Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011-2012

Feuille d'exercices n° 1

Notation. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Attention. « Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ la fonction définie par $f(x) = 3x$ ». Dans cette phrase, plusieurs objets sont en jeu : f est une *fonction*, x est un *nombre* qui appartient à I, $f(x)$ est un *nombre* qui appartient à J et appelé l'*image de* x par la fonction f.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1)\ x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2} \quad 2)\ x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x} \quad 3)\ x \mapsto \frac{1}{\ln(\ln(x))} \quad 4)\ x \mapsto \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

Exercice 2. Tracer sur un même repère l'allure des graphes des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto e^{-x}$; $x \mapsto e^{|x|}$; $x \mapsto -e^{-|x-1|}$
2) $x \mapsto \ln(x)$; $x \mapsto \ln(x) + 1$;
3) $x \mapsto |\ln x|$; $x \mapsto \ln|x|$; $x \mapsto -\ln|x-1|$
4) $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^4$
5) $x \mapsto x^{1/2}$; $x \mapsto x^{1/3}$; $x \mapsto x^{1/4}$

Exercice 3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Montrer que :

1) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2) si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective ;
3) si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 0$.

Exercice 4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1) La fonction réciproque f^{-1} de f vérifie $f^{-1}(x) \cdot f(x) = x$.
2) La somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
3) La fonction $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est paire.
4) Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est soit paire, soit impaire.
5) Il existe une fonction à la fois paire et impaire.
6) L'inverse d'une fonction est sa réciproque.
7) La somme (resp. le produit, la composée) de deux fonctions croissantes est croissante.
8) La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Exercice 5. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Est-elle injective ? Surjective ? Déterminer des intervalles $I \subset]0, +\infty[$ et $J \subset [0, +\infty[$ tels que la restriction de f à I soit bijective.

Exercice 6. On considère l'homographie $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-2}{2x-3}$.

1) Donner les équations de ses deux asymptotes et de son centre de symétrie.
2) Déterminer la réciproque f^{-1} de f et son domaine de définition.

Exercice 7. 1) On considère les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = 1 + \ln(x^2 - x - 2)$ et $g(x) = e^x$. Donner le domaine de définition de $g \circ f$ et déterminer $g \circ f$.

2) On considère les deux fonctions suivantes f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ et $g(x) = x^2$. Donner les domaines de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer ces fonctions.

Exercice 8. On rappelle la formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

1) Calculer $e^{i\pi}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{2i\pi/3}$ et $e^{3i\pi/4}$.

2) Retrouver les formules trigonométriques d'addition, i.e. $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\cos 2a$, $\sin 2a$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$, et $\cos b$.

Exercice 9. Après avoir déterminé leur ensemble de définition, résoudre les équations suivantes :

1) $\ln\sqrt{3x-1} + \ln\sqrt{x-1} = \ln(x-2)$

2) $\frac{1}{2}\ln 2x + \ln\sqrt{x+1} = \ln(3-x)$

3) $\ln(x^2-1) + 2\ln(2) = \ln(4x-1)$

4) $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$

5) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$

Exercice 10. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.

1) Déterminer son ensemble de définition.

2) Déterminer les x tels que a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 1$.

Exercice 11. Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$, $x \to -1$

2) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$, $x \to \pm\infty$

3) $x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, $x \to 0$

4) $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $x \to 0$

5) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$, $x \to \pm\infty$

6) $\sqrt{x^2+2x+5} - x - 1$, $x \to \pm\infty$

7) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$, $x \to 0$

8) $x + 3 - \ln(x^2+4)$, $x \to \pm\infty$

Exercice 12. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition, ses variations et représenter son graphe :

1) $x \mapsto \dfrac{x-2}{x+3}$

2) $x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2+1}$

3) $x \mapsto |\ln(x^2-1)|$

4) $x \mapsto \ln(x^4+x^2+1)$

5) $x \mapsto \sqrt{x} - \ln(x)$

6) $x \mapsto x^{-\ln(x)}$

Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011/2012

Feuille d'exercices n° 2

Rappel. La notation $\sin^n(x)$ désigne $(\sin(x))^n$ (idem pour $\cos^n(x)$, etc.).

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{\ln(1+\sin(x))} \qquad x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{\cos(x)} \qquad x \mapsto \sqrt{\sin(2x)}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) \quad \cos(3x) = \frac{1}{2} \qquad\qquad (E_2) \quad \cos^2 x = \sin^2 x.$$

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont périodiques et déterminer leur période :

$$f : x \mapsto e^{\sin(x/2)} \qquad g : x \mapsto \sin^3(x) + \sin(3x) + 1$$

(pour la deuxième, on peut utiliser la formule trigonométrique : $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$).

Exercice 4. 1) Prouver l'inégalité : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $\quad \sin x \leq x \leq \tan x$.

2) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Exercice 5. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{\cos(\frac{1}{x}) + e^{\frac{1}{x^2}+x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 6. Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x(x+2))}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln(x)}}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$

10) $\lim\limits_{x\to 0} xE(\dfrac{1}{x})$ où E désigne la fonction partie entière

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ en fonction de m et n entiers positifs

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2(x)}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée.

1) $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ 2) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 3) $x \mapsto e^{x \ln x}$

4) $x \mapsto x^2 + 2^x$ 5) $x \mapsto x^x$ 6) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)^2}\right)$

7) $x \mapsto |x|^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$ 8) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 9) $x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

10) $x \mapsto \ln|\tan(\frac{x}{2})|$ 11) $x \mapsto \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})|$ 12) $x \mapsto \tan(x) + \frac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x - \dfrac{2x \ln x}{x-1}$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
3) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
4) Montrer que, pour tout $x > 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
5) En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 9. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :
$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2(x)$$
(on peut commencer par calculer les premières dérivées afin de deviner la formule générale, puis la démontrer par récurrence sur n).

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2) Étudier l'existence de $f''(0)$.
3) On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$. Conclure.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 12. Déterminer les constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$
soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1) Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} et donner son domaine de définition.
2) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur son domaine de définition.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter f'.
2) Dresser le tableau de variations de f, limites incluses, et tracer dans un repère orthonormé le graphe $\mathcal{C}_f$ de f.
3) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter. Sa réciproque sera notée f^{-1} et son graphe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.
4) En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
5) Calculer $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ et $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6) Donner l'équation des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse 0.
7) Soit $x \in f(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $f(x) = y$. En déduire f^{-1}.
8) Lorsque f^{-1} est dérivable en x, calculer $(f^{-1})'(x)$ de deux façons différentes.
9) Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie pour tout x dans $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

1) Étudier les variations de f.
2) En déduire que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3) En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4) Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$. En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5) Tracer dans un même repère orthonormé le graphe de f et celui de f^{-1}.

Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011/2012

Feuille d'exercices n° 3

Calculs de développements limités.

Exercice 1 (rappel de cours)**.** Soient f et g deux fonctions continues dont on suppose qu'elles admettent un développement limité à tout ordre.

1) Jusqu'à quel ordre faut-il développer f et g pour calculer le développement limité de $f+g$ à l'ordre n ? Expliquer comment obtenir le développement de $f+g$ à partir de ceux de f et g.
2) Même question pour fg et pour $f \circ g$.

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants en 0.

1) $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3
2) $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3
3) $\sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3
4) $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3
5) $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 3
6) $\frac{x}{\sin(x)}$ à l'ordre 3
7) $\tan(x)$ à l'ordre 4
8) $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4
9) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2
10) $\frac{x\ln(1+x)-e^{x^2}+1}{x^2}$ à l'ordre 2
11) $\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$ à l'ordre 2
12) $(x+1)^{x^2+2x}$ à l'ordre 6

Exercice 3. Calculer les développements limités suivants.

1) e^x au voisinage de a à l'ordre 3
2) $\cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4
3) $\sin(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 5
4) $\frac{1+x}{1-x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 2

Exercice 4. 1) Démontrer que la fonction tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

2) On appelle arctangente et on note arctan sa fonction réciproque. Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Démontrer que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3) En déduire par intégration le développement limité de arctan au voisinage de 0 à l'ordre 10.

Exercice 5. Soit $f(x) = (1-\cos(x))^{13}$. À quel ordre minimum doit-on développer $\cos x$ pour calculer le développement limité à l'ordre 30 de $f(x)$? (on ne demande pas d'écrire ce développement limité).

Application au calcul de limites

Exercice 6. En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)}$
3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3}$
4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^3}$
5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}\right)$
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$
7) $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos(x)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+3-\sqrt[4]{2+80x^3+16x^4})$

Exercice 7. Déterminer les constantes a, b, c pour que $\dfrac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \dfrac{a}{x}$ et $\dfrac{1}{\sin^3(x)} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{b}{x^2} - \dfrac{c}{x}$ tendent vers une limite finie quand $x \to 0$.

Application au prolongement par continuité

Exercice 8. On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$. Montrer qu'elle est prolongeable en fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note h cette fonction. Que vaut $h(0)$? La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 9. On considère la fonction définie pour $x \in]0, \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{x^2}.$$

Déterminer le développement limité de $\ln(\frac{\sin(x)}{x})$ en 0 à l'ordre 4. En déduire si la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

Application à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, à l'aide d'un développement limité, trouver l'équation de la tangente au graphe de la fonction au point d'abscisse indiqué, puis, au voisinage du point de contact, donner la position du graphe par rapport à cette tangente. Enfin, représenter le graphe de la fonction et sa tangente au voisinage du point de contact.

1) $f(x) = \ln(\sin(x))$ en $x = \frac{\pi}{2}$ 2) $g(x) = \ln(\frac{1-x}{x-3})$ en $x = 2$.

Exercice 11. En utilisant des développements limités, trouver, pour chacune des fonctions suivantes, ses asymptotes en l'infini et préciser leur position (il peut s'agir de droites ou de paraboles).

1) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ 2) $\dfrac{2x^2}{x-1}e^{\frac{1}{2x}}$ 3) $\sqrt[3]{x^3+ax^2} - \sqrt[2]{x^2+bx}$

4) $x^3 \sin(\frac{1}{x})$ 5) $x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Développements limités de fonctions réciproques.

Exercice 12. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1) Montrer que f est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$.
2) Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
3) On note g la fonction réciproque de f. Montrer que g possède un développement limité à l'ordre 2 au point 1 et calculer ce développement limité.
4) En déduire que le produit $t \cdot g(\frac{t}{t-1})$ a une limite finie, que l'on calculera, quand t tend vers $+\infty$.

Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011/2012

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0,2]$ par $F(x) = 3x^4 - 4ax^3$.

1) On suppose que la fonction F possède un extremum (maximum ou minimum) en un point c de l'intervalle $]0,1[$. Calculer c et $F(c)$.
2) Quelles sont, en fonction de a, les valeurs possibles pour pour le maximum et le minimum de la fonction F sur l'intervalle $[0,1]$?
3) Déterminer, en fonction de a, l'image $F([0,1])$ de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction F.

Exercice 2. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 3. 1) Soit l'équation $2x\sqrt{x^2+1} = x+1$. Montrer l'existence d'une solution dans $[0,1]$.

2) Soit l'équation $2\cos(x) = x$.
   (a) Montrer que les solutions, si elles existent, appartiennent à l'intervalle $[-2,2]$.
   (b) Montrer l'existence d'au moins une solution.

Exercice 4. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe dans $[a,b]$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$ (on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie).

Exercice 5. Soit f définie par $f(x) = (x^2+1)\sin x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la dérivée de f.
2) Montrer que l'équation $(x^2+1)\cos x + 2x\sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0,\pi]$.

Exercice 6. Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a,b[$ et s'annulant en $n+1$ points de $]a,b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue sur $]a,b[$, il existe un point x_0 de $]a,b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 7. Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[k,k+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 8. Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 9. 1) Déterminer une fonction polynomiale de degré 2, P, telle que, si on définit sur $]-1,1[$ une fonction f par : $f(x) = \ln(1+x) - P(x)$, alors $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

2) (a) Montrer que : $\forall x \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[, |f'(x)| \leqslant 2x^2$.

(b) En déduire que : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, |\ln(1+x) - P(x)| \leqslant 2|x|^3$.

(c) En déduire si elle existe la valeur de : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Quelle autre méthode (plus rapide) connaissez-vous pour calculer cette limite ?

Exercice 10. 1) A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

3) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 11. Montrer que le polynôme P_n défini par $P_n(t) = \left[\left(1-t^2\right)^n\right]^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Indication : on rappelle que si P est un polynôme ayant une racine a de multiplicité m, alors $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

Exercice 12. Soit P un polynôme à coefficients réels. On veut montrer que l'équation l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, n'admet qu'un nombre fini de solutions.

1) Montrer que si n et $k \geqslant 1$ sont deux entiers naturels, si l'équation $P^{(n)}(x) = e^x$ a au moins k solutions, alors l'équation $P^{(n+1)}(x) = e^x$ a au moins $k-1$ solutions.

2) En déduire que l'équation $P(x) = e^x$ a au plus $\deg P + 1$ solutions. Conclure.

Exercice 13. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 14. Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1) Montrer que

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha)\ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha)\ln y \leqslant \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 15. On pose $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.

1) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 9 et au point 0 pour la fonction sinus. En déduire, pour tout $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$P(x) \leqslant \sin(x) \leqslant P(x) + \frac{x^9}{9!}.$$

2) Trouver un nombre $a > 0$ tel que l'on ait $|\sin(x) - P(x)| \leqslant 10^{-5}$ pour tout $x \in [0, a]$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$.

1) Étudier les variations de la fonction f. Quelle est l'image de l'intervalle $]0, +\infty[$ par f ?

2) Vérifier que $f''(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.

3) Soit $a > 1$ un nombre réel. En écrivant la formule de Taylor-Lagrange avec un reste en f'' sur l'intervalle $[1, a]$, trouver une minoration de $f(a)$.

Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011/2012

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et le représenter dans $\mathbb{R}^2$.

$f_1(x,y) = \sqrt{x+y}$ $\quad f_2(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-y}}{x} + \ln(x)$

$f_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ $\quad f_4(x,y) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{3-y^2}$

$f_5(x,y) = \sqrt{x^{1/3} - y^{1/3}}$ $\quad f_6(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$

$f_7(x,y) = \sqrt{\frac{y^2}{2y-x^2}}$

Représenter les courbes de niveau 0, 1 et 2 pour les fonctions f_1, f_3 et f_7.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

1) $f(x,y) = e^{x+y}$ $\quad$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ 4) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$

5) $f(x,y) = \dfrac{xy^6}{x^6+y^8}$

Exercice 3. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes et les calculer.

1) $f(x,y) = xy$ $\quad$ 2) $f(x,y) = \arctan(x-3y^2)$

3) $f(x,y) = e^{xy}\sin(x+y)$ $\quad$ 4) $f(x,y) = x^y$

Exercice 4. Soit la fonction définie, pour $(x,y) \neq (0,0)$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

1) Montrer que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$.
2) Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.
3) On pose désormais $f(0,0) = 0$. Montrer que f a des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en 0.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de f par rapport à x et y au point $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
3) Montrer que f n'est pas dérivable (différentiable) au point $(0,0)$.

Exercice 6. 1) Soient α_1, α_2 et γ des réels $\geqslant 0$. On pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|+|y|)^{\gamma}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha_1 + \alpha_2 > \gamma$.
(*Indication : pour la condition nécessaire, regarder $f(x,x)$, pour la condition suffisante, montrer que $0 \leqslant f(x,y) \leqslant (|x|+|y|)^{\alpha_1+\alpha_2-\gamma}$, ou utiliser les coordonnées polaires.*)

2) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha_1 + \alpha_2 > \gamma + 1$.

Exercice 7. Donner un développement à l'ordre 1 des fonctions suivantes au voisinage des points a indiqués.

1) $f(x,y) = x + y$, $a = (1,1)$
2) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $a = (1,1)$, $a = (0,2)$, $a = (x_0, y_0)$
3) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3$, $a = (1,0)$
4) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$, $a = (0,\pi)$

Exercice 8. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point a indiqué ainsi qu'un vecteur normal à ce plan.

1) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, $a = (1,2)$
2) $f(x,y) = e^x y$, $a = (-1,1)$
3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^4}$, $a = (2,1)$
4) $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Exercice 9. Soit $f(x,y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$.

1) Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f au point $(2,1)$.
2) Soit $\varphi(x)$ une fonction telle que au voisinage de $(2,1)$ on ait

$$f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

Calculer $\varphi(2)$. Montrer que $f(x,\varphi(x)) = 0$. En dérivant deux fois cette dernière inégalité et en prenant $x = 2$, calculer $\varphi(2)$ et $\varphi'(2)$. En déduire le développement limité de φ à l'ordre 2 au point 2.

Exercice 10. Soit la courbe Γ définie par l'équation : $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0$ et soit A le point de coordonnées $(1,1)$.

a) Vérifier que A appartient à Γ et trouver la tangente à la courbe en A.
b) Déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en A.

Exercice 11. Soient les surfaces S_1 et S_2 définies par : $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2y^2$ et soit B le point de coordonnées $(1,1,2)$.

a) Déterminer le plan tangent à S_1 en B, le plan tangent à S_2 en B.
b) Trouver la tangente en $(1,1)$ à la projection de $S_1 \cap S_2$ sur le plan xOy.

Université Paris 6 - Pierre et Marie Curie
Licence première année - LM110

2011/2012

Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles à variables séparées suivantes :

(a) $-xy'y^2 + (1-x^2) = 0$ (b) $y' + 2xy = 0$ (c) $y' + \dfrac{1}{x^2+1}y = 0,\ y(1) = 1$

(d) $x(x^2-1)y' + 2y = 0,$ (on déterminera a, b, $c \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$).

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles du premier ordre suivantes :

(a) $y' + 2xy = x$, $y(0) = 1$ (b) $(x^2-1)y' - xy = -1$ (c) $4xy' - y = \sqrt{x}$

(d) $xy' + y = e^x$ (déterminer les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Y a-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}$?)

Exercice 3. On se propose de résoudre sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1) Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2) Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle
$$(E_1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$
3) Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$.
4) Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4. 1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $x = 1$ de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}.$$

2) On considère l'équation différentielle (E) $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.
   a) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
   b) Montrer que (E) admet une unique solution g sur $\mathbb{R}$.
   c) La fonction dérivée g' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

(a) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ (b) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ (c) $y'' + y = xe^x$

(d) $y'' - y = -6\cos x + 2\sin x$ (e) $y'' - y = (x^2 + x + 1)e^x$ (f) $4y'' + 4y' + 5y = \sin x + e^{-x/2}$

(g) $y''(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}y'(x) + \dfrac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0$ (utiliser le changement de variable $t = \arctan x$)

Exercice 6. On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Trouver une solution particulière de (E) (expliquer votre démarche), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$. Vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 7. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1) Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à (E).
2) Trouver une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3) Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$