

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANÇOIS LOESER

Arrangements d'hyperplans et sommes de Gauss

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 24, n° 4 (1991), p. 379-400.

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_4_379_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS ET SOMMES DE GAUSS

PAR FRANÇOIS LOESER

Introduction

Soient p un nombre premier, $q = p^e$, $k = \mathbf{F}_q$ un corps fini. Soient ψ un caractère additif non trivial de k , χ_1, χ_2 des caractères multiplicatifs non triviaux, tels que $\chi_1 \chi_2$ soit non trivial. On a l'égalité classique entre sommes de Gauss et sommes de Jacobi

$$(*) \quad J(\chi_1, \chi_2) = - \frac{g(\chi_1, \psi) g(\chi_2, \psi)}{g(\chi_1 \chi_2, \psi)}$$

avec $J(\chi_1, \chi_2) := \sum_{x \in k \setminus \{0, 1\}} \chi_1(x) \chi_2(1-x)$ et $g(\chi, \psi) := - \sum_{x \in k^*} \chi(x) \psi(x)$ pour χ un caractère multiplicatif.

Dans cet article nous généralisons la formule (*) aux arrangements d'hyperplans dans l'espace affine. La somme de Jacobi $J(\chi_1, \chi_2)$ possède une interprétation cohomologique comme trace du Frobenius sur la cohomologie à support propre d'un certain $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{L}_{(\chi_1, \chi_2)}$, sur $k \setminus \{0, 1\}$. Comme $H_c^i(\mathbf{A}_k^1, \mathcal{L}_{(\chi_1, \chi_2)})$ est nul si $i \neq 1$, de rang 1 si $i = 1$, cette trace est aussi un déterminant. En général si $A = (l_i)_{i \in I}$ est une famille d'applications affines non constantes $l_i: \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$, à chaque famille $(\chi_i)_{i \in I}$ de caractères multiplicatifs $\chi_i: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est associé un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1, \mathcal{L}_χ , sur $\mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in I} l_i^{-1}(0)$. Le résultat principal de cet article est l'égalité (2.2.1) qui exprime le

déterminant du Frobenius agissant sur la cohomologie à support propre de \mathcal{L}_χ comme produit de valeurs des caractères χ_i et de sommes de Gauss. Ce résultat nous a été inspiré par un travail récent de Varchenko [V], qui généralise la relation classique entre fonction bêta et fonction gamma à des arrangements d'hyperplans réels ou complexes.

Le plan de l'article est le suivant. Après les préliminaires (§0-1) et l'énoncé du résultat principal (§2) nous rappelons des résultats sur la monodromie locale (§3). Au paragraphe 5 nous établissons le résultat important (5.5) sur le comportement du déterminant par torsion. Pour cela nous utilisons les transformations de Fourier locales de G. Laumon [L], dont les propriétés sont rappelées au paragraphe 4, et sa formule de localisation [L]. La section suivante (§6) est de nature combinatoire. On y montre par un argument de type « deletion-restriction » que l'égalité (2.2.1) est conséquence de la

proposition (6.4), qui sera démontré au §8, en utilisant (5.5) et l'étude géométrique d'une résolution associée à l'arrangement A effectuée au §7. L'appendice rassemble des résultats sur les arrangements d'hyperplans définis sur \mathbf{F}_q que nous n'avons pas trouvés dans la littérature.

Je tiens à remercier A. Varchenko qui m'a communiqué le texte (en russe) de [V] avant sa parution, J.-M. Kantor dont l'aide m'a permis de lire ce texte, et G. Laumon pour d'utiles conversations.

0. Notations et conventions

(0.1) On fixe un nombre premier p . Dans tout cet article k est un corps fini $k = \mathbf{F}_q$, avec q une puissance de p . On note \bar{k} une clôture algébrique de k . Si $N \geq 1$ on note $\mu_N(k)$ [resp. $\mu_N(\bar{k})$] le sous-groupe des racines n -ièmes de l'unité du groupe multiplicatif k^* (resp. \bar{k}^*).

On choisit un nombre premier l distinct de p et une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_l$ de \mathbf{Q}_l .

(0.2) On note $\mathbf{G}_{m,k}^n$ le tore $\text{Spec } k[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$, \mathbf{A}_k^n l'espace affine $\text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ et \mathbf{P}_k^n l'espace projectif de dimension n sur k muni de coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$. On a des inclusions naturelles $\gamma: \mathbf{G}_{m,k}^n \rightarrow \mathbf{A}_k^n$, $\alpha: \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{P}_k^n$, $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow [x_1, \dots, x_n, 1]$, et $\beta := \alpha \circ \gamma: \mathbf{G}_{m,k}^n \rightarrow \mathbf{P}_k^n$.

(0.3) Si V est un schéma sur $k' \subset \bar{k}$ on note $V_{\bar{k}}$ le schéma obtenu par extension des scalaires $V_{\bar{k}} := V \otimes_{\text{Spec } k'} \text{Spec } \bar{k}$. Si s est un point de V , on note \bar{s} un point géométrique

localisé en s et $V_{(s)}$ le hensélisé de V en s . Si V est un schéma défini sur \bar{k} on note $\chi(V, \mathbf{Q}_l)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de V en cohomologie étale l -adique. On convient que $\chi(\emptyset, \mathbf{Q}_l) = 0$.

(0.4) Si V est un espace vectoriel de dimension finie d on note $\Lambda^{\max} V := \Lambda^d V$, et $(\Lambda^{\max} V)^{-1}$ le dual de $\Lambda^{\max} V$. Si \mathbf{K}^* est un complexe borné d'espaces vectoriels de dimension finie on note $\det \mathbf{K}^* = \otimes_{i \in \mathbf{Z}} (\Lambda^{\max} \mathbf{H}^i \mathbf{K}^*)^{(-1)^i}$. Si F est un endomorphisme de \mathbf{K}^* ,

F induit un endomorphisme de $\det \mathbf{K}^*$ qui est la multiplication par un scalaire que l'on note $\det(F, \mathbf{K}^*)$.

(0.5) On note Frob_q le Frobenius géométrique de k .

(0.6) Si $\psi: k \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est un caractère additif non trivial, on note \mathcal{L}_ψ le faisceau d'Artin-Schreier associé à ψ . C'est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 sur \mathbf{A}_k^1 . Si $\chi: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ est un caractère multiplicatif on note \mathcal{L}_χ le faisceau de Kummer associé à χ . C'est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{G}_{m,k}^1$. Si ψ (resp. χ) est un caractère additif non-trivial (resp. un caractère multiplicatif) on note $g(\chi, \psi)$ la somme de Gauss

$$g(\chi, \psi) := - \sum_{x \in k^*} \chi(x) \psi(x).$$

Avec nos conventions, la formule des traces de Grothendieck donne

$$g(\chi, \psi) = \text{tr}(\text{Frob}_q, \mathbf{H}_c^1(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}^1, \mathcal{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathcal{L}_\psi)) = \det(\text{Frob}_q, \mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_{m,\bar{k}}^1, \mathcal{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathcal{L}_\psi))^{-1}.$$

Si $\pi: V \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ est un morphisme on note $\mathcal{L}_\psi(\pi) := \pi^* \mathcal{L}_\psi$.

(0.7) On s'autorisera parfois à noter de la même façon un morphisme et sa restriction.

1. Arrangements d'hyperplans

(1.1) Soit $k = \mathbf{F}_q$ un corps fini. On note \mathbf{A}_k^n l'espace affine de dimension n sur k . On note $\alpha: \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle (0.2) dans l'espace projectif et H_∞ l'hyperplan projectif $\mathbf{P}_k^n \setminus \mathbf{A}_k^n$.

Un arrangement d'hyperplans affines (défini sur k) est une famille finie $A = (l_i)_{i \in I}$ d'applications (linéaires) affines définies sur k , $l_i: \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$, non constantes. On note A_i l'hyperplan affine d'équation $l_i = 0$.

Un arrangement d'hyperplans projectifs (défini sur k) est une famille finie d'hyperplans projectifs de \mathbf{P}_k^n .

A un arrangement affine $A = (l_i)_{i \in I}$ on associe l'arrangement projectif $\tilde{A} := (H_i)_{i \in \bar{I}}$, en notant H_i l'adhérence de A_i dans \mathbf{P}_k^n pour $i \in I$ et $\bar{I} := I \cup \{\infty\}$.

(1.2) Soit $\tilde{A} = (H_i)_{i \in \bar{I}}$ un arrangement projectif. On appelle strate de l'arrangement \tilde{A} toute partie non vide de la forme $S_J = \bigcap_{i \in J} H_i \setminus \bigcup_{j \notin J} H_j$ avec $J \subset \bar{I}$ non vide. Si S est une

strate de \tilde{A} on note $I(S) := \{i \in \bar{I}; S \subset H_i\}$. On note $\mathcal{S}(\tilde{A})$ l'ensemble des strates de \tilde{A} . Si $\tilde{A} = \tilde{A}$, avec A un arrangement affine, on a une partition $\mathcal{S}(\tilde{A}) = \mathcal{S}_f(A) \cup \mathcal{S}_\infty(A)$, avec $\mathcal{S}_f(A)$ [resp. $\mathcal{S}_\infty(A)$] l'ensemble des strates de \tilde{A} non contenues (resp. contenues) dans H_∞ .

(1.3) Soient \tilde{A} un arrangement projectif, S une strate de \tilde{A} , et $\mathbf{P}^S := \bigcap_{i \in I(S)} H_i$. Les

hyperplans $H_i \cap \mathbf{P}^S$, $i \notin I(S)$, définissent un arrangement d'hyperplans projectifs dans \mathbf{P}^S que l'on note \tilde{A}^S .

Rappelons que si F_k est un sous-espace projectif de dimension m dans \mathbf{P}_k^n on a une projection $\pi_{F_k}: \mathbf{P}_k^n \setminus F_k \rightarrow G_k$ avec G_k un espace projectif sur k de dimension $n - m - 1$ (G_k est l'espace projectif des $m + 1$ -plans de \mathbf{P}_k^n qui contiennent F_k): si F_k est défini dans des coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ par $x_0 = \dots = x_{n-m-1} = 0$, on a $\pi_{F_k}([x_0, \dots, x_n]) = [x_0, \dots, x_{n-m-1}]$. On a donc une projection $\pi(S): \mathbf{P}_k^n \setminus \mathbf{P}^S \rightarrow \mathbf{P}_S$, avec \mathbf{P}_S un espace projectif de dimension $n - \dim \mathbf{P}^S - 1$. Les hyperplans $\pi(S)$ ($H_i \setminus \mathbf{P}^S$), $i \in I(S)$, définissent un arrangement projectif d'hyperplans \tilde{A}_S dans \mathbf{P}_S .

(1.4) Si $\tilde{A} = (H_i)_{i \in \bar{I}}$ est un arrangement projectif défini sur k , on pose $Y = \bigcup_{i \in \bar{I}} H_i$, $V = \mathbf{P}_k^n \setminus Y$ et $j: V \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle. On note $\lambda(\tilde{A})$ la caractéristique

d'Euler-Poincaré l -adique de $V_{\bar{k}}$: $\lambda(\tilde{A}) = \chi(V_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$; l'entier $\lambda(\tilde{A})$ ne dépend que de la combinatoire de l'arrangement \tilde{A} (cf. Appendice).

Si S est une strate de \tilde{A} on pose $\mu(S, \tilde{A}) = \lambda(\tilde{A}^S) \lambda(\tilde{A}_S)$.

(1.5) Soit $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement affine. On supposera désormais que A vérifie la condition

$$(1.5.1) \quad \bigcap_{i \in \bar{I}} H_i = \emptyset.$$

Remarquons que cette condition impose que $|I| \geq n$.

Soit $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i : k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$.

On supposera désormais que χ vérifie la condition

(1.5.2) pour toute partie J de \bar{I} non vide et distincte de \bar{I} on a $\prod_{i \in J} \chi_i \neq 1$.

Si $S \in \mathcal{S}(\bar{A})$ on pose $\chi_S := \prod_{i \in I(S)} \chi_i$. Les conditions (1.5.1) et (1.5.2) assurent que $\chi_S \neq 1$.

(1.5.3) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement d'hyperplans affines et $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$. On associe à A et à χ le produit de sommes de Gauss

$$g(A, \chi, \psi) := \prod_{S \in \mathcal{S}_f(A)} g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} \prod_{S \in \mathcal{S}_\infty(A)} g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})}.$$

(1.5.4) Si t est un point fermé de \mathbf{A}_k^1 on note $\lambda_i(t) := \chi(V_{\bar{k}} \cap l_i^{-1}(t)_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$. Soit $S_i = \{t \in k (= \mathbf{A}_k^1(k)) ; \exists S \subset \mathcal{S}_f(A), S \subset l_i^{-1}(t)\}$. On voit facilement (cf. Appendice) que sur l'ouvert $U_i := \mathbf{A}_k^1 \setminus S_i$ la fonction $\lambda_i(t)$ est constante; on note $\lambda_{i,g}$ sa valeur. On pose $\delta_i(t) := \lambda_{i,g} - \lambda_i(t)$, et on note $S_i^* := S_i \setminus \{0\}$.

(1.5.5) En conservant les notations précédentes, on pose

$$C_i(A, \chi_i) := \prod_{t \in S_i^*} (\chi_i(t))^{\delta_i(t)}$$

et

$$C(A, \chi) := \prod_{i \in I} C_i(A, \chi_i).$$

2. Énoncé du résultat. Exemples

(2.1) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement d'hyperplans affines défini sur k et $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i : k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$. Sur $V = \mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$

on a un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 associé à χ , $\mathcal{L}_\chi := \otimes_{i \in I} l_{i|V}^*(\mathcal{L}_{\chi_i})$.

(2.2) THÉORÈME. — Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement d'hyperplans affines défini sur k vérifiant (1.5.1) et $\chi = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i : k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$ et (1.5.2). On a l'égalité

(2.2.1) $\det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_\chi))^{-1} = C(A, \chi) g(A, \chi, \psi).$

Le théorème sera démontré en (6.5).

(2.3) Exemples.

(2.3.1) Dans \mathbf{A}_k^n , $A = (l_1, \dots, l_{n+1})$ avec $l_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$, $l_{n+1} = 1 - x_1 - \dots - x_n$.

Dans ce cas la cohomologie de $R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})$ est concentrée en degré n et de rang 1. Le déterminant est donc une trace et on retrouve la formule classique

$$J(\chi_1, \dots, \chi_{n+1}) = (-1)^n \frac{\prod_{1 \leq i \leq n+1} g(\chi_i, \psi)}{g\left(\prod_{1 \leq i \leq n+1} \chi_i, \psi\right)}$$

avec

$$J(\chi_1, \dots, \chi_{n+1}) := \sum_{x \in V(k)} \prod_{1 \leq i \leq n+1} \chi_i(l_i(x)).$$

(2.3.2) Dans A_k^2 , $A = (l_1, \dots, l_5)$ avec

$$l_1 = x_1, \quad l_2 = x_2, \quad l_3 = 1 - x_1, \quad l_4 = 1 - x_2, \quad l_5 = x_1 - x_2.$$

On a

$$g(A, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{\left(\prod_{1 \leq i \leq 5} g(\chi_i, \psi) \right) g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi)}{g\left(\prod_{1 \leq i \leq 5} \chi_i, \psi\right) g(\chi_1 \chi_3 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_4 \chi_5, \psi)} \right)^{-1}$$

$$C(A, \underline{\chi}) = \chi_5(-1).$$

(2.3.3) Dans A_k^2 , $A = (l_1, \dots, l_6)$ avec

$$l_1 = x_1, \quad l_2 = x_2, \quad l_3 = 1 - x_1, \quad l_4 = 1 - x_2, \quad l_5 = x_1 - x_2, \quad l_6 = x_1 + x_2 - 1.$$

Si $p \neq 2$, on a

$$g(A, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{\left(\prod_{1 \leq i \leq 4} g(\chi_i, \psi) \right) g(\chi_5, \psi)^2 g(\chi_6, \psi)^2}{g\left(\prod_{1 \leq i \leq 6} \chi_i, \psi\right)^2 g(\chi_2 \chi_4 \chi_5 \chi_6, \psi)} \right)^{-1}$$

$$\frac{g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_3 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_4 \chi_6, \psi)}{g(\chi_1 \chi_3 \chi_5 \chi_6, \psi)}$$

$$\text{et } C(A, \underline{\chi}) = \prod_{1 \leq i \leq 4} \chi_i(2).$$

Si $p = 2$, on a

$$g(A, \underline{\chi}, \psi) = \left(\frac{\left(\prod_{1 \leq i \leq 6} g(\chi_i, \psi) \right) g(\chi_1 \chi_2 \chi_5, \psi) g(\chi_3 \chi_4 \chi_5, \psi) g(\chi_2 \chi_3 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_4 \chi_6, \psi)}{g\left(\prod_{1 \leq i \leq 6} \chi_i, \psi\right) g(\chi_2 \chi_4 \chi_5 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_3 \chi_5 \chi_6, \psi) g(\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4, \psi)} \right)^{-1}$$

$$\text{et } C(A, \underline{\chi}) = 1.$$

3. Monodromie locale

(3.1) Soit $T = \text{Spec } R$ un trait hensélien d'égale caractéristique p , de corps résiduel k . On note $t, \eta, \bar{t}, \bar{\eta}$ les points ordinaires et les points géométriques de T : \bar{t} est le composé de $\text{Spec } \bar{k} \rightarrow \text{Spec } k$ et de t et $\bar{\eta}$ se factorise par le point générique $\eta_{\bar{t}}$ du trait strictement hensélien $T_{\bar{t}} = \text{Spec } \bar{k} \otimes_k R$. On pose $G = \pi_1(\eta, \bar{\eta})$, $I = \pi_1(\eta_{\bar{t}}, \bar{\eta})$. On a une suite exacte canonique

$$1 \rightarrow I \rightarrow G \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 1.$$

L'action de I sur les racines d'ordre premier à p d'une uniformisante π dans $k(\bar{\eta})$ se factorise par un quotient canonique

$$I \xrightarrow{t} \hat{Z}(1)(\bar{k}),$$

où

$$\hat{Z}(1)(\bar{k}) := \varprojlim_{\substack{N \geq 1 \\ (N, p) = 1}} \mu_N(\bar{k})$$

et où $\mu_N(\bar{k})$ agit de la manière usuelle sur les $\pi^{1/N}$. On note P le noyau de t ; c'est la partie sauvage de I .

(3.2) Un G -module (resp. I -module) est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -espace vectoriel de dimension finie V , muni d'une action de G (resp. I) qui est définie sur une extension finie de \mathbf{Q}_l contenue dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$ et qui est continue pour la topologie l -adique. Le rang d'un G -module (ou I -module) V est sa dimension comme $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -espace vectoriel que l'on note $r(V)$. Si V est un G -module, on note $V^\vee = \text{Hom}(V, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ le G -module dual. On note \mathcal{G} la catégorie des G -modules.

Un G -module (ou I -module) V est dit modéré si P agit trivialement sur V . Un G -module V est dit non ramifié si I agit trivialement sur V .

Soit $\pi: \eta \rightarrow G_{m,k} = \text{Spec } k[u, u^{-1}]$ le morphisme qui envoie u sur π . On note V_χ le G -module $\pi^*(\mathcal{L}_\chi)$, pour un caractère $\chi: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$.

Comme $\hat{Z}(1)(\bar{k})$ est un groupe profini abélien, tout I -module modéré simple est de rang 1 et sa classe d'isomorphie est donnée par un caractère $\chi: \hat{Z}(1)(\bar{k}) \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$. Soit V un G -module modéré semi-simple. On dit que V est à monodromie géométrique définie sur k s'il admet une décomposition

$$V = \bigoplus (V_\chi \otimes_{\bar{\mathbf{Q}}_l} E(V)_\chi)$$

χ décrivant l'ensemble des caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$, et $E(V)_\chi$ étant le G -module non ramifié $E(V)_\chi = \text{Hom}_I(V_\chi, V)$. En général si V est un G -module modéré, on note V_{ss} son semi-simplifié, on dit que V est à monodromie géométrique définie sur k si V_{ss} l'est, et on note $E(V)_\chi := E(V_{ss})_\chi$.

(3.3) Soient X un schéma lisse et irréductible défini sur k , et $D \subset X$ un diviseur (globalement) à croisements normaux. On note D_i , $i \in K$, les composantes irréductibles de D , x_i le point générique de D_i , $X_{(x_i)}$ le hensélisé de X au point x_i . On note G_i le groupe de Galois de $X_{(x_i)}$, I_i le groupe de décomposition et $h_i: X_{(x_i)} \rightarrow X$ l'inclusion canonique.

Soit \mathcal{L} un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau sur X (ou sur $X \setminus D$). On dit que \mathcal{L} est modérément ramifié le long de D si pour tout $i \in K$, $h_i^*(\mathcal{L})$ est un I_i -module modéré. Si \mathcal{L} est modérément ramifié le long de D et de rang 1 au point générique de X , on dit que \mathcal{L} est de monodromie géométrique χ_i le long de D_i , si le I_i -module $h_i^*(\mathcal{L})$ est donné par le caractère $\chi_i: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$.

(3.4) Nous aurons besoin du lemme suivant pour calculer des cycles évanescents.

LEMME. — Soit $\mathbf{A}_{k(0)}^n$ le hensélisé à l'origine de l'espace affine $\mathbf{A}_k^n = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$. Fixons des entiers $1 \leq k \leq m \leq n$. Soient $D \subset \mathbf{A}_{k(0)}^n$ le diviseur d'équation $\prod_{1 \leq i \leq m} x_i = 0$, D_i le diviseur d'équation $x_i = 0$, $1 \leq i \leq m$, $D_i^0 := D_i \setminus \bigcup_{j \neq i} D_j$. Soit $f: \mathbf{A}_{k(0)}^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ un morphisme $f: (x_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow u \prod_{1 \leq i \leq k} x_i$, avec u inversible sur $\mathbf{A}_{k(0)}^n$. Soit \mathcal{L} un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}_{k(0)}^n \setminus D$, modérément ramifié le long de D et de monodromie géométrique χ_i le long de D_i . On note $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})$ les faisceaux de cycles proches de \mathcal{L} relativement à f . On a

(i) Les faisceaux $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})$ sont des faisceaux de G -modules modérés.

(ii) Si pour tous les (i, j) avec $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ et $i \neq j$ on a $\chi_i \neq \chi_j$ et si quand $k < i \leq m$ on a $\chi_i \neq 1$, alors $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})_{(\bar{x})} = 0$ pour tout $p \geq 0$ et pour tout point x de $\bigcup_{1 \leq i \leq k} D_i \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k} D_i^0$.

(iii) Si x est un point de D_i^0 , avec $1 \leq i \leq k$, $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})_{(\bar{x})} = 0$ pour $p > 0$, et le G -module $\mathbf{R}^0 \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})_{(\bar{x})}$ est de rang 1, l'action de I étant donnée par χ_i .

(iv) La restriction de $\mathbf{R}^0 \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})$ à D_i^0 , pour $1 \leq i \leq k$, est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 modérément ramifié le long de $D_i \setminus D_i^0$, de monodromie géométrique $\chi_i^{-1} \chi_j$ (resp. χ_j) le long de $D_i \cap D_j$ si $i \neq j$ et si $j \leq k$ (resp. $k < j$).

Démonstration. — Soit N un multiple commun non nul de l'ordre des caractères χ_i . Soit $\lambda: \mathbf{A}_{k(0)}^n \rightarrow \mathbf{A}_{k(0)}^n$, $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow (x_i^N)_{1 \leq i \leq n}$. L'image inverse de \mathcal{L} par λ se prolonge en un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1, $\tilde{\mathcal{L}}$, sur $\mathbf{A}_{k(0)}^n$. Soit $g := f \circ \lambda: \mathbf{A}_{k(0)}^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$. On note $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathcal{L}})$ les faisceaux de cycles proches de $\tilde{\mathcal{L}}$ relativement à g . L'entier N étant premier à p , les $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathcal{L}})$ sont modérés d'après [R-Z], Satz 2.23, et sont calculés dans (SGA 7I3.3). Comme $\mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L})$ est un facteur direct de $\lambda_* \mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathcal{L}})$ on obtient (i). Le groupe du revêtement λ agit sur $\lambda_* \mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathcal{L}})$. En décomposant $\lambda_* \mathbf{R}^p \psi_{\bar{\eta}_0}(\tilde{\mathcal{L}})$ en composants isotypiques et en utilisant l'énoncé et la preuve de (SGA 7I3.3) on obtient (ii), (iii) et (iv).

4. Transformation de Fourier locale

(4.1) Soient T et T' deux traits henséliens d'égale caractéristique p , de corps résiduel k , munis d'uniformisantes π et π' respectivement. On note pr et pr' les projections canoniques de $T \times_k T'$ sur T et T' respectivement. On a les $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceaux $\mathcal{L}_\psi(\pi/\pi')$ et $\mathcal{L}_\psi(\pi'/\pi)$ sur $T \times_k \eta'$ et $\eta \times_k T'$ respectivement, où η et η' sont les points génériques de T et T' respectivement; on note $\bar{\mathcal{L}}_\psi(\pi/\pi')$ et $\bar{\mathcal{L}}_\psi(\pi'/\pi)$ les prolongements par zéro de ces faisceaux à $T \times_k T'$. On reprend les notations de la section précédente, en les affectant d'un exposant ' quand elles sont relatives à T' . Enfin si V est un G -module, on l'identifie à un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau sur η , et on note V_l son prolongement par zéro à T .

(4.2) DÉFINITION (LAUMON). — On appelle transformation de Fourier locale chacun des foncteurs $\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}$ et $\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}$: $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ définis par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V}) &= \mathbf{R}^1 \Phi_{\bar{\eta}'}(pr^*(\mathbf{V}_l) \otimes \bar{\mathcal{L}}_\psi(\pi/\pi'))_{(\bar{t}, \bar{t}')} \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V}) &= \mathbf{R}^1 \Phi_{\bar{\eta}}(pr^*(\mathbf{V}_l) \otimes \bar{\mathcal{L}}_\psi(\pi'/\pi))_{(\bar{t}, \bar{t}')} \end{aligned}$$

les cycles évanescents étant relatifs à la projection $pr': T \times_k T' \rightarrow T'$.

D'après [L], (2.4.3), $\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}$ et $\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}$ sont des foncteurs exacts. De plus si V est modéré $\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V})$ et $\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V})$ sont modérés.

On a le formulaire suivant.

(4.3) PROPOSITION :

$$(i) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\bar{\mathbf{Q}}_l) = \bar{\mathbf{Q}}_l \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\bar{\mathbf{Q}}_l) = \bar{\mathbf{Q}}_l(-1). \end{cases}$$

(ii) Pour tout caractère non trivial $\chi: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V}_\chi) &= \mathbf{V}'_\chi \otimes G(\chi, \psi) \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V}_\chi) &= \mathbf{V}'_\chi \otimes G(\chi^{-1}, \psi) \end{aligned}$$

où $G(\chi, \psi) = H_c^1(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}, \mathcal{L}_\chi \otimes \gamma^* \mathcal{L}_\psi)$ est vu comme un G' -module non ramifié.

(iii) Si E est un G -module non ramifié

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V} \otimes E) &= \mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V}) \otimes E' \\ \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V} \otimes E) &= \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V}) \otimes E' \end{aligned}$$

où E' est égal à E vu comme G' -module non ramifié.

Démonstration. — (i) et (ii) sont dus à Laumon ([L] (2.5.3.1)), et (iii) est évident.

(4.4) DÉFINITION. — Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$ on pose

$$\begin{aligned}\Phi_0(\chi_1, \chi_2) &= \mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V}_{\chi_1 \chi_2^{-1}})^\vee \otimes \mathcal{F}_\psi^{(0, \infty')}(\mathbf{V}_{\chi_1}) \\ \Phi_\infty(\chi_1, \chi_2) &= \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V}_{\chi_1 \chi_2^{-1}})^\vee \otimes \mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0')}(\mathbf{V}_{\chi_1}). \end{aligned}$$

(4.5) PROPOSITION. — Pour tout G -module V , modéré et à monodromie définie sur k , pour tout caractère non trivial $\chi_0 : k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ on a

$$\det(\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty)}(V)) = \det(\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty)}(V \otimes V_{\chi_0^{-1}})) \otimes \bigotimes_x (\Phi_0(\chi, \chi_0))^{\otimes r(E(V)_x)}$$

$$\det(\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0)}(V)) = \det(\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0)}(V \otimes V_{\chi_0^{-1}})) \otimes \bigotimes_x (\Phi_\infty(\chi, \chi_0))^{\otimes r(E(V)_x)}.$$

Démonstration. — Comme $\det(\mathcal{F}_\psi^{(\dots)}(V)) = \det(\mathcal{F}_\psi^{(\dots)}(V_{ss}))$ on peut supposer que $V = V_x \otimes E_x$ avec E_x non ramifié. L'énoncé est alors une conséquence de (4.3) (iii) et de ce que $V_{x_1 x_2} \cong V_{x_1} \otimes V_{x_2}$.

5. Déterminant et torsion

(5.1) LOCALISATION DU DÉTERMINANT.

(5.1.1) Soient $\alpha : \mathbf{A}_k^1 = \text{Spec } k[x] \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ l'inclusion naturelle (0.2), ∞ le point à l'infini. On note $\mathbf{A}_k^{1'}$, $\mathbf{P}_k^{1'}$ les droites duales.

Si V est un G -module, $\det(\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty)}(V))$ est un G' -module modéré qui admet un unique prolongement en un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}_k^{1'} \setminus \{0'\}$ modérément ramifié en $0'$ et ∞' ([L], (2.2.2.1) (3.4.1.2)). On note $\det(\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty)}(V))_\pi$ le $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ module de rang 1 fibre de ce prolongement au point géométrique $\bar{1}'$ de $\mathbf{A}_k^{1'}$. Si V est modéré, $\det(\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0)}(V))$ est un G' -module modéré et on peut définir de même $\det(\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0)}(V))_\pi$.

(5.1.2) Soient $S \subset \mathbf{A}_k^1$ un ensemble fini de points fermés rationnels sur k et $j : U \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ l'ouvert complémentaire. Soient $k\{\pi\}$ le hensélisé en (π) de l'anneau $k[\pi]$ et $T = \text{Spec } k\{\pi\}$ le trait hensélien correspondant. Notons $\pi_s = x - s$ l'isomorphisme $\pi_s : \mathbf{A}_k^1(s) \rightarrow T$, pour $s \in S$, et

$$\pi_\infty : \begin{cases} \mathbf{P}_k^{1(\infty)} \rightarrow T \\ 1/x \rightarrow x. \end{cases}$$

(5.1.3) Soit \mathcal{H} un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau sur \mathbf{A}_k^1 . On suppose que \mathcal{H} est lisse sur U et modérément ramifié en tout point de S et au point à l'infini. Pour $s \in S \cup \{\infty\}$ on note $\Phi_s \mathcal{H}$ le G -module des cycles évanescents de $\alpha_1(\mathcal{H})$ (pour π_s) et $a_s(\mathcal{H})$ la chute du rang de $\alpha_1(\mathcal{H})$ (la différence entre le rang générique et le rang en s). Si la fibre en s de \mathcal{H} est égale à zéro on a $\Phi_s \mathcal{H} = \pi_{s*}(\mathcal{H}|_{\eta_s})$.

(5.1.4) THÉORÈME. — Si \mathcal{H} est lisse sur U et modérément ramifié en tout point de S et au point à l'infini, on a un isomorphisme de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules de rang 1

(5.1.4.1)

$$\det(\mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, \mathcal{H})[1]) \cong \left(\bigotimes_{s \in S} \det(\mathcal{F}_\psi^{(0, \infty)}(\Phi_s \mathcal{H}))_\pi \right) \otimes \left(\det(\mathcal{F}_\psi^{(\infty, 0)}(\pi_{\infty*}(\mathcal{H}|_{\eta_\infty})))_\pi \right)^\vee.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de [L], (3.2.1.1) et (3.5.1.1). Voici une démonstration directe tout à fait similaire à celle de [L], (3.4.2).

Supposons tout d'abord que \mathcal{H} est de la forme $\mathcal{H} = j_!(F)$, avec F un faisceau lisse de rang r sur U modérément ramifié en les points de $S \cup \{\infty\}$. Soit $\delta = \sum_{s \in S} r_s \in k$. On a des

isomorphismes de G' -modules

$$(5.1.4.2) \quad \det(F')_{\bar{\eta}_0} \cong \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, \mathcal{H})[1]) \otimes \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(\infty, 0')}(\pi_{\infty*}(F|_{\eta_{\infty}})))$$

$$(5.1.4.3) \quad \det(F')_{\bar{\eta}_{\infty}} \cong \mathcal{L}_{\psi}(\delta x')_{\bar{\eta}_{\infty}} \otimes \bigotimes_{s \in S} \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(0, \infty')}(\Phi_s \mathcal{H}))$$

pour F' le $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse sur $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$ vérifiant $K'_{|\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}} = F'[1]$ avec K' le transformé de Fourier global de $\mathcal{H}[1]$ (cf. [L], (1.3.2.3) et (2.3.1.3) (i)).

Compte tenu de l'hypothèse faite sur \mathcal{H} , le faisceau $\mathcal{H} := \mathcal{L}_{\psi}(-\delta x') \otimes \det F'$ est lisse de rang 1 sur $\mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$, et est modérément ramifié en zéro et à l'infini. Comme

$$(5.1.4.4) \quad \mathcal{H}_{\bar{\eta}_0} \cong \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, \mathcal{H})[1]) \otimes \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(\infty, 0')}(\pi_{\infty*}(F|_{\eta_{\infty}})))$$

$$(5.1.4.5) \quad \mathcal{H}_{\bar{\eta}_{\infty}} \cong \bigotimes_{s \in S} \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(0, \infty')}(\Phi_s \mathcal{H}))$$

on obtient l'énoncé dans ce cas, car les deux termes de l'égalité recherchée sont isomorphes au $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules $\mathcal{H}_{\bar{\Gamma}}$. [on utilise ici que si \mathcal{L} est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse sur $\mathbf{G}_{m,k}^1$, modérément ramifié en 0 et à l'infini, les fibres en $\bar{\Gamma}$ du prolongement canonique ([L], (2.2.2.1)) de $\mathcal{L}|_{\eta_0}$ et de celui de $\pi_{\infty*}(\mathcal{L}|_{\eta_{\infty}})$ sont égales à la fibre de \mathcal{L} en $\bar{\Gamma}$, car la fonction $1/x$ évaluée en $x=1$ vaut 1!].

Le cas général s'en déduit car on a des isomorphismes de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules

$$(5.1.4.6) \quad \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, \mathcal{H})) \cong \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, j_! j^* \mathcal{H})) \otimes \bigotimes_{s \in S} \det(\mathcal{H}_{\bar{s}})$$

$$(5.1.4.7) \quad \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(0, \infty')}(\pi_{s*}(\mathcal{H}|_{\eta_s})))_{\pi'} \simeq \det(\mathcal{F}_{\psi}^{(0, \infty')}(\Phi_s \mathcal{H}))_{\pi'} \otimes \det(\mathcal{H}_{\bar{s}}).$$

L'isomorphisme (5.1.4.6) provient de la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow j_! j^* \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow i_* i^* \mathcal{H} \rightarrow 0$$

($i : s \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ étant l'inclusion naturelle) et de ce que le foncteur $\det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_k^1, \cdot))$ est multiplicatif sur les suites exactes.

L'isomorphisme (5.1.4.7) provient de la suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\bar{s}} \rightarrow \pi_{s*}(\mathcal{H}|_{\eta_s}) \rightarrow \Phi_s \mathcal{H} \rightarrow 0$$

et de ce que le foncteur $\det(\mathcal{F}_{\psi}^{(0, \infty')}(\cdot))$ est multiplicatif sur les suites exactes.

(5.2) On suppose désormais que U est contenu dans $\mathbf{G}_{m,k}^1 = \mathbf{A}_k^1 \setminus \{0\}$. On déduit de (4.5) et de (5.1.4) le résultat suivant.

THÉORÈME. — Soit \mathcal{H} un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau sur $\mathbf{G}_{m,k}^1$, lisse sur U et modérément ramifié en tout point de $\mathbf{P}_k^1 \setminus U$. On suppose que les G -modules $\mathcal{H}|_{\eta_0}$ et $\pi_{\infty*}(\mathcal{H}|_{\eta_{\infty}})$ sont à monodromie géométrique définie sur k . Soit $\chi_0 : k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ un caractère non trivial. On a un

isomorphisme de Gal(\bar{k}/k)-modules

$$(5.2.1) \quad \det(\mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{H}[1])) \cong \det(\mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}^1, (\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_{\chi_0^{-1}})[1])) \\ \otimes_{s \in S \setminus \{0\}} \otimes_{\chi} (V_{\chi_0}^s)^{\otimes a_s(\mathcal{H})} \otimes_{\chi} \Phi_0(\chi, \chi_0)_{\pi^r}^{\otimes r(E(\mathcal{H}|_{\eta_0})_{\chi})} \\ \otimes_{\chi} \Phi_{\infty}(\chi, \chi_0^{-1})_{\pi^r}^{\otimes -r(E(\pi_{\infty*}(\mathcal{H}|_{\eta_{\infty}}))_{\chi})}.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de (4.3) (iii), (4.5) et (5.1.4) [remarquer que $\mathcal{L}_{\chi_0|_{\eta_0}} = V_{\chi_0}$ et $\pi_{\infty*}(\mathcal{L}_{\chi|_{\eta_{\infty}}}) = V_{\chi_0^{-1}}$].

(5.3) DÉFINITION. — Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$. On suppose que χ_2 n'est pas trivial.

Si $\chi_1 \neq 1, \chi_1 \chi_2^{-1} \neq 1$, on pose

$$\Phi_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1, \psi)}{g(\chi_1 \chi_2^{-1}, \psi)} \\ \Phi_{\infty}(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1^{-1}, \psi)}{g(\chi_1^{-1} \chi_2, \psi)}.$$

Si $\chi_1 = 1$, on pose

$$\Phi_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{g(\chi_2^{-1}, \psi)} \\ \Phi_{\infty}(\chi_1, \chi_2) = \frac{q}{g(\chi_2, \psi)}.$$

Si $\chi_1 \chi_2^{-1} = 1$, on pose

$$\Phi_0(\chi_1, \chi_2) = g(\chi_1, \psi) \\ \Phi_{\infty}(\chi_1, \chi_2) = \frac{g(\chi_1^{-1}, \psi)}{q}.$$

L'énoncé suivant est immédiat.

(5.4) LEMME. — Soient χ_1 et χ_2 deux caractères de k^* à valeurs dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^*$. On suppose que χ_2 n'est pas trivial. On a

$$\det(\text{Frob}_q, \Phi_0(\chi_1, \chi_2)_{\pi^r}) = \Phi_0(\chi_1, \chi_2) \\ \det(\text{Frob}_q, \Phi_{\infty}(\chi_1, \chi_2)_{\pi^r}) = \Phi_{\infty}(\chi_1, \chi_2).$$

Le théorème (5.2) admet donc le corollaire suivant.

(5.5) COROLLAIRE. — Sous les hypothèses du théorème (5.2) on a

$$(5.5.1) \quad \det(\text{Frob}_q, \mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{H}))^{-1} = \det(\text{Frob}_q, \mathbf{R}\Gamma_c(\mathbf{G}_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_{\chi_0^{-1}}))^{-1} \\ \times \prod_{s \in S \setminus \{0\}} \chi_0(s)^{a_s(\mathcal{H})} \prod_{\chi} \Phi_0(\chi, \chi_0)^{r(E(\mathcal{H}|_{\eta_0})_{\chi})} \prod_{\chi} \Phi_{\infty}(\chi, \chi_0^{-1})^{-r(E(\pi_{\infty*}(\mathcal{H}|_{\eta_{\infty}}))_{\chi})}.$$

6. Réduction combinatoire

Dans cette section, de nature combinatoire, on ramène la preuve du théorème (2.2) à celle de la proposition clé (6.4).

(6.1) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement d'hyperplans affines et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in I}$ une famille de caractères multiplicatifs vérifiant $\prod_{i \in I} \chi_i = 1$. On choisit $i_0 \in I$, et on pose $I' := I \setminus \{i_0\}$. On

note A' l'arrangement $A' := (l_i)_{i \in I'}$ et $\underline{\chi}' := (\chi'_i)_{i \in I'}$ avec $\chi'_i = \chi_i$ si $i \in I'$, $\chi'_\infty = \chi_\infty \chi_{i_0}$.

(6.2) Deux cas sont possibles : soit pour tout $i \in I'$, $A_i \neq A_{i_0}$ (cas a); soit il existe $i \in I'$ tel que $A_i = A_{i_0}$ (cas b).

Dans le cas a, on pose $I'' := \{i \in I'; l_i|_{A_{i_0}} \text{ n'est pas constant}\}$. On note A'' l'arrangement d'hyperplans de A_{i_0} , $A'' := (l_i|_{A_{i_0}})_{i \in I''}$, et $\underline{\chi}'' := (\chi''_i)_{i \in I''}$ avec $\chi''_i = \chi_i$ si $i \in I''$, $\chi''_\infty = \chi_\infty \prod_{i \in I \setminus I''} \chi_i$; enfin on note s_i la valeur de l_i sur A_{i_0} , pour $i \in I' \setminus I''$.

On pose

$$J(i_0, S, \underline{\chi}) := \begin{cases} \left(\frac{g(\chi_S, \psi)}{g(\chi_S \chi_{i_0}^{-1}, \psi)} \right)^{\mu(S, \bar{A})} & \text{si } S \in \mathcal{S}_f(A) \\ \left(\frac{g(\chi_S^{-1}, \psi)}{g(\chi_S^{-1} \chi_{i_0}^{-1}, \psi)} \right)^{-\mu(S, \bar{A})} & \text{si } S \in \mathcal{S}_\infty(A) \end{cases}$$

et

$$J(i_0, \underline{\chi}) = \prod_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S = H_{i_0}}} J(i_0, S, \underline{\chi}) \prod_{\substack{S \in \mathcal{S}_\infty(A) \\ S = H_{i_0}}} J(i_0, S, \underline{\chi}).$$

(6.3) PROPOSITION. — Dans le cas a on a

$$(6.3.1) \quad g(A, \underline{\chi}, \psi) = g(A', \underline{\chi}', \psi) g(A'', \underline{\chi}'', \psi)^{-1} J(i_0, \underline{\chi})$$

$$(6.3.2) \quad C(A, \underline{\chi}) = C(A', \underline{\chi}') C(A'', \underline{\chi}'')^{-1} C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) \prod_{i \in I' \setminus I''} \chi_i(s_i)^{\lambda(\bar{A}'')}.$$

Dans le cas b on a

$$(6.3.3) \quad g(A, \underline{\chi}, \psi) = g(A', \underline{\chi}', \psi) J(i_0, \underline{\chi})$$

$$(6.3.4) \quad C(A, \underline{\chi}) = C(A', \underline{\chi}') C_{i_0}(A, \chi_{i_0}).$$

Démonstration. — Les égalités (6.3.2), (6.3.3) et (6.3.4) sont faciles à vérifier. Supposons donc qu'on est dans le cas a et démontrons (6.3.1). Pour cela on a besoin du lemme suivant.

(6.3.5) LEMME. — Soit S une strate de \bar{A} .

(i) Si S appartient à $\mathcal{S}(\bar{A}'')$ et à $\mathcal{S}(\bar{A}')$, alors

$$\mu(S, \bar{A}') = \mu(S, \bar{A}'') + \mu(S, \bar{A})$$

(ii) Si S appartient à $\mathcal{S}(\overline{A''})$ et n'appartient pas à $\mathcal{S}(\overline{A'})$, alors $\mu(S, \overline{A})=0$, et si T est la plus petite strate de $\overline{A'}$ contenant S , $T \setminus S$ est une strate de \overline{A} et on a $\mu(T, \overline{A'}) = \mu(T \setminus S, \overline{A}) + \mu(S, \overline{A''})$.

Démonstration. – (i) est clair car dans ce cas $\lambda(\overline{A'_S}) = \lambda(\overline{A_S}) + \lambda(\overline{A''_S})$.

Pour (ii) on remarque que si $S \in \mathcal{S}(\overline{A''})$ et $S \notin \mathcal{S}(\overline{A'})$, $\bigcap_{i \in I(S) \setminus \{i_0\}} H_i$ contient strictement \mathbf{P}^S , et donc $\bigcap_{i \in I(S) \setminus \{i_0\}} (\pi(S)(H_i \setminus \mathbf{P}^S))$ n'est pas vide. D'après (A.2) (iv) on a donc $\lambda(\overline{A_S}) = 0$ [choisir $\pi(S)(H_{i_0} \setminus \mathbf{P}^S)$ comme hyperplan à l'infini dans \mathbf{P}_S], d'où $\mu(S, \overline{A}) = 0$.

L'égalité $\mu(T, \overline{A'}) = \mu(T \setminus S, \overline{A}) + \mu(S, \overline{A''})$ est conséquence des égalités

$$\lambda(\overline{A'^T}) = \lambda(\overline{A'^T \setminus S}) + \lambda(\overline{A''^S}) \quad \text{et} \quad \lambda(\overline{A'_T}) = \lambda(\overline{A_{T \setminus S}}) = \lambda(\overline{A''_S}).$$

(6.3.6) Si S est une strate de \overline{A} , S vérifie une et une seule des conditions suivantes :

- 1° $S \in \mathcal{S}_f(A), \quad S \subset H_{i_0}, \quad S \in \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 2° $S \in \mathcal{S}_f(A), \quad S \subset H_{i_0}, \quad S \notin \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 3° $S \in \mathcal{S}_f(A), \quad S \not\subset H_{i_0}, \quad S \in \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 4° $S \in \mathcal{S}_f(A), \quad S \not\subset H_{i_0}, \quad S \notin \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 5° $S \in \mathcal{S}_\infty(A), \quad S \subset H_{i_0}, \quad S \in \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 6° $S \in \mathcal{S}_\infty(A), \quad S \subset H_{i_0}, \quad S \notin \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 7° $S \in \mathcal{S}_\infty(A), \quad S \not\subset H_{i_0}, \quad S \in \mathcal{S}(\overline{A'})$
- 8° $S \in \mathcal{S}_\infty(A), \quad S \not\subset H_{i_0}, \quad S \notin \mathcal{S}(\overline{A'})$

D'après (6.3.5) on a dans les cas 1° et 5°

$$\mu(S, \overline{A'}) = \mu(S, \overline{A}) + \mu(S, \overline{A''})$$

dans les cas 2° et 6°

$$\mu(S, \overline{A}) = 0$$

dans les cas 3° et 7°

$$\mu(S, \overline{A}) = \mu(S, \overline{A'})$$

dans les cas 4° et 8°

si \overline{S} est la plus petite strate de A' contenant S , $\overline{S} \setminus S$ est une strate de \overline{A} et de $\overline{A''}$ et on a $\mu(\overline{S}, \overline{A'}) = \mu(S, \overline{A}) + \mu(\overline{S} \setminus S, \overline{A''})$; de plus si $S \in \mathcal{S}_f(A)$ [resp. $\mathcal{S}_\infty(A)$], $\overline{S} \in \mathcal{S}_f(A')$ [resp. $\mathcal{S}_\infty(A')$].

D'autre part on a

dans le cas 1°

$$\chi'_S = \chi''_S = \chi_S \chi_{i_0}^{-1}$$

dans le cas 2°

$$\chi''_S = \chi_S \chi_{i_0}^{-1}$$

dans le cas 3°

$$\chi_S = \chi'_S$$

dans le cas 4°

$$\chi_S = \chi'_S = \chi''_{S \setminus s}$$

dans le cas 5°

$$\chi_S = \chi'_S = \chi''_S$$

dans le cas 6°

$$\chi_S = \chi''_S$$

dans le cas 7°

$$\chi'_S = \chi_S \chi_{i_0}$$

dans le cas 8°

$$\chi'_S = \chi''_{S \setminus s} = \chi_{i_0} \chi_S.$$

De tout cela on déduit que

dans le cas 1°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A}')} g(\chi''_S, \psi)^{-\mu(S, \bar{A}'')} J(i_0, S, \underline{\chi})$$

dans le cas 2°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = 1 (= J(i_0, S, \underline{\chi}))$$

dans le cas 3°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_S, \psi)^{\mu(\bar{S}, \bar{A}')} g(\chi''_S, \psi)^{-\mu(\bar{S}, \bar{A}'')}$$

dans le cas 4°

$$g(\chi_S, \psi)^{\mu(S, \bar{A})} = g(\chi'_S, \psi)^{\mu(\bar{S}, \bar{A}')} g(\chi''_{S \setminus s}, \psi)^{-\mu(\bar{S} \setminus s, \bar{A}'')}$$

dans le cas 5°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_S'^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A}')} g(\chi_S''^{-1}, \psi)^{\mu(S, \bar{A}'')}$$

dans le cas 6°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = 1$$

dans le cas 7°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_S'^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A}')} J(i_0, S, \underline{\chi})$$

dans le cas 8°

$$g(\chi_S^{-1}, \psi)^{-\mu(S, \bar{A})} = g(\chi_S'^{-1}, \psi)^{-\mu(\bar{S}, \bar{A}')} g(\chi_{\bar{S} \setminus S}''^{-1}, \psi)^{\mu(\bar{S} \setminus S, \bar{A}'')} J(i_0, S, \underline{\chi}).$$

On obtient l'égalité (6.3.1) en faisant le produit de ces huit égalités.

(6.4) Le résultat suivant sera démontré dans la section 8.

PROPOSITION CLÉ. — Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement d'hyperplans affines vérifiant (1.5.1) et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$ et (1.5.2).

(i) Soit $i_0 \in I$ tel que pour tout $i \neq i_0$, $A_i \neq A_{i_0}$. Supposons que A' et A'' (resp. $\underline{\chi}'$ et $\underline{\chi}''$) vérifient la condition (1.5.1) [resp. (1.5.2)]. Alors on a

$$(6.4.1) \quad \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}}))^{-1} = \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}', \mathcal{L}_{\underline{\chi}'}))^{-1} \\ \times \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}'', \mathcal{L}_{\underline{\chi}''})) C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) \prod_{i \in I' \setminus I''} \chi_i(s_i)^{\lambda(\bar{A}'')} J(i_0, \underline{\chi}).$$

(ii) Soit $i_0 \in I$ tel qu'il existe $i \neq i_0$ avec $A_i = A_{i_0}$. Alors on a

$$(6.4.2) \quad \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}}))^{-1} = \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_{\bar{k}}', \mathcal{L}_{\underline{\chi}'}))^{-1} C_{i_0}(A, \chi_{i_0}) J(i_0, \underline{\chi}).$$

(6.5) Démonstration du théorème (2.2). — On va démontrer le théorème par récurrence sur $(n, |I|)$, \mathbf{N}^2 étant muni de l'ordre lexicographique. Le théorème est clair si $n=0$. D'autre part on a déjà remarqué que la condition (1.5.1) impose que $|I| \geq n$. Si $|I|=n$, les hyperplans A_i , $i \in I$, sont nécessairement distincts et en position générale d'après la condition (1.5.1). Dans ce cas l'égalité (2.2.1) devient $1=1$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $n_0 \geq 1$ et $N_0 \geq n_0 + 1$ fixés, si le théorème (2.2) est vérifié pour tous les arrangements de A_k^n avec $n < n_0$, et tous les arrangements de $A_k^{n_0}$ avec $|I| < N_0$, il est vérifié pour tous les arrangements de $A_k^{n_0}$ avec $|I| = N_0$.

Soient A un arrangement dans $A_k^{n_0}$ vérifiant (1.5.1) et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$, avec $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$, vérifiant (1.5.2).

Si l est une équation affine on note \bar{l} la forme linéaire associée. La condition (1.5.1) est équivalente à ce que le rang de la famille $(\bar{l}_i)_{i \in I}$ soit égal à n_0 . Par conséquent il existe $J \subset I$ avec $|J|=n_0$ tel que $\bigcap_{j \in J} H_j = \emptyset$. Choisissons $i_0 \in I \setminus J$. Si $A_i \neq A_{i_0}$ pour $i \in I'$

(cas a), il est alors clair que A' et A'' vérifient (1.5.1) et que $\underline{\chi}'$ et $\underline{\chi}''$ vérifient (1.5.2). Dans le cas b il est de toute façon automatique que A' vérifie (1.5.1) et que $\underline{\chi}'$ vérifie (1.5.2). On peut donc appliquer la proposition (6.4). En utilisant l'hypothèse de récurrence et la proposition (6.3) on obtient alors que l'égalité (2.2.1) est vérifiée par A et $\underline{\chi}$.

7. Étude d'une résolution

(7.1) Soient $\tilde{A} = (H_i)_{i \in I}$ un arrangement projectif défini sur k , $Y = \bigcup_{i \in I} H_i$, $V = \mathbf{P}_k^n \setminus Y$ et $j: V \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ l'inclusion naturelle. On note $\mathcal{S}_i(\tilde{A})$ l'ensemble des strates de dimension i .

Soit $\pi_0: X_0 \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ l'éclatement simultané des strates de dimension 0 dans \mathbf{P}_k^n . On construit par récurrence $\pi_i: X_i \rightarrow X_{i-1}$, $i \geq 1$. Soit \mathcal{F}_S^i , pour $S \in \mathcal{S}(\tilde{A})$ de dimension $\geq i$, la transformée stricte par $\pi_0 \circ \dots \circ \pi_{i-1}$ de \mathbf{P}^S . On convient que si $S \in \mathcal{S}(\tilde{A})$, $\mathcal{F}_S^0 = S$. Les \mathcal{F}_S^i sont disjoints lorsque S décrit $\mathcal{S}_i(\tilde{A})$. On peut donc définir π_i comme l'éclatement simultané des \mathcal{F}_S^i , $S \in \mathcal{S}_i(\tilde{A})$, dans X_{i-1} . On note $X := X_{n-2}$ et $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ le morphisme $\pi := \pi_0 \circ \dots \circ \pi_{n-2}$. Si $S \in \mathcal{S}_i(\tilde{A})$ et $i \leq n-2$, on note $D_S := (\pi_i \circ \dots \circ \pi_{n-2})^{-1}(\mathcal{F}_S^i)$; c'est aussi la transformée stricte de $\pi_i^{-1}(\mathcal{F}_S^i)$ par $\pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_{n-2}$. Si $S \in \mathcal{S}_{n-1}(\tilde{A})$ on note D_S la transformée stricte de \mathbf{P}^S par π . Remarquons que les diviseurs D_S sont distincts et irréductibles. On note $D_S^0 := D_S \setminus \bigcup_{T \neq S} D_T$, et $Z := \bigcup_{S \in \mathcal{S}(\tilde{A})} D_S$.

(7.2) PROPOSITION. — (i) Le diviseur $Z = \bigcup_{S \in \mathcal{S}(\tilde{A})} D_S$ est un diviseur globalement à croisements normaux. Plus précisément, localement dans X pour la topologie de Zariski, Z est une réunion d'hyperplans en position générale. De plus la restriction de π à $X \setminus Z$ est un isomorphisme sur son image V .

(ii) Pour toute strate S de \tilde{A} , on a $\mu(S, \tilde{A}) = \chi((D_S^0)_{\bar{k}}, \mathbf{Q})$.

Démonstration. — (i) Le seul point à démontrer est que localement pour la topologie de Zariski Z est réunion d'hyperplans en position générale. Cela se démontre par récurrence sur n : les diviseurs $\pi_0^{-1}(S)$, $S \in \mathcal{S}_0(\tilde{A})$, sont disjoints et transverses à $T := \bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S}_i(\tilde{A}) \\ 1 \leq i \leq n-1}} \mathcal{F}_S^1$; de plus localement pour la topologie de Zariski T est le produit d'une

droite affine \mathbf{A}_k^1 par des hyperplans dans \mathbf{A}_k^{n-1} ; il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à ces hyperplans. Quant à (ii), c'est un exercice facile.

(7.3) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement affine défini sur k , $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères multiplicatifs $\chi_i: k^* \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_l^*$ vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$. Soit $\pi: X \rightarrow \mathbf{P}_k^n$ la modification

associée à \tilde{A} . On note j' l'inclusion $j': X \setminus Z \rightarrow X$ et $\mathcal{L}'_{\underline{\chi}}$ le $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau $\pi^*(j'_* \mathcal{L}_{\underline{\chi}}) = j'_*(\pi^*_{X \setminus Z} \mathcal{L}_{\underline{\chi}})$.

(7.3.1) LEMME. — (i) Le faisceau $\mathcal{L}'_{\underline{\chi}}$ est modérément ramifié le long de Z de monodromie géométrique χ_S le long de D_S .

(ii) Si les conditions (1.5.1) et (1.5.2) sont vérifiées, on a $\chi_S \neq \chi_{S'}$ dès que S et S' sont deux strates distinctes de \tilde{A} telles que $D_S \cap D_{S'} \neq \emptyset$.

Démonstration. — (i) est immédiat; (ii) est conséquence du fait suivant: si S et S' sont deux strates distinctes vérifiant $D_S \cap D_{S'} \neq \emptyset$, alors l'une des deux strates est contenue dans l'adhérence de l'autre.

(7.3.2) Choisissons $i_0 \in I$, et notons $f := l_{i_0}: \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$.

LEMME. — (i) *Le morphisme $f \circ \pi : \pi^{-1}(\mathbf{A}_k^n) \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ se prolonge en un morphisme $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbf{P}_k^1$.*

(ii) *Les diviseurs $\tilde{f}^{-1}(0)$ et $\tilde{f}^{-1}(\infty)$ sont réduits et on a*

$$\tilde{f}^{-1}(0) = \bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0}}} D_S \quad \text{et} \quad \tilde{f}^{-1}(\infty) = \bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0}}} D_S.$$

Démonstration. — (i) Le morphisme $f : \mathbf{A}_k^n \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ se prolonge en un morphisme $\mathbf{P}_k^n \setminus \overline{H_\infty \cap H_{i_0}} \rightarrow \mathbf{P}_k^1$. On obtient par récurrence sur i que $f \circ \pi_0 \circ \dots \circ \pi_i : (\pi_0 \circ \dots \circ \pi_i)^{-1}(\mathbf{A}_k^n) \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ se prolonge en un morphisme $X_i \setminus \overline{(H_\infty \cap H_{i_0})_i} \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ pour $i < n-2$, en notant $\overline{(H_\infty \cap H_{i_0})_i}$ la transformée stricte de $\overline{H_\infty \cap H_{i_0}}$ par $\pi_0 \circ \dots \circ \pi_i$. Comme $\pi_{n-2} : X \rightarrow X_{n-3}$ est composé d'éclatements de centres disjoints, et que $\overline{(H_\infty \cap H_{i_0})_{n-3}}$ est un de ces centres on obtient l'énoncé voulu. (ii) est clair.

(7.4) Le lemme suivant est bien connu.

LEMME. — *Soient W un schéma lisse propre irréductible de dimension n sur k et $j : U \rightarrow W$ l'inclusion d'un ouvert affine non vide. On suppose que $D := W \setminus U$ est un diviseur à croisements normaux. Soit \mathcal{L} un \mathbf{Q}_T -faisceau lisse de rang 1 sur U , modérément ramifié le long de D , tel que pour toute composante irréductible D_i de D la monodromie géométrique de \mathcal{L} le long de D_i soit un caractère non trivial. Alors $H_c^i(U, \mathcal{L}) = 0$ pour $i \neq n$.*

Démonstration. — Comme U est affine on a $H^i(U, \mathcal{L}) = 0$ pour $i > n$ d'après le théorème de M. Artin (SGA 4 XIV 3.2) et $H_c^i(U, \mathcal{L}) = 0$ pour $i < n$ par dualité de Poincaré. Les hypothèses faites sur \mathcal{L} entraînent que l'on a un quasi-isomorphisme $j_* \mathcal{L} \simeq Rj_* \mathcal{L}$, d'où le résultat.

(7.5) Soient $A = (l_i)_{i \in I}$ un arrangement affine vérifiant (1.5.1) et $\underline{\chi} = (\chi_i)_{i \in \bar{I}}$ une famille de caractères vérifiant $\prod_{i \in \bar{I}} \chi_i = 1$ et (1.5.2). On a le lemme suivant.

(7.5.1) LEMME. — (i) $H_c^i(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}}) = 0$ pour $i \neq n$ et $H_c^n(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}})$ est de dimension $(-1)^n \chi(V_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$.

(ii) *Les faisceaux $R^i \tilde{f}_* \mathcal{L}'_{\underline{\chi}}$ sont nuls pour $i \neq n-1$, et si t est un point fermé de \mathbf{A}_k^1 , le faisceau $R^{n-1} \tilde{f}_* \mathcal{L}'_{\underline{\chi}}$ est de rang $(-1)^{n-1} \lambda_{i_0}(t)$ en t .*

(iii) *La restriction de $R^{n-1} \tilde{f}_* \mathcal{L}'_{\underline{\chi}}$ à U_{i_0} est un \mathbf{Q}_T -faisceau lisse.*

Démonstration. — (i) est une conséquence de (7.3.1) (i) et de (7.4), car $H_c^i(V_{\bar{k}}, \mathcal{L}_{\underline{\chi}}) = H_c^i(\pi^{-1}(V_{\bar{k}}), \pi^* \mathcal{L}_{\underline{\chi}}) = H^i(X_{\bar{k}}, \mathcal{L}'_{\underline{\chi}})$. (ii) est une conséquence de (i) appliqué à l'arrangement A_t défini de la façon suivante pour t un point fermé de \mathbf{A}_k^1 : on note g_i la restriction de l_i à l'hyperplan $A_{i_0, t}$ d'équation $l_{i_0} - t = 0$; on note I' l'ensemble des $i \in I$ tels que g_i n'est pas constant; A_t est alors l'arrangement (défini sur une extension finie de k) $A_t := (g_i)_{i \in I'}$; il est clair que A_t vérifie (1.5.1) et que $\underline{\chi}' = (\chi'_i)_{i \in \bar{I}'}$, avec $\chi'_i = \chi_i$, $i \in I'$, et $\chi'_\infty = \prod_{i \in \bar{I} \setminus I'} \chi_i$, vérifie (1.5.2). Comme $Z \cap \tilde{f}^{-1}(U_{i_0})$ est un diviseur à croisements normaux relatif au-dessus de U_{i_0} , (iii) résulte alors de ce qui précède grâce à (SGA 7 XIII 2.1.11).

(7.5.2) Dans la proposition suivante on calcule les cycles proches de \mathcal{L}'_χ relativement à \tilde{f} .

PROPOSITION. — Soient $R^i\psi(\mathcal{L}'_\chi)$ les faisceaux de cycles proches de \mathcal{L}'_χ relativement à \tilde{f} .

(i) On a $R^i\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi) = 0$ pour $i > 0$. La restriction de $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)$ à $\tilde{f}^{-1}(0) \setminus \bigcup_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0}}} D_S^0$

est nulle. Pour $S \in \mathcal{S}_f(A)$, $S \subset H_{i_0}$, la restriction de $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)$ à D_S^0 est un \bar{Q}_I -faisceau lisse de rang 1 modérément ramifié le long de $D_S \setminus D_S^0$.

(ii) Si $S \in \mathcal{S}_f(A)$ et $S \subset H_{i_0}$, alors pour tout point fermé t de D_S^0 , la fibre de $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)$ en t est un G -module modéré sur lequel I agit par le caractère χ_S .

(i') et (ii') Même énoncé que (i) et (ii), en remplaçant $\bar{\eta}_0$ par $\bar{\eta}_\infty$ et la condition $S \in \mathcal{S}_f(A)$, $S \subset H_{i_0}$ par $S \in \mathcal{S}_\infty(A)$, $S \not\subset H_{i_0}$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de (3.4) et de (7.3.1), (7.3.2).

(7.5.3) LEMME. — (i) Soit $S \in \mathcal{S}_f(A)$, $S \subset H_{i_0}$. On a $H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)) = 0$ si $i \neq n-1$, tandis que $H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi))$ est un G -module de rang $(-1)^{n-1}\mu(S, \bar{A})$ de la forme $V_{\chi_S} \otimes E$ avec E un G -module non ramifié.

(i') Même énoncé que (i), en remplaçant $\bar{\eta}_0$ par $\bar{\eta}_\infty$ et la condition $S \in \mathcal{S}_f(A)$, $S \subset H_{i_0}$ par $S \in \mathcal{S}_\infty(A)$, $S \not\subset H_{i_0}$.

Démonstration. — Démontrons (i), (i') étant similaire. Comme \tilde{f} est propre on a

$$H^i(\tilde{f}^{-1}(0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)) = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0}}} H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)),$$

d'après (7.3.2) (ii) et (7.5.2) (i), et de plus d'après (SGA 7 XIII 2.1.8) et (7.5.2) (i) la dimension de $H^i(\tilde{f}^{-1}(0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi))$ est égale au rang de $R^i\tilde{f}_*(\mathcal{L}'_\chi)_{\bar{\eta}_0}$.

On a donc $H_c^i((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)) = 0$ si $i \neq n-1$ d'après (7.5.1) [on aurait aussi pu utiliser (7.4)]. Comme le faisceau $R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi)$ restreint à D_S^0 est lisse de rang 1 et modérément ramifié le long de $D_S \setminus D_S^0$ d'après (7.5.2), la dimension de $H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi))$ est égale à $(-1)^{n-1}\chi((D_S^0)_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_I)$ et donc à $(-1)^{n-1}\mu(S, \bar{A})$ d'après (7.2) (ii). La dernière assertion est alors conséquence de (7.5.2) (ii).

8. Preuve de la proposition clé (6.4)

(8.1) Soient A et χ vérifiant les hypothèses de (6.4). Soit $i_0 \in I$. On note F le faisceau $R^{n-1}\tilde{f}_*\mathcal{L}'_\chi$. Il est de la forme $F = \beta_1\mathcal{G}$ avec \mathcal{G} un \bar{Q}_I -faisceau sur $\mathbf{G}_{m,k}^1$.

Comme \tilde{f} est propre on a, d'après (SGA 7 XIII 2.1.8) et (7.5.3) :

$$(8.1.1) \quad \mathcal{G}_{\bar{\eta}_0} = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0}}} H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0\psi_{\bar{\eta}_0}(\mathcal{L}'_\chi))$$

$$(8.1.2) \quad \mathcal{G}_{\bar{\eta}_\infty} = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0}}} H_c^{n-1}((D_S^0)_{\bar{k}}, R^0 \psi_{\bar{\eta}_\infty}(\mathcal{L}'_S)).$$

D'après (7.5.1) la restriction de \mathcal{G} à U_{i_0} est un $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceau lisse. D'après (7.5.3), (8.1.1) et (8.1.2) les G -modules $\mathcal{G}_{|_{\eta_0}}$ et $\pi_{\infty*}(\mathcal{G}_{|_{\eta_\infty}})$ sont modérés et à monodromie géométrique définie sur k ; \mathcal{G} est aussi modérément ramifié en tout point s de $S_{i_0}^*$ (remplacer l_{i_0} par $l_{i_0} - s$). D'après (7.5.1) (ii) si $s \in S_{i_0}^*$ on a $a_s(\mathcal{G}) = (-1)^{n-1} \delta_{i_0}(s)$.

(8.2) On déduit donc de (7.5.3) que, avec les notations de (3.2) et de (5.1),

$$(8.2.1) \quad r(E(\mathcal{G}_{|_{\eta_0}})_\chi) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_f(A) \\ S \subset H_{i_0} \\ \chi_S = \chi}} \mu(S, \bar{A})$$

$$(8.2.2) \quad r(E(\pi_{\infty*}(\mathcal{G}_{|_{\eta_\infty}}))_\chi) = (-1)^{n-1} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_\infty(A) \\ S \subset H_{i_0} \\ \chi_S = \chi}} \mu(S, \bar{A}).$$

D'après (5.5) on a donc

$$(8.2.3) \quad \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(G_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{G}))^{-1} \\ = \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(G_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))^{-1} J(i_0, \chi)^{(-1)^{n-1}} C_{i_0}(A, \chi_{i_0})^{(-1)^{n-1}}.$$

Dans le cas a , on note $V' = \mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in I'} A_i$, $V'' = A_{i_0} \setminus \bigcup_{i \in I''} A_i$. On a des inclusions $z: V \rightarrow \mathbf{A}_k^n$, $z': V' \rightarrow \mathbf{A}_k^n$, $z'': V'' \rightarrow A_{i_0}$ et $w: A_{i_0} \rightarrow \mathbf{A}_k^n$. On a une suite exacte de $\bar{\mathbf{Q}}_l$ -faisceaux sur \mathbf{A}_k^n

$$(8.2.4) \quad 0 \rightarrow (z_! \mathcal{L}_\chi) \otimes f^*(\gamma_! \mathcal{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}) \rightarrow z'_! \mathcal{L}_{\chi'} \rightarrow w_* (z''_! (\mathcal{L}_{\chi''}) \otimes \bigotimes_{i \in I' \setminus I''} \mathcal{L}_{\chi_i |_{s_i}}) \rightarrow 0,$$

où les $\mathcal{L}_{\chi_i |_{s_i}}$ sont des faisceaux géométriquement constants, et $\mathcal{L}_{\chi'}$ (resp. $\mathcal{L}_{\chi''}$) est le faisceau sur V' (resp. V'') associé à χ' (resp. χ'').

On en déduit un isomorphisme de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ modules

$$(8.2.5) \quad \det(R\Gamma_c(V_{\bar{k}}', \mathcal{L}_{\chi'})) \simeq \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_{\bar{k}}^n, (z_! \mathcal{L}_\chi) \otimes f^*(\gamma_! \mathcal{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))) \\ \otimes \det(R\Gamma_c(V_{\bar{k}}'', \mathcal{L}_{\chi''}) \otimes \bigotimes_{i \in I' \setminus I''} \mathcal{L}_{\chi_i |_{s_i}}).$$

Mais d'après la formule de projection on a un isomorphisme de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ modules

$$(8.2.6) \quad \det(R\Gamma_c(\mathbf{A}_{\bar{k}}^n, (z_! \mathcal{L}_\chi) \otimes f^*(\gamma_! \mathcal{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))) \simeq \det(R\Gamma_c(G_{m, \bar{k}}^1, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}_{\chi_{i_0}^{-1}}))^{\otimes (-1)^{n-1}}.$$

D'autre part, comme

$$R\Gamma_c(V_{\bar{k}}'', \mathcal{L}_{\chi''}) \simeq H_c^{n-1}(V_{\bar{k}}'', \mathcal{L}_{\chi''})[-(n-1)]$$

et

$$\dim H_c^{n-1}(V_k'', \mathcal{L}_{\chi''}) = (-1)^{n-1} \lambda(\overline{A''})$$

d'après (7.5.1), on a

$$(8.2.7) \quad \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_k'', \mathcal{L}_{\chi''}) \otimes \bigotimes_{i \in I' \setminus I''} \mathcal{L}_{\chi_i | s_i}) \\ = \det(\text{Frob}_q, R\Gamma_c(V_k'', \mathcal{L}_{\chi''})) \prod_{i \in I' \setminus I''} \chi_i(s_i)^{\lambda(\overline{A''})}.$$

On déduit alors l'égalité demandée (6.4.1) de (8.2.3), (8.2.5), (8.2.6) et (8.2.7), car on a un isomorphisme de Gal(\overline{k}/k)-modules

$$\det(R\Gamma_c(V_{\overline{k}}, \mathcal{L}_{\chi})) \simeq \det(R\Gamma_c(\mathbf{G}_{m, \overline{k}}^1, \mathcal{G}))^{\otimes (-1)^{n-1}}.$$

Dans le cas *b*, on a un isomorphisme $z_1 \mathcal{L}_{\chi'} \simeq z_1 \mathcal{L}_{\chi} \otimes f^*(\gamma_1 \mathcal{L}_{\chi_0^{-1}})$, et on en déduit de même, grâce à (8.2.3), l'égalité (6.4.2).

Ceci termine donc la preuve de (6.4), et par conséquent du théorème (2.2).

APPENDICE

(A.1) Soit $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'hyperplans affines dans \mathbf{A}_k^n . Soit $L(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersections non vides d'hyperplans de \mathcal{A} [on convient que $\mathbf{A}_k^n \in L(\mathcal{A})$]. On munit $L(\mathcal{A})$ de l'ordre partiel : $X \leq Y$ si et seulement si $Y \subset X$. Si $X \in L(\mathcal{A})$ on note $r(X)$ la codimension de X .

Soit $\mu : L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Z}$ la fonction de Möbius de l'ensemble ordonné $L(\mathcal{A})$; μ est caractérisée par les relations

$$\mu(\mathbf{A}_k^n) = 1 \\ \sum_{\mathbf{A}_k^n \leq Y \leq X} \mu(Y) = 0 \quad \text{si } X > \mathbf{A}_k^n.$$

Le polynôme de Poincaré de \mathcal{A} est par définition le polynôme

$$\pi(\mathcal{A}, t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) (-t)^{r(X)}.$$

On pose $V := \mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$, $h_c^i := \dim H_c^i(V_{\overline{k}}, \mathbf{Q}_l)$ et

$$P(\mathcal{A}, t) := \sum_{0 \leq i \leq 2n} h_c^{2n-i} t^i.$$

(A.2) L'énoncé suivant est vraisemblablement bien connu. [L'égalité (ii) est l'analogue sur les corps finis de la formule d'Orlik et Solomon [O-S].]

THÉORÈME. — Soit $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'hyperplans affines deux à deux distincts dans \mathbf{A}_k^n . On a

- (i) $\pi(\mathcal{A}, t) = P(\mathcal{A}, t)$.
- (ii) $|\mathbf{V}(\mathbf{F}_{q^e})| = q^{en} \pi(\mathcal{A}, -q^{-e})$.
- (iii) $\chi(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) = \pi(\mathcal{A}, -1)$.
- (iv) Si $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\chi(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) = 0$.

Démonstration. — Si I est non vide on fixe $i_0 \in I$. On pose $I' := I \setminus \{i_0\}$ et $I'' := \{i \in I'; A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset\}$. Soient \mathcal{A}' la famille $\mathcal{A}' := (A_i)_{i \in I'}$ et \mathcal{A}'' la famille d'hyperplans dans A_{i_0} , $\mathcal{A}'' := (A_i \cap A_{i_0})_{i \in I''}$. On pose $\mathbf{V}' := \mathbf{A}_k^n \setminus \bigcup_{i \in I'} A_i$ et $\mathbf{V}'' := A_{i_0} \setminus \bigcup_{i \in I''} A_i$.

On a une suite exacte longue naturelle compatible à l'action de Frob_q

$$(A.2.1) \quad \rightarrow H_c^i(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow H_c^i(\mathbf{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow H_c^i(\mathbf{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow$$

(A.2.2) LEMME:

- (i) $H_c^i(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) = 0$ si $i < n$.
- (ii) Si $i \geq n$ le Frobenius géométrique Frob_q a pour unique valeur propre q^{i-n} sur $H_c^i(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$.

Démonstration du lemme. — (i) provient de ce que \mathbf{V} est affine. Montrons (ii) par récurrence sur $(n, |I|)$ (pour l'ordre lexicographique). C'est clair si $n=0$ ou si $|I|=0$. On peut donc supposer que $n > 0$, $|I| > 0$ et que (ii) est vérifié pour \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' . On déduit alors de (A.2.1) que (ii) est vérifié pour \mathcal{A} .

(A.2.3) On déduit aussitôt de (A.2.1) et (A.2.2) que l'on a des suites exactes courtes

$$(A.2.3.1) \quad 0 \rightarrow H_c^{i-1}(\mathbf{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow H_c^i(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow H_c^i(\mathbf{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) \rightarrow 0$$

ce qui entraîne l'égalité

$$(A.2.3.2) \quad P(\mathcal{A}, t) = P(\mathcal{A}', t) + t P(\mathcal{A}'', t).$$

D'autre part il est clair que

$$(A.2.3.3) \quad P(\mathcal{A}, t) = 1 \quad \text{si} \quad |I| = 0.$$

Comme les égalités (A.2.3.2) et (A.2.3.3) sont également vérifiées par π ([0], 2.29) on obtient que $\pi(\mathcal{A}, t) = P(\mathcal{A}, t)$. L'égalité (ii) est alors conséquence de (A.2.2) et de la formule des traces de Grothendieck. Quant à (iii), c'est une conséquence de (i) et de la dualité de Poincaré. [Remarquons qu'il est aussi possible de démontrer directement (ii) et (iii) sans utiliser (i).] Pour (iv) on remarque que si $n=1$ ou $|I|=1$ c'est clair, tandis que si $|I| \geq 2$, \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' vérifient la même condition que \mathcal{A} . Comme $\chi(\mathbf{V}_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) = \chi(\mathbf{V}'_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l) - \chi(\mathbf{V}''_{\bar{k}}, \mathbf{Q}_l)$ on obtient le résultat par récurrence sur $(n, |I|)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [L] G. LAUMON, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 65, 1987, p. 131-210).
- [O] P. ORLIK, *Introduction to Arrangements* (*C.B.M.S. Regional Conference Series*, vol. 72, 1989).
- [O-S] P. ORLIK et L. SOLOMON, *Combinatorics and Topology of Complements of Hyperplanes* (*Invent. Math.*, vol. 56, 1980, p. 169-189).
- [R-Z] M. RAPOPORT et T. ZINK, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik* (*Invent. Math.*, vol. 68, 1982, p. 21-101).
- [V] A. N. VARCHENKO, *Beta function of Euler, Vandermond determinant, Legendre equation and critical values of linear functions on configurations of hyperplanes*, (*Izvestia Akad. Nauk. SSSR* vol. 53 (1989), p. 1206-1235 et vol. 54 (1990), p. 146-158).
- [SGA] *Séminaire de Géométrie Algébrique*, (4), (7), parties I et II [*Springer Lect. Notes Math.* n° 269-270-305 (4), 288 (7), partie I, 340 (7), partie II].

(Manuscrit reçu le 10 mai 1990,
révisé le 11 septembre 1990).

François LOESER,
Unité de Recherche
associée au C.N.R.S. n° D 0169,
Centre de Mathématiques,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France.