$ , ( $a \in [0, 1]$ ). Montrer que la loi de  $Y$  est une combinaison linéaire d'une loi à densité et d'une mesure de Dirac.

**Exercice 3**

Soit  $X$  une v.a. réelle de fonction de répartition  $F$ . Trouver en fonction de  $F$  les fonctions de répartition de  $X^2$ ,  $X^3$ ,  $aX + b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $[X]$ ,  $X - [X]$ , (où  $[X]$  est la partie entière de  $X$ ) et  $\exp(X)$ .

**Exercice 4**

Montrer qu'une v.a.  $X$  est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est p.s. constante:

- en la supposant de carré intégrable et en calculant  $\text{Var}(X)$ ,
- plus généralement en déterminant sa fonction de répartition.

**Exercice 5**

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Déterminer les loi des v.a.  $U = \min(X_1, X_2)$  et  $V = \max(X_1, X_2)$ . En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut  $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$  ?

**Exercice 6**

Soit  $L$  une v.a. positive admettant une densité de probabilité  $f$  et  $X$  une v.a. de loi uniforme sur

$[0, 1]$ , indépendante de  $L$ . On définit deux v.a.  $L_1$  et  $L_2$  par  $L_1 = XL$  et  $L_2 = (1 - X)L$ , (cela modélise par exemple la rupture d'une chaîne moléculaire de longueur initiale aléatoire  $L$ ).

- 1) Déterminer la loi du couple  $(L_1, L_2)$  ainsi que les lois de  $L_1$  et  $L_2$ .
- 2) Que peut-on dire du couple  $(L_1, L_2)$  lorsque  $f(x) = \lambda^2 x \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$ , ( $\lambda > 0$ ) ?
- 3) Déterminer la loi de  $Z = \min(L_1, L_2)$  dans ce cas.

### Exercice 7

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes.  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y$  une loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , où  $\sigma$  désigne un réel positif.

- 1) Écrire la densité de la loi du couple  $(X, Y)$ .
- 2) On pose  $U = Y/X$ . Calculer la densité de la loi du couple  $(X, U)$ .
- 3) Les variables  $X$  et  $U$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 8

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes.  $X$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et  $Y$  une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la loi de  $\frac{Y}{X}$ .

### Exercice 9

Soit  $(X_1, X_2)$  un couple de v.a. admettant la densité de probabilité :

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

où  $\rho \in [0, 1[$ .

- 1) Vérifier que  $f$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}^2$  et trouver les densités marginales de  $X_1$  et  $X_2$ . A quelle condition les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?
- 2) On pose  $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$  et  $\Phi \in [0, 2\pi[$  définie par

$$\cos \Phi = \frac{X_1}{R} \quad \text{et} \quad \sin \Phi = \frac{X_2}{R}.$$

Déterminer la densité du couple  $(R, \Phi)$  puis celle de  $\Phi$ .

### Exercice 10

On appelle variable gamma de paramètre  $a > 0$  une variable à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  dont la loi admet la densité :  $e^{-t} t^{a-1} / \Gamma(a)$ .

- 1) Soit  $Z_a$  une v.a. gamma de paramètre  $a$ . Calculer explicitement les moments entiers :  $\mathbb{E}((Z_a)^n)$ , en fonction de  $a$  et de  $n \in \mathbb{N}$ .

2) Soient  $Z_a$  et  $Z_b$  deux variables gamma indépendantes de paramètres respectifs  $a$  et  $b$ . Montrer que les variables  $Z_a/(Z_a + Z_b)$  et  $Z_a + Z_b$  sont indépendantes et expliciter la loi de  $Z_a/(Z_a + Z_b)$ .

### Exercice 11

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. uniformément bornées.

1) Montrer l'identité :

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy [\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y)]. \quad (1)$$

Indication : Pour deux réels  $M$  et  $N$  suffisamment grands, on pourra considérer les quantités :

$$\mathbb{E}[(M - X)(N - Y)] \quad \text{et} \quad (M - \mathbb{E}[X])(N - \mathbb{E}[Y])$$

et utiliser :  $M - X = \int_X^M dx$ , si  $X \leq M$ ,  $P$ -p.s.

2) Calculer séparément les deux membres de (1) lorsque  $X \equiv Y$  est une variable uniforme sur  $[0, a]$ , et vérifier l'égalité (1) dans ce cas.

### Exercice 12

1) Montrer, pour tout couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires, l'inégalité :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \left( \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \right)^{1/2}.$$

2) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe un entier  $p_n$  ne dépendant que de  $n$ , tel que la propriété suivante soit satisfaite : *pour tout  $n$ -uplet de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$ , si pour tout  $k \leq n$ ,  $\mathbb{E}(|X_k|^{p_n}) < \infty$ , alors :  $\mathbb{E}(|X_1 X_2 \dots X_n|) < \infty$ .*

3) Soient  $G_1, G_2, \dots, G_n$ ,  $n$  variables aléatoires telles que, pour tout  $k$ ,  $G_k$  soit une variable gaussienne centrée de variance  $\sigma_k$ .

Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , dépendant de  $n$ , et des réels  $\sigma_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , tel que :

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \varepsilon \sum_{k=1}^n G_k^2 \right) \right] < \infty.$$

### Exercice 13

Soit  $h$  une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  une fonction réelle sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x$  on ait  $0 < g(x) < 1$ . On engendre une suite  $(Y_n, U_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  de couples indépendants de variables aléatoires réelles, tels que pour tout  $n \geq 1$ ,  $Y_n$  et  $U_n$  sont indépendantes. Les  $Y_n$  ont la même loi de densité  $h$  et les  $U_n$  suivent la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Soit  $\tau$  le premier instant où  $U_n \leq g(Y_n)$ , c'est à dire :  $\tau = \inf \{n \geq 1 : U_n \leq g(Y_n)\}$  en posant  $\tau = +\infty$  au cas où  $U_n > g(Y_n)$ , pour tout  $n$ .

1) Exprimer  $\rho = \mathbb{P}(U_n \leq g(Y_n))$  à l'aide de  $h$  et de  $g$ . Quelle est la loi de  $\tau$  en fonction de  $\rho$  ?

Montrer que  $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$ .

2) On prend pour  $X$  la variable aléatoire  $X = Y_\tau$ , (i.e.  $X = Y_n$  pour  $\tau = n$ ). Quelle est la loi de  $X$  ?

### Exercice 14

Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ .

On pose  $S_0 = 0$  et pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ .

1) Calculer la loi de  $(S_1, \dots, S_n)$ .

2) Montrer que  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  admet la densité de probabilité

$$f_n(t) = \lambda^n e^{-\lambda t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}_{]0, +\infty[}(t).$$

3) Que vaut la fonction caractéristique de  $S_n$  ?

4) Calculer de deux manières  $\mathbb{E}(S_n)$  et  $\text{Var}(S_n)$ .

### Exercice 15

On dit qu'une v.a.  $X$  suit une loi stable si pour tout entier  $n \geq 1$  et toutes v.a.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes et de même loi que  $X$ , il existe des constantes  $a_n > 0$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  telles que  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ait même loi que  $a_n X + b_n$ .

1) Montrer que les lois gaussiennes centrées  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , de paramètre quelconque  $\sigma > 0$ , et les lois de Cauchy de paramètre quelconque  $c > 0$  sont stables. Montrer que par contre les lois de Poisson ne le sont pas.

2) Calculer  $a_n$  et  $b_n$  lorsque  $X$  suit une loi stable de variance finie  $\sigma^2$ . En déduire que les seules lois stables de variance finie sont les lois gaussiennes.

### Exercice 16

Soit  $Z = (X, Y)$  un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  de fonction caractéristique  $\Phi$ .

1) Montrer que la loi de  $Z$  est invariante par rotation si et seulement si il existe une fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Phi(u, v) = \psi(u^2 + v^2)$ .

2) On suppose que  $Z$  vérifie les conditions du 1) et aussi que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. On note  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  les fonctions caractéristiques de  $X$  et de  $Y$ .

a) Exprimer  $\Phi$  en fonction de  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$ , puis exprimer  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  en fonction de  $\psi$ . Vérifier que  $\Phi_X$  et  $\Phi_Y$  sont paires et qu'elles prennent donc des valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

b) Déduire du a) une relation vérifiée par  $\psi$  puis montrer que  $\psi$  ne peut s'annuler.

c) Montrer que  $X$  (et de même  $Y$ ) suit une loi normale centrée de variance  $2\lambda$  où  $\lambda = -\log \psi(1)$ .

d) Si  $X = R \cos \theta$  et  $Y = R \sin \theta$ , avec  $R > 0$  et  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Quelles sont les lois de  $\theta$  et de  $R$  ? Sont-elles indépendantes ?