

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LOESER

**À propos de la forme hermitienne canonique d'une
singularité isolée d'hypersurface**

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 385-392.

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__385_0

© Bulletin de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**A PROPOS DE LA FORME HERMITIENNE CANONIQUE
D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE D'HYPERSURFACE**

PAR

FRANÇOIS LOESER (*)

RÉSUMÉ. — On détermine la « partie cachée » de la forme hermitienne canonique de Barlet en utilisant une compactification de la fibre de Milnor.

ABSTRACT. — We give an explicit description of the "hidden part" of Barlet's canonical hermitian form using a compactification of the Milnor fiber.

Introduction

Dans [2] D. Barlet a introduit sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une singularité isolée d'hypersurface une forme hermitienne canonique h qui permet de faire le lien entre l'intégration dans les fibres et le système de Gauss-Manin. Il montre en particulier que h est non dégénérée et que en dehors de la valeur propre 1 elle coïncide avec la forme d'intersection.

Dans le présent travail nous nous proposons d'éclairer un peu « la partie cachée » correspondant à la valeur propre 1. Pour cela on utilise une compactification de la fibre de Milnor et on relie h à la forme d'intersection sur cette compactification. On en déduit comme corollaire des propriétés de réalité de h qui ne semblaient pas évidentes directement (ce corollaire m'a été indiqué par D. Barlet), une « nouvelle » démonstration de la non

(*) Texte reçu le 22 octobre 1985.

François LOESER, Centre de Mathématiques, École Polytechnique, U.A. au C.N.R.S.
n° 169, 91128 Palaiseau Cedex.

dégénérescence de h et des propriétés de polarisation utilisées de façon cruciale dans [3].

Les démonstrations sont proches de celles de l'article [3], mais les présents résultats n'étant que sous-entendus dans ce travail, il nous a semblé utile de les énoncer ici clairement et d'en offrir des démonstrations complètes.

Je remercie D. Barlet pour ses suggestions ainsi que pour ses encouragements à rédiger le présent travail.

Soit $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction à singularité isolée. Soit \tilde{f} un représentant de f , $X = \tilde{f}^{-1}(\Delta_\eta) \cap B_{\varepsilon/2}$, avec ε et η choisis tels que $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$ et $B_\varepsilon = \{Z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|Z\| \leq \varepsilon\}$, $\Delta_\eta = \{Z \in \mathbb{C} \mid \|Z\| \leq \eta\}$. On note $\Delta = \Delta_\eta$ quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note $f: X \rightarrow \Delta$ la restriction de \tilde{f} à X , et $X(t) = X \cap f^{-1}(t)$.

Sur $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ on dispose du fibré de Milnor \underline{H} dont la fibre en t est $H^n(X(t), \mathbb{C})$.

Soit $\pi: U \rightarrow \Delta^*$ le revêtement universel de Δ^* , on note $H = \Gamma(U, \pi^* \underline{H})$, et H^* le dual de H .

Si \mathcal{N} ilss désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe de Nilsson sur U , et $E \subset \mathcal{N} \otimes_{\mathbb{C}} H$ le sous-espace des invariants par la monodromie, on a un morphisme canonique:

$$s: \Gamma(B_\varepsilon, \Omega^{n+1}) \rightarrow E,$$

défini ainsi: pour $\gamma \in H^*$ on a

$$s(\omega)[\gamma] = \int_\gamma \frac{\omega}{df}$$

(Ω^{n+1} est le faisceau des $n+1$ formes holomorphes sur \mathbb{C}^{n+1}). Si $(2\pi/i)N$ désigne le logarithme de la partie unipotente de la monodromie, on peut écrire (cf. [7], [3]):

$$s(\omega) = \sum_{\alpha \in F + \mathbb{N}} t^\alpha t^N u_\alpha^\omega \quad \text{avec } u_\alpha^\omega \in H$$

où F est un ensemble fini de rationnels, et on note $\alpha(\omega) = \inf \{ \alpha \mid u_\alpha^\omega \neq 0 \}$.

Soit \mathcal{N} le $\mathbb{C}[[t, \bar{t}]]$ module

$$\bigoplus_{r \in \mathbb{Q}, j \in [0, n]} \mathbb{C}[[t, \bar{t}]] \mid t \mid r (\log t \bar{t})^j / \mathbb{C}[[t, \bar{t}]]$$

Dans [1] D. Barlet a montré que l'on a un morphisme canonique :

$$\mathcal{H} : \Gamma(B_g, \Omega^{n+1}) \times \Gamma(B_g, \Omega^{n+1}) \rightarrow \mathcal{A}$$

qui à deux $(n+1)$ formes ω et ω' associe le développement asymptotique de

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{X(t)} \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\bar{\omega}'}{df} \text{ dans } \mathcal{A}.$$

Dans [2] D. Barlet montre qu'il existe une forme hermitienne h sur H appelée forme hermitienne canonique telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\omega, \omega') = & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}, \alpha' \in \mathbb{N}, k \in [0, N]} t^\alpha \bar{t}^{\alpha'} \frac{(\log \bar{t}t)^k}{k!} h(N^k u_\alpha^\omega, u_{\alpha'}^{\omega'}) \\ & + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}, \alpha' \in \mathbb{N}, k \in [0, N]} t^\alpha \bar{t}^{\alpha'} \frac{(\log \bar{t}t)^{k+1}}{(k+1)!} h(N^k u_\alpha^\omega, u_{\alpha'}^{\omega'}). \end{aligned}$$

si $s(\omega) = \sum t^\alpha t^N u_\alpha^\omega$ et $s(\omega') = \sum t^{\alpha'} t^N u_{\alpha'}^{\omega'}$.

Pour λ une valeur propre de la monodromie on note H_λ le sous-espace propre généralisé qui lui est associé, et $H_{\neq 1} = \bigoplus_{\lambda \neq 1} H_\lambda$.

Dans [2], D. Barlet montre le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — (1) h est non dégénérée;

(2) si Q désigne la forme d'intersection sur $H_{\neq 1}$, on a

$$\forall (x, y) \in H_{\neq 1} \times H_{\neq 1}: \quad h(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} Q(x, \bar{y}).$$

Il pose également la question de comprendre la restriction de h à H_1 . Nous allons essayer de répondre à cette question en utilisant une compactification projective.

D'après [4] on peut par un changement analytique de coordonnées dans \mathbb{C}^{n+1} au voisinage de zéro supposer que f est un polynôme tel que :

- (a) $Y(0) = \overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ a zéro pour unique point singulier.
- (b) $Y(t) = \overline{f^{-1}(t)} \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est lisse pour $t \neq 0, |t|$ petit.
- (c) le degré de f est arbitrairement grand.

D'autre part, il est montré dans (*loc.cit.*, p. 296) que si le degré de f est suffisamment grand, la flèche de restriction $r_t: H^n(Y(t), \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X(t), \mathbb{C})$ est surjective pour $t \neq 0$.

Notons \underline{H}' le fibré sur Δ^* dont la fibre en t est $H^n(Y(t), \mathbb{C})$ et $H' = \Gamma(U, \pi^* \underline{H}')$. On a donc que si le degré de f est suffisamment grand

la restriction $H' \xrightarrow{r} H$ est surjective.

D'après le théorème des cycles invariants [6] on a alors une suite exacte :

$0 \rightarrow I \rightarrow H' \xrightarrow{r} H \rightarrow 0$, où I est l'espace des cycles de H' invariants par la monodromie. Si l'on note H'_1 l'espace propre généralisé associé à la valeur propre 1 de la monodromie on a alors (en notant toujours r le morphisme de restriction) une suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow H'_1 \xrightarrow{r} H_1 \rightarrow 0.$$

Soit maintenant (u_1, \dots, u_k) une base de H_1 , il existe des formes ω_i , $1 \leq i \leq k$, et des entiers m_i tels que $\alpha(\omega_i) = m_i$ et $u_{m_i}^{\omega_i} = u_i$.

D'autre part il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si ω' a un p jet nul on a :

- (i) $\alpha(\omega') > \alpha(\omega_i), \quad \forall i \in [1, k];$
- (ii) $\left| \int_{X(t)} \frac{\omega_i}{df} \wedge \frac{\omega'}{df} \right| = 0 (|t|^{2m_i}), \quad \forall i \in [1, k].$

Un changement de coordonnées supplémentaires permet de supposer que $\deg f > p + n + 1$.

Dans ce cas, si on pose η_i le jet à l'ordre p de ω_i , la forme $\eta_i/(f-t)$ se prolonge sur $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ en une forme méromorphe à pôles logarithmiques le long de $Y(t)$ notée $\tilde{\eta}_i(t)$ pour tout $t \neq 0$ petit d'après Varchenko [7]. On a bien sûr $\alpha(\omega_i) = \alpha(\eta_i)$ et $u_{m_i}^{\omega_i} = u_{m_i}^{\eta_i}$. Pour simplifier les notations on supprime temporairement l'indice i . Le résidu de $\tilde{\eta}(t)$ le long de $Y(t)$ définit une forme différentielle fermée sur $Y(t)$ que l'on note $R(\tilde{\eta}(t))$ et qui définit une classe de cohomologie $[R(\tilde{\eta}(t))]$ dans $H^n(Y(t), \mathbb{C})$. Quand t varie $[R(\tilde{\eta}(t))]$ est alors un élément invariant par la monodromie de $\mathcal{N}ilss \otimes_{\mathbb{C}} H'$. Pour t non nul on a : $r_t([R(\tilde{\eta}(t))]) = s(\eta)$ et donc d'après le théorème des cycles invariants on a :

$$[R(\tilde{\eta}(t))] = \sum_{j < m} t^j V_j + t^m t^{N'} U + \sum_{\alpha > m} t^\alpha t^{N'} U_\alpha.$$

avec $r(U)=u$, $V_j \in I$, $U_\alpha \in H'$ et $(2\pi/i)N'$ le logarithme de la partie unipotente de la monodromie sur H' . Rappelons que sur une variété lisse compacte Y de dimension réelle $2n$, pour α et β deux n formes différentielles fermées on a $\int_Y \alpha \wedge \beta = q(a, b)$ où q est la forme d'intersection sur $H^n(Y, \mathbb{R})$ et a (resp. b) la classe de cohomologie définie par α (resp. β).

Si Q' est la forme d'intersection sur H' , on a donc

$$\int_{Y(t)} [R(\tilde{\eta}(t))] \wedge \overline{[R(\tilde{\eta}(t))]} = P(|t|^2) + |t|^{2m} \left(\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n Q' \left(\frac{(\log t)^r}{r!} N^r U, \frac{(\log t)^s}{s!} \overline{N^s U} \right) + O(|t|^{2m}) \right)$$

avec P un polynôme.

Remarquons que

$$\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n Q' \left(\frac{(\log t)^r}{r!} N^r U, \frac{(\log t)^s}{s!} \overline{N^s U} \right) = \sum_{l=0}^n \frac{(\log t)^l}{l!} Q'(N^l U, \bar{U}).$$

D'après la condition (ii)

$$\int_{X(t)} \left(\frac{\eta}{df} \wedge \frac{\bar{\eta}}{df} - \frac{\omega}{df} \wedge \frac{\bar{\omega}}{df} \right) \text{ est un } o(|t|^{2m})$$

et comme $\int_{Y(t) \times X(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ est \mathcal{C}^∞ , les images dans \mathcal{N} de $\int_{Y(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ et $\int_{X(t)} \omega/df \wedge \overline{\omega/df}$ ont leurs termes en $|t|^{2m} (\log t)^l$ qui coïncident.

Le coefficient de $|t|^{2m} \log(t)^{l+1}$ dans le développement de $\int_{Y(t)} R(\tilde{\eta}(t)) \wedge \overline{R(\tilde{\eta}(t))}$ est $(1/(l+1)!) Q'(N^{l+1} U, \bar{U})$ et celui de $\int_{X(t)} \omega/df \wedge \overline{\omega/df}$ est par définition $((2\pi i)^n/(l+1)!) h(N^l u, u)$. On obtient

donc en particulier,

$$h(u, u) = \frac{1}{(2\pi i)^n} Q'(N' U, \bar{U}).$$

Soit maintenant \tilde{u} quelconque de H'_1 tel que $r(\tilde{u}) = u$: comme $U - \tilde{u} \in I$, on a $Q'(N' U, \bar{U}) = Q'(N' \tilde{u}, \bar{\tilde{u}})$. On en déduit donc par linéarité que pour tout $x \in H_1$ et tout \tilde{x} de H'_1 tel que $r(\tilde{x}) = x$ on a

$$h(x, x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} Q'(N' \tilde{x}, \bar{\tilde{x}})$$

(un tel \tilde{x} existe toujours car r est surjective).

On en déduit (en utilisant la formule $4 h(x, y) = \sum_{\varepsilon \in \{1, -1, i, -i\}} \varepsilon h(x + \varepsilon y, x + \varepsilon y)$) le résultat suivant:

THÉORÈME 2. — Avec les notations précédentes:

$$\forall (x, y) \in H_1 \times H_1 : h(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} Q'(N' \tilde{x}, \bar{\tilde{y}}),$$

pour tout \tilde{x} (resp. \tilde{y}) de H'_1 vérifiant $r(\tilde{x}) = x$ (resp. $r(\tilde{y}) = y$), de tels \tilde{x} et \tilde{y} existant toujours.

COROLLAIRE 1. — h est réelle dans le sens suivant: (on appelle $H_{\mathbb{R}}$ le fibré sur Δ^* de fibre $H^n(X(t), \mathbb{R})$ et

$$H_{\mathbb{R}} = \Gamma(U, \pi^* H_{\mathbb{R}}), \quad H_{\mathbb{R}, 1} = H_{\mathbb{R}} \cap H_1, \quad H_{\mathbb{R}, \neq 1} = H_{\mathbb{R}} \cap H_{\neq 1}$$

- $\forall (x, y) \in H_{\mathbb{R}, \neq 1} \times H_{\mathbb{R}, \neq 1}, \quad h(x, y) \in i^n \mathbb{R}$
- $\forall (x, y) \in H_{\mathbb{R}, 1} \times H_{\mathbb{R}, 1}, \quad h(x, y) \in i^{n+1} \mathbb{R}.$

Démonstration du corollaire. — On utilise la constatation évidente suivante: si q est une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) sur un espace vectoriel réel E de complexifié $E_{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $q_{\mathbb{C}}$ la complexifiée alors $q_{\mathbb{C}}(x, \bar{y})$ (resp. $i q_{\mathbb{C}}(x, \bar{y})$) définit une forme hermitienne sur $E_{\mathbb{C}}$ et sa restriction à E est à valeurs dans \mathbb{R} (resp. $i \mathbb{R}$). On obtient le corollaire en remarquant que:

— sur $H_{\mathbb{R}, \neq 1}$ Q est symétrique réelle si n est pair, antisymétrique réelle sinon.

— sur $H_{\mathbb{R},1}$: la forme q définie par $q(x, y) = iQ'(N' \tilde{x}, \tilde{y})$ avec \tilde{x} et \tilde{y} tels que $r(\tilde{x}) = x$ et $r(\tilde{y}) = y$ est bilinéaire réelle: en effet on peut choisir \tilde{x} et \tilde{y} réels, et comme la monodromie est réelle iN' est réel. Enfin on remarque que q est antisymétrique si n est pair et symétrique sinon.

COROLLAIRE 2 (D. Barlet). — Soit G le groupe des automorphismes de H qui commutent avec la monodromie. G agit sur les formes hermitiennes sur H . Soit S le stabilisateur de h :

G/S est un espace affine symétrique.

Démonstration. — Comme h est réelle et non dégénérée $\sigma: G \rightarrow G$ qui à u associe $\sigma(u) = h' u^{-1} h^{-1}$ est une involution et $S = \text{Fix}(\sigma)$.

Remarque 1. — Il est clair que la démonstration du théorème 2 permettrait si on le désirait de retrouver le (2) du théorème 1.

Remarque 2. — On pourrait alors retrouver le (1) du théorème 1 de la façon suivante: il suffit de montrer que la restriction de h à H_1 est non dégénérée. Soit alors $x \in H_1$ tel que $h(x, y) = 0$ pour tout y de H_1 . Choisis-

sons \tilde{x} tel que $r(\tilde{x}) = x$. On a alors $\forall y \in H'_1 Q'(N' \tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Mais comme la restriction de Q' à H_1 est non dégénérée (dualité de Poincaré) on a alors $N' \tilde{x} = 0$, d'où $\tilde{x} \in I$ et $x = 0$.

Soit (F) la filtration de Hodge sur H définie par Steenbrink dans [6] et (W) la filtration par le poids de la monodromie. On pose $P^{k+n} = \{u \in \text{Gr}_{k+n}^W / N^{k+1} u = 0\}$. D'après [6] (F) induit sur P^{k+n} une structure de Hodge de poids $k+n$ et écrivons $P^{k+n} = \bigoplus_{p+q=k+n} P^{p,q}$ la décomposition de Hodge correspondante.

Alors d'après les théorèmes 1 et 2 et le théorème de Schmid ([5], p. 255) on obtient que h vérifie les propriétés de polarisation suivantes (on note $P_1^{p,q} = H_1 \cap P^{p,q}$ et $P_{\neq 1}^{p,q} = H_{\neq 1} \cap P^{p,q}$):

COROLLAIRE 3. — (i) Soient $(u, v) \in P_1^{p,q} \times P_1^{r,s}$ avec $p+q=r+s=n+k$.

- Alors $h(N^{k-1} u, v) = 0$ si $(p, q) \neq (s, r)$;
- si $u \neq 0$, alors $(-1)^{[n(n-1)/2]+k+p} h(N^{k-1} u, u) > 0$.

(ii) Soient $(u, v) \in P_{\neq 1}^{p,q} \times P_{\neq 1}^{r,s}$ avec $p+q=r+s=n+k$.

- Alors $h(N^k u, v) = 0$ si $(p, q) \neq (s, r)$;
- si $u \neq 0$, alors $(-1)^{[n(n-1)/2]+k+p} h(N^k u, u) > 0$.

Remarque 3. — N définie ici diffère de $i/2\pi$ du N de [5].

Remarque 4. — Dans [3] nous avons utilisé implicitement le corollaire 2 pour déterminer des pôles du courant $|f|^{2s}$.

Remarque (ajoutée sur épreuves). — Soit I la forme d'intersection $H \times H_c \rightarrow \mathbb{C}$, H_c étant l'analogue de H pour la cohomologie à support. Soit M la partie unipotente de la monodromie sur H , $\text{Var}: H \rightarrow H_c$ l'isomorphisme de variation et

$$V = \text{Var} \circ \left(\text{Id} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \frac{(M - \text{Id})^i}{i+1} \right).$$

On déduit facilement du théorème 2 la formule purement locale suivante: pour x et y dans H_1 , on a

$$h(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} I(x, V\bar{y}).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARLET (D.). — Développement asymptotique des fonctions obtenues par intégration dans les fibres. *Inventiones Math.*, vol. 68, 1982, p. 129-174.
- [2] BARLET (D.). — Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée. *Inventiones Math.*, vol. 81, 1985, p. 115-153.
- [3] LOESER (F.). — Quelques conséquences locales de la théorie de Hodge. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. XXXV, n° 1, 1985, p. 75-92.
- [4] SCHERK (J.). — On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities. *Inventiones Math.*, vol. 58, 1980, p. 289-301.
- [5] SCHMID (W.). — Variation of Hodge structures; the singularities of the period mapping. *Inventiones Math.*, vol. 22, 1973, p. 211-319.
- [6] STEENBRINK (J.). — Mixed Hodge structure on the Vanishing cohomology. Real and Complex singularities, Oslo, 1976, p. 525-563.
- [7] VARCHENKO (A.). — Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure, *Dokl. Akad. Nauk.*, vol. 255, n° 5, 1980, p. 1035-1038.